

Доц. д-р инж. Никола Колев Армянов
Доц. д-р инж. Таня Методиева Стоянова
Гл. ас. инж. Радка Йорданова Тодорова

ТЕОРЕТИЧНА ЕЛЕКТРОТЕХНИКА
РЪКОВОДСТВО ЗА СЕМИНАРНИ УПРАЖНЕНИЯ

РУСЕНСКИ УНИВЕРСИТЕТ "АНГЕЛ КЪНЧЕВ"

Русе
2005

УДК:

Анотация:

Това учебно пособие представлява ръководство за семинарни упражнения по дисциплината “Теоретична електротехника” и е предназначено за студентите редовно и задочно обучение от всички специалности на факултет “Електротехника, електроника и автоматика” при Русенски университет “Ангел Кънчев “. То може да се използва и от студентите на останалите технически университети в страната.

© Редактори: доц. д-р инж. Никола Колев Армянов
доц. д-р инж. Таня Методиева Стоянова
© Рецензент: доц. д-р инж. Емил Николаев Павлиянов
© Печатна база при Русенския Университет “Ангел Кънчев”

ISBN: 954 – 712 – 301 – 7

СЪДЪРЖАНИЕ

Предговор	стр. 4
ПЪРВА ЧАСТ	
1. Постояннотокови режими в линейни електрически вериги	5
2. Постояннотокови режими в магнитни вериги	18
3. Установени синусоидални процеси в линейни електрически вериги	25
4. Установени синусоидални процеси в линейни електрически вериги с индуктивна връзка	36
5. Резонансни явления в линейни електрически вериги	42
6. Периодични несинусоидални процеси в линейни електрически вериги	47
7. Преходни процеси в линейни електрически вериги със съсредоточени параметри при въздействия на постоянни и хармонични източници на напрежение и ток	53
ВТОРА ЧАСТ	
1. Трифазни вериги	73
2. Четириполюсници	78
3. Реактивни електрически филтри	84
4. Вериги с разпределени параметри	99
5. Нелинейни електрически вериги	106
6. Електромагнитно поле	116
Литература	127

П Р Е Д Г О В О Р

Ръководството за семинарни упражнения по дисциплината “Теоретична електротехника” има задачата да разшири и затвърди подготовката на студентите от факултет “Електротехника, електроника и автоматика” при Русенски университет “Ангел Кънчев” по дисциплината.

Тематиката на разделите е съобразена с утвърдените учебни програми по тази дисциплина и обхваща почти всички теми на курса на обучение.

Разделите на ръководството са подготвени от авторите както следва:

Първа част: 1 и 6 - от Т. М. Стоянова и Н. К. Армянов; 2 и 3 - от Р. Й. Тодорова; 4, 5 - от Н. К. Армянов и Т. М. Стоянова; 7 - от Р. Й. Тодорова, Т. М. Стоянова и Н. К. Армянов.

Втора част: 1 - от Р. Й. Тодорова; 2 - от Т. М. Стоянова; 3 - от Н. К. Армянов; 4 - от Т. М. Стоянова и Р. Й. Тодорова и 5 и 6 - от Н. К. Армянов и Т. М. Стоянова.

Редактирането на ръководството е извършено от Н. К. Армянов и Т. М. Стоянова.

При подготовката на ръководството авторите са спазили единен план на разработване на разделите, обхващаш две части. В първата част са дадени основните теоретични зависимости и алгоритмите за решаване на задачите от раздела, а във втората част - избрани задачи. Част от задачите са разработени от авторите, а останалите задачи са взети от литературата. Някои от задачите са решени, друга част от тях са с упътване, а за всички задачи са дадени отговорите. Основната част от задачите са взети от отпечатаното през 1993 г. от Печатна база при Русенски университет “Ангел Кънчев” учебно помагало “Теоретични основи на електротехниката (ИЗБРАНИ ЗАДАЧИ)”, при подготовката на което освен авторите взеха участие още Д. Г. Михайлова, Д. В. Киряков, В. И. Джуров и В. С. Русева, а от теоретичните постановки - от отпечатаното през 1997 г. от Печатна база при Русенски университет “Ангел Кънчев” учебно пособие “Теоретични основи на електротехниката” - ръководство за семинарни упражнения.

Техническото изпълнение на илюстративния материал е направено от Т. М. Стоянова, а на текста - от студентите Д. В. Пецова, Д. Н. Иванова, Н. Р. Йорданова, С. С. Буланов, Л. В. Цанкова, А. И. Точев, Ц. Х. Христова, К. И. Петрова и М. Б. Кърмъзов. Окончателното техническо оформяне на ръководството е направено от Н. К. Армянов и Т. М. Стоянова.

Това учебно пособие отразява дългогодишния труд и опит на авторите му.

Като първо издание това ръководство не е лишено от пропуски и недостатъци, поради което всички критични бележки, мнения и препоръки молим да се изпращат на адрес:

7017 Русе, ул. “Студентска” № 8
Русенски университет “Ангел Кънчев”,
Катедра “Теоретична и измервателна електротехника”

АВТОРИТЕ

ПЪРВА ЧАСТ

1. ПОСТОЯННОТОКОВИ РЕЖИМИ В ЛИНЕЙНИ ЕЛЕКТРИЧЕСКИ ВЕРИГИ

ОБЩИ ПОЛОЖЕНИЯ

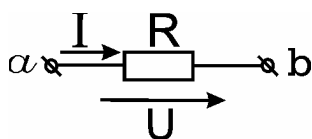
ЗАКОНИ НА ОМ И КИРХОФ

Законът на Ом за пасивен участък дава връзката между пада на напрежение U , тока I и съпротивлението R на участъка (фиг.1.0.1):

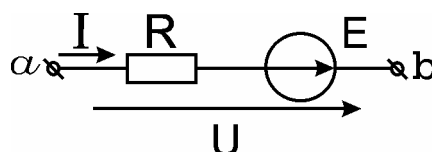
$$U = R \cdot I. \quad (1.1)$$

Законът на Ом за активен участък дава връзката между величините U , I , R и електродвижещото напрежение (е.д.н.) E , действащо в участъка (фиг.1.0.2):

$$I = (U + E) / R. \quad (1.2)$$



Фиг.1.0.1



Фиг.1.0.2

Във формули (1.1) и (1.2) $U = \varphi_a - \varphi_b$ (φ_a и φ_b са потенциалите на точките a и b). Ако посоките на E и I съвпадат, E участва в (1.2) със знак (+), а в противен случай - със знак (-).

Първият закон на Кирхоф дава връзката между токовете I_k в клоновете, свързани към даден възел:

$$\sum_{k=1}^n I_k = 0 \quad (1.3)$$

В (1.3) със знак (+) се записват токовете, излизащи от възела, а със знак (-) - влизащите токове (n е броят на клоновете, свързани към възела).

Вторият закон на Кирхоф дава връзката между е.д.н. E_k и падовете на напрежения U_k на клоновете, съставлящи затворения контур:

$$\sum_{k=1}^n E_k = \sum_{k=1}^n U_k \quad (1.4)$$

В (1.4) със знак (+) се записват онези E_k и U_k , чиято посока съвпада с условната положителна посока на обхождане на контура. В противен случай - знакът е (-). В (1.4) n е броят на клоновете, образуващи контура.

БАЛАНС НА МОЩНОСТИТЕ

Балансът на мощностите най-общо се дава с уравнението:

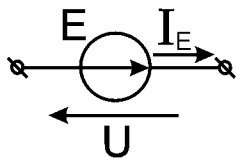
$$\sum P_{\text{изт.}} = \sum P_{\text{конс.}} \quad (1.5)$$

Уравнение (1.5) може да се запише и във вида:

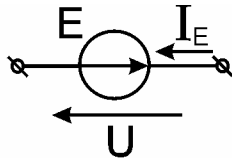
$$\sum P_E + \sum P_J = \sum R \cdot I^2. \quad (1.6)$$

В (1.6) $P_E = E \cdot I_E$ е мощността, отдавана от източника на е.д.н. E . Ако посоките на е.д.н. E и тока I_E съвпадат (фиг.1.0.3), то $P_E > 0$, а в противен случай (фиг.1.0.4) - $P_E < 0$.

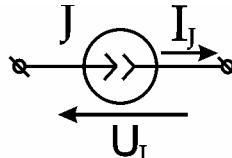
В (1.6) $P_J = U_J \cdot J$ е мощността, отдавана от източника на ток J с напрежение U_J . Ако посоките на U_J и I_J са различни (фиг.1.0.5) - $P_J > 0$, а в противен случай (фиг.1.0.6) - $P_J < 0$.



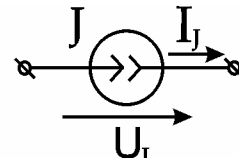
Фиг.1.0.3



Фиг.1.0.4



Фиг.1.0.5



Фиг.1.0.6

В (1.6) $\sum RI^2$ е сумарната мощност, изразходвана в консуматорите R , която е винаги положителна величина.

МЕТОДИ ЗА АНАЛИЗ НА СЛОЖНИ ЕЛЕКТРИЧЕСКИ ВЕРИГИ

Метод с използване на законите на Кирхоф

Алгоритъмът на метода е следният:

1. Определя се броят на клоновете N_K , на възлите N_B и на източниците на ток N_J .
2. Пресмята се броят на независимите уравнения по законите на Кирхоф:
 - по I закон - $N_I = N_B - 1$;
 - по II закон - $N_{II} = N_K - N_B + 1 - N_J$.
3. Номерират се възлите и се избират условни положителни посоки на клоновите токове.
4. Избират се независимите контури (броят им е равен на броя на независимите уравнения по II закон на Кирхоф N_{II}) и условните им положителни посоки на обхождане.

Забележка:

Независим контур не трябва да се затваря през клон с идеален източник на ток.

5. Записва се системата уравнения по законите на Кирхоф и се определят клоновите токове.

Метод с контурни токове

Методът се основава на II закон на Кирхоф. Броят на уравненията, съставени по този метод, съответствува на броя на уравненията N_{II} , записани по II закон на Кирхоф.

Алгоритъмът на метода е следният:

1. Определя се броят на клоновете N_K , на възлите N_B , на източниците на ток N_J и броят на независимите контури N_{II} .
2. Избират се независимите контури и условните положителни посоки на контурните токове I^k . При това се спазва изискването независимите контури да не съдържат клонове с източници на ток.
3. Избират се контурите, през които се затварят токовете J на източниците на ток. Тези контури, освен клоната със съответния източник на ток, съдържат само клонове с крайни съпротивления и за тях не се записват уравнения.
4. Записва се системата уравнения, която за верига с n независими контура има вида:

По отношение на електрическите вериги същността на принципа се състои в следното: кой да е клонов ток в дадена електрическа верига може да бъде представен като алгебрична сума от токове, предизвикани от всеки източник поотделно.

Алгоритъмът на прилагане на принципа е следният:

1. Приема се, че във веригата действа само един източник. Останалите източници на е.д.н. се дават накъсо, източниците на ток се прекъсват, като се запазват вътрешните им съпротивления, респективно проводимости.

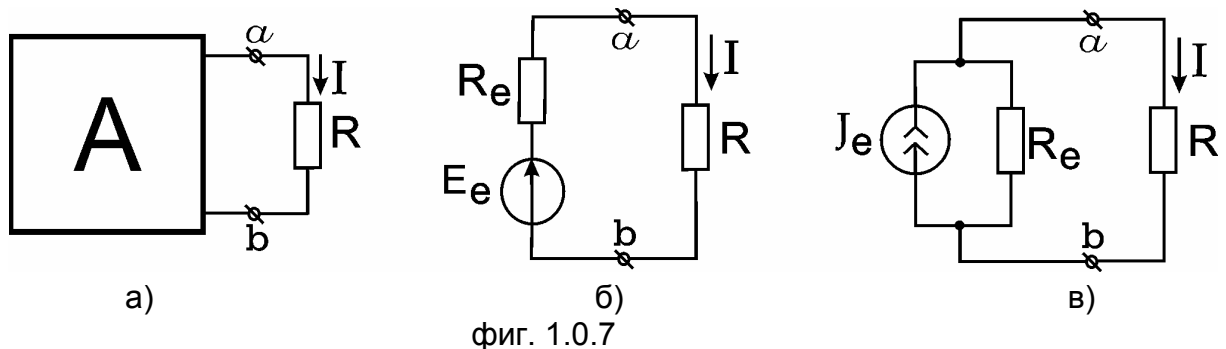
2. Изчисляват се частичните токове във веригата, предизвикани от разглеждания източник.

3. Операции 1 и 2 се прилагат толкова пъти, колкото източника съдържа веригата.

4. Изчисляват се действителните клонови токове като алгебрична сума от частичните токове. Даден частичен ток участва в сумата със знак (+), ако посоката му през клоната съвпада с тази на клоновия ток, в противен случай - със знак (-).

Теорема за активния двуполусник

Теоремата е известна като теорема на еквивалентния генератор и гласи следното: токът в даден клон на сложна електрическа верига няма да се промени, ако останалата част на веригата, разглеждана като активен двуполусник (фиг.1.0.7а) спрямо клоната, се замени с еквивалентен генератор на напрежение (теорема на Тевенен - фиг.1.0.7б) или на ток (теорема на Нортон - фиг.1.0.7в).



фиг. 1.0.7

Математическият запис на теоремата на Тевенен е :

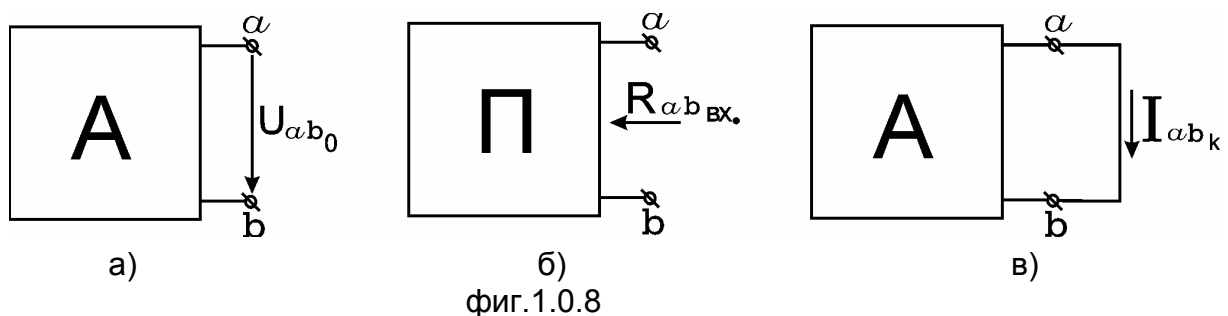
$$I = E_e / (R_e + R), \tag{1.9}$$

а на теоремата на Нортон е:

$$I = J_e \cdot R_e / (R_e + R). \tag{1.10}$$

Означенията E_e и R_e в (1.9) имат следния смисъл:

E_e е е.д.н. на еквивалентния генератор на е.д.н., което е равно на напрежението на празен ход U_{ab0} на активния двуполусник (фиг.1.0.8а).



фиг.1.0.8

R_e - вътрешното съпротивление на еквивалентния генератор на е.д.н., което е равно на входното съпротивление на пасивния двуполюсник $R_{ab_{вх}}$ (фиг.1.0.8б).

Последният се получава от активния двуполюсник при условно даване на ток на всички източници на е.д.н. и прекъсване на клоновете с източници на ток и при запазване на техните вътрешни съпротивления, респективно проводимости.

Означението J_e в (1.10) е токът на еквивалентния генератор на ток, който е равен на тока на късо съединение $I_{abк}$ на активния двуполюсник (фиг.1.0.8в).

Зад.1.1. За електрическата верига, показана на фиг.1.1, да се определят клоновите токове и напрежението U_{J1} на източника на ток J_1 . Дадено е: $J_1 = 40 \text{ mA}$; $J_2 = 10 \text{ mA}$; $R_1 = 3 \text{ k}\Omega$; $R_3 = R_6 = 4 \text{ k}\Omega$; $R_4 = 6 \text{ k}\Omega$; и $R_5 = 1 \text{ k}\Omega$.

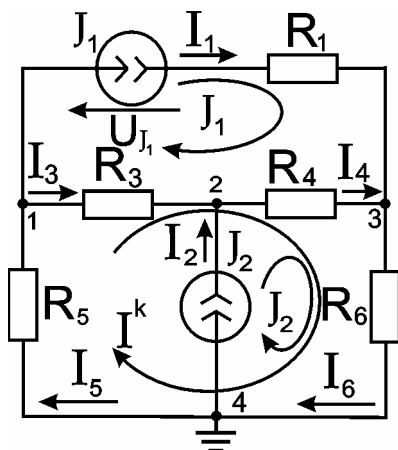
Решение:

1/ по метода с контурни токове

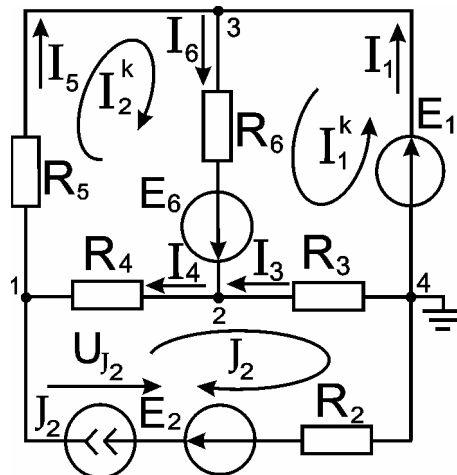
Избира се един независим контур с контурен ток I^k и се записва уравнението:
 $I^k (R_3 + R_4 + R_5 + R_6) - J_1 (R_3 + R_4) + J_2 (R_4 + R_6) = 0$.

При зададените параметри на веригата за I^k се получава: $I^k = 20 \text{ mA}$. Стойностите на клоновите токове са:

$$I_3 = I^k - J_1 = -20 \text{ mA}; I_4 = I^k - J_1 + J_2 = -10 \text{ mA}; I_5 = I^k = 20 \text{ mA}; I_6 = I^k + J_2 = 30 \text{ mA}.$$



Фиг.1.1



Фиг.1.2

2/ по метода с възлови потенциали

Приема се потенциалът $\varphi_4 = 0$ и се записва системата уравнения:

$$\begin{cases} \varphi_1 (1/R_3 + 1/R_5) - \varphi_2/R_3 = -J_1; \\ -\varphi_1/R_3 + \varphi_2 (1/R_3 + 1/R_4) - \varphi_3/R_4 = J_2; \\ -\varphi_2/R_4 + \varphi_3 (1/R_4 + 1/R_6) = J_1. \end{cases}$$

При зададените параметри на веригата за възловите потенциали се получават следните стойности: $\varphi_1 = -20 \text{ V}$; $\varphi_2 = 60 \text{ V}$ и $\varphi_3 = 120 \text{ V}$.

Клонове токове $I_3 \dots I_5$ се определят по обобщения закон на Ом:
 $I_3 = (\varphi_1 - \varphi_2)/R_3 = -20 \text{ mA}$; $I_4 = (\varphi_2 - \varphi_3)/R_4 = -10 \text{ mA}$; $I_5 = -\varphi_1/R_5 = 20 \text{ mA}$; $I_6 = \varphi_3/R_6 = 30 \text{ mA}$.

Напрежението U_{J1} на източника на ток J_1 се определя, съгласно II закон на Кирхоф, от уравнението: $-U_{J1} + I_1 \cdot R_1 - I_4 \cdot R_4 - I_3 \cdot R_3 = 0$

При получените стойности на клоновите токове за U_{J1} се намира: $U_{J1} = -20 \text{ V}$.

Зад.1.2. За веригата, показана на фиг.1.2, да се определят клоновите токове и да се провери балансът на мощностите. Дадено е: $E_1 = 25 \text{ V}$; $E_2 = 10 \text{ V}$; $E_6 = 20 \text{ V}$; $J_2 = 2 \text{ A}$; $R_2 = R_4 = 10 \text{ }\Omega$; $R_3 = 20 \text{ }\Omega$; $R_5 = 8 \text{ }\Omega$ и $R_6 = 5 \text{ }\Omega$.

Упътване:

1/ по метода с контурни токове

При избраните независими контури с контурни токове I_1^k и I_2^k системата уравнения, описваща веригата, е:

$$\begin{cases} I_1^k (R_3 + R_6) + I_2^k \cdot R_6 + J_2 \cdot R_3 = E_1 + E_6; \\ I_1^k \cdot R_6 + I_2^k \cdot (R_4 + R_5 + R_6) - J_2 \cdot R_4 = E_6. \end{cases}$$

При зададените параметри на веригата за контурните токове се получават следните стойности: $I_1^k \approx -0,15 \text{ A}$; $I_2^k \approx 1,77 \text{ A}$.

2/ по метода с възлови потенциали

Приема се потенциалът $\varphi_4 = 0$, намира се $\varphi_3 = E_1 = 25 \text{ V}$ и се записва системата уравнения:

$$\begin{cases} \varphi_1(1/R_4 + 1/R_5) - \varphi_2/R_4 - \varphi_3/R_5 = J_2; \\ -\varphi_1/R_4 + \varphi_2(1/R_3 + 1/R_4 + 1/R_6) - \varphi_3/R_6 = E_6/R_6. \end{cases}$$

Пресметнатите стойности на потенциалите са:

$$\varphi_1 \approx 39,18 \text{ V} \text{ и } \varphi_2 \approx 36,91 \text{ V}.$$

Клоновите токове $I_3 \dots I_6$ се пресмятат чрез обобщения закон на Ом, а токът I_1 чрез I закон на Кирхоф, записан за възел 3 или 4.

Получените стойности на клоновите токове са:

$$I_1 \approx -0,15 \text{ A}; I_3 \approx -1,84 \text{ A}; I_4 \approx -0,23 \text{ A}; I_5 \approx 1,77 \text{ A}; I_6 \approx 1,62 \text{ A}.$$

Уравнението на баланса на мощностите е:

$$\sum P_{\text{изт.}} = \sum P_{\text{конс.}}$$

За мощността на източниците се записва:

$$\sum P_{\text{изт.}} = E_1 \cdot I_1 + E_2 \cdot J_2 + E_6 \cdot I_6 + U_{J_2} \cdot J_2,$$

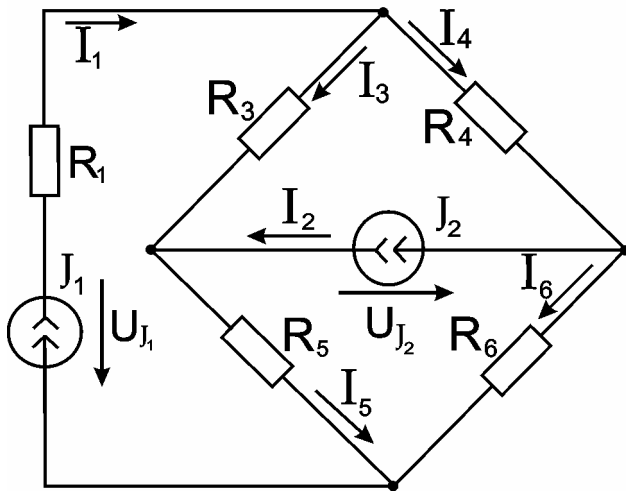
където U_{J_2} е напрежението на източника на ток, което може да бъде определено от израза:

$$U_{J_2} = -I_4 \cdot R_4 - I_3 \cdot R_3 + J_2 \cdot R_2 - E_2 \approx 49,18 \text{ V}.$$

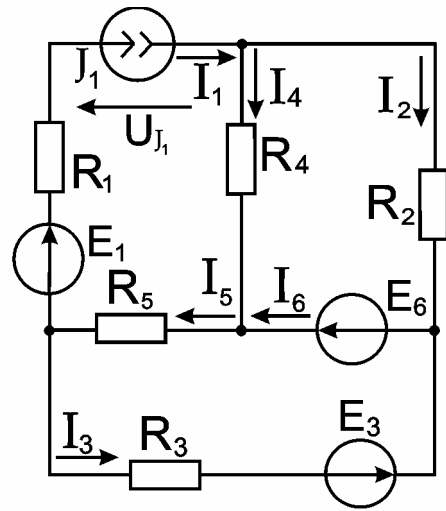
За мощността на консуматорите се намира:

$$\sum P_{\text{конс.}} = R_2 \cdot J_2^2 + R_3 \cdot I_3^2 + R_4 \cdot I_4^2 + R_5 \cdot I_5^2 + R_6 \cdot I_6^2.$$

От пресмятанията се получава:
 $\Sigma P_{\text{изт.}} = \Sigma P_{\text{конс.}} \approx 146,85 \text{ W.}$



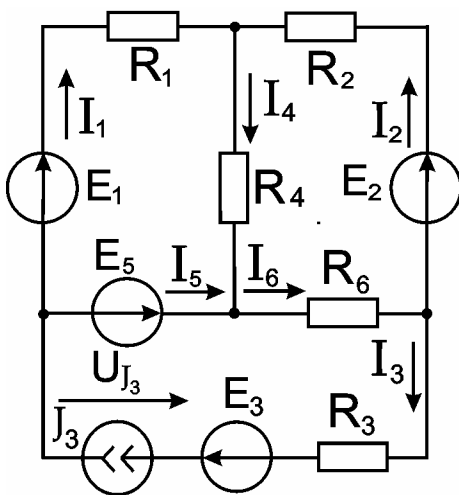
Фиг.1.3



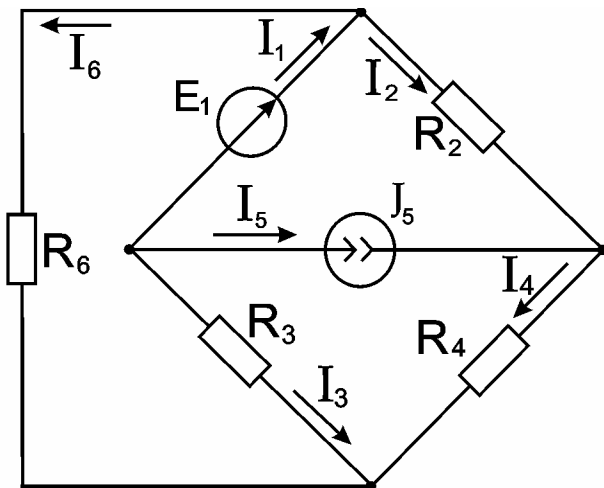
Фиг.1.4

Зад.1.3. За показаната на фиг.1.3. верига да се определят клоновите токове и да се провери балансьт на мощностите, ако $J_1 = 1 \text{ A}$; $J_2 = 2 \text{ A}$; $R_1 = R_3 = 1 \Omega$; $R_4 = 2 \Omega$; $R_5 = 3 \Omega$; $R_6 = 4 \Omega$.

Отговори: $I_3 = 0,8 \text{ A}$; $I_4 = 1,8 \text{ A}$; $I_5 = 1,2 \text{ A}$; $I_6 = -0,2 \text{ A}$; $U_{J1} = 3,8 \text{ V}$; $U_{J2} = 4,4 \text{ V}$ и
 $\Sigma P_{\text{изт.}} = \Sigma P_{\text{конс.}} = 12,6 \text{ W.}$



Фиг.1.5



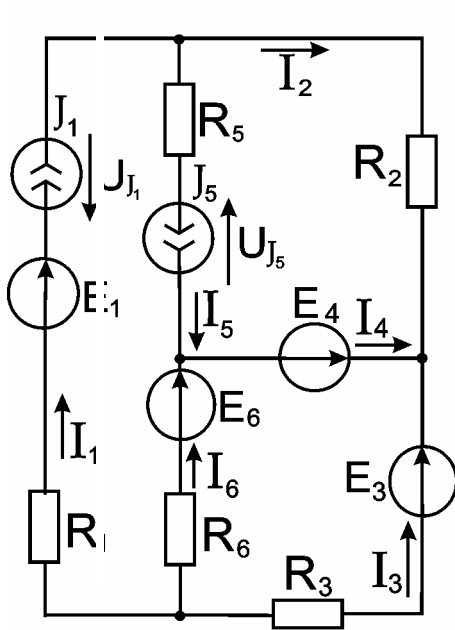
Фиг.1.6

Зад.1.4. За показаната на фиг.1.4 верига да се определят клоновите токове и да се провери балансьт на мощностите. Дадено е: $E_1 = 1 \text{ V}$; $E_3 = 3 \text{ V}$; $E_6 = 6 \text{ V}$; $J_1 = 1 \text{ A}$; $R_1 = 1 \Omega$; $R_2 = 2 \Omega$; $R_3 = 3 \Omega$; $R_4 = 4 \Omega$ и $R_5 = 5 \Omega$.

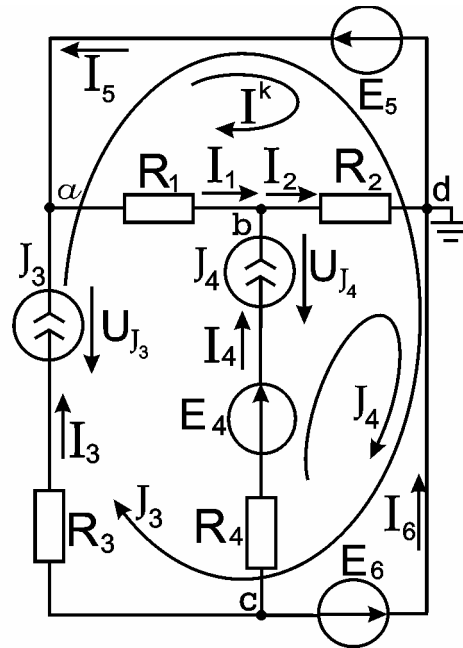
Отговори: $I_2 \approx 1,67 \text{ A}$; $I_3 = 0,5 \text{ A}$; $I_4 \approx -0,67 \text{ A}$; $I_5 = -1,5 \text{ A}$; $I_6 \approx 2,17 \text{ A}$; $U_{J1} \approx 4,83 \text{ V}$ и
 $\Sigma P_{\text{изт.}} \approx \Sigma P_{\text{конс.}} \approx 20,33 \text{ W.}$

Зад.1.5. За веригата от фиг.1.5 $E_1 = 10 \text{ V}$; $E_2 = 20 \text{ V}$; $E_3 = 30 \text{ V}$; $E_5 = 50 \text{ V}$; $J_3 = 3 \text{ A}$; $R_1 = 10 \Omega$; $R_2 = 20 \Omega$; $R_3 = 30 \Omega$; $R_4 = 40 \Omega$; $R_6 = 60 \Omega$. Да се определят клоновите токове и да се провери балансьт на мощностите.

Отговори: $I_1 = 4/11 \text{ A}$; $I_2 = 16/11 \text{ A}$; $I_4 = 12/11 \text{ A}$; $I_5 = 29/11 \text{ A}$; $I_6 = 17/11 \text{ A}$;
 $U_{J3} = 1130/11 \text{ V}$; $\sum P_{\text{изт.}} = \sum P_{\text{конс.}} = 504,54 \text{ W}$.



Фиг.1.7



Фиг.1.8

Зад.1.6. За показаната на фиг.1.6. верига да се определят клоновите токове. Дадено е: $E_1 = 100 \text{ V}$; $J_5 = 1 \text{ A}$; $R_2 = 10 \Omega$; $R_3 = 5 \Omega$; $R_4 = 15 \Omega$ и $R_6 = 20 \Omega$.

Отговори: $I_1 = 159/29 \text{ A}$; $I_2 = 61/29 \text{ A}$; $I_3 = -188/29 \text{ A}$; $I_4 = 90/29 \text{ A}$ и $I_6 = 98/29 \text{ A}$.

Зад.1.7. За показаната на фиг.1.7 верига да се определят клоновите токове и да се провери балансьт на мощностите. Дадено е: $E_1 = 10 \text{ V}$; $E_3 = 6 \text{ V}$; $E_4 = 8 \text{ V}$; $E_6 = 12 \text{ V}$; $J_1 = 1 \text{ A}$; $J_5 = 2 \text{ A}$; $R_1 = 1 \Omega$; $R_2 = 2 \Omega$; $R_3 = 3 \Omega$; $R_5 = 5 \Omega$ и $R_6 = 6 \Omega$.

Отговори: $I_2 = -1 \text{ A}$; $I_3 = -20/9 \text{ A}$; $I_4 = 29/9 \text{ A}$; $I_6 = 11/9 \text{ A}$; $U_{J1} = 5/3 \text{ V}$; $U_{J5} = 4 \text{ V}$ и $\sum P_{\text{изт.}} = \sum P_{\text{конс.}} = 421/9 \text{ W}$.

Зад.1.8. За показаната на фиг.1.8 верига да се определят клоновите токове и да се провери балансьт на мощностите. Дадено е: $E_4 = 2 \text{ V}$; $E_5 = 5 \text{ V}$; $E_6 = 10 \text{ V}$; $J_3 = 3 \text{ A}$; $J_4 = 1 \text{ A}$; $R_1 = 1 \Omega$; $R_2 = 2 \Omega$; $R_3 = 3 \Omega$ и $R_4 = 4 \Omega$.

Упътване:

1/ по метода с контурни токове

Избира се независим контур с контурен ток I^k , за който се получава: $I^k = -1$ A.

2/ по метода с възлови потенциали

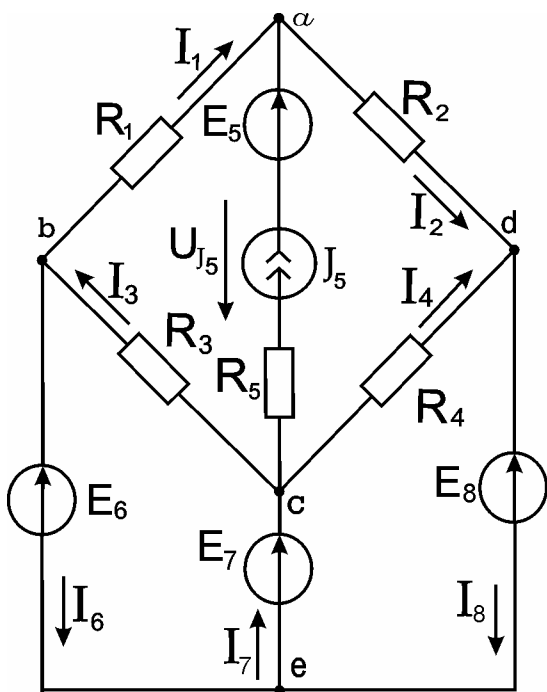
Приема се потенциалът $\varphi_d = 0$ и се намират $\varphi_a = E_5$ и $\varphi_c = -E_6$.

За потенциала φ_b се получава: $\varphi_b = 4$ V

Пресметнатите стойности на търсените величини са:

$$I_1 = 1 \text{ A}; I_2 = 2 \text{ A}; I_3 = -2 \text{ A}; I_6 = -4 \text{ A}; U_{J3} = 24 \text{ V}; U_{J4} = 16 \text{ V} \text{ и } \sum P_{\text{изт.}} = \sum P_{\text{конс.}} = 40 \text{ W}.$$

Зад.1.9. За веригата, показана на фиг.1.9, да се определят клоновите токове по метода с възлови потенциали и да се провери балансът на мощностите. Дадено е: $E_5 = 5$ V; $E_6 = 3$ V; $E_7 = 2$ V; $E_8 = 4$ V; $J_5 = 1$ A; $R_1 = 1$ Ω ; $R_2 = 2$ Ω ; $R_3 = 3$ Ω ; $R_4 = 4$ Ω ; $R_5 = 5$ Ω .



Фиг.1.9

Решение:

1/ по принципа на наслагване

а) определяне на частичните токове $I'_1 \dots I'_6$ (фиг.1.10) от действието на източника E_1 .

За веригата от фиг.1.10 се намира:

$$R'_e = R_3 + R_6(R_2 + R_4) / (R_2 + R_4 + R_6) = 145/9 \Omega.$$

За частичните токове се получава:

$$I'_1 = I'_3 = E_1/R'_e = 180/29 \text{ A}; I'_2 = I'_4 = I'_1 \cdot R_6 / (R_2 + R_4 + R_6) = 80/29 \text{ A} \text{ и } I'_6 = I'_1 - I'_2 = 100/29 \text{ A}.$$

б) определяне на частичните токове $I''_1 \dots I''_6$ (фиг.1.11) от действието на източника J_5

Упътване:

Приема се потенциалът $\varphi_e = 0$ и се намират потенциалите: $\varphi_b = E_6$; $\varphi_c = E_7$ и $\varphi_d = -E_8$. За потенциала φ_a се получава: $\varphi_a = 4/3$ V.

Пресметнатите стойности на търсените величини са: $I_1 = 5/3$ A; $I_2 = 8/3$ A; $I_3 = -1/3$ A; $I_4 = 3/2$ A; $I_6 = -2$ A; $I_7 = 13/6$ A; $I_8 = 25/6$ A; $U_{J5} = -2/3$ V и $\sum P_{\text{изт.}} = \sum P_{\text{конс.}} = 94/3$ W.

Зад.1.10. За показаната на фиг.1.6 верига да се определят клоновите токове по принципа на наслагване. За същата верига да се определят токът I_4 по теоремата на Нортон и токът I_6 по теоремата на Тевенен.

За веригата от фиг.1.11 се приема: $\varphi_a = \varphi_b = 0 \text{ V}$ и се намират $\varphi_c = 570/87 \text{ V}$ и $\varphi_d = 120/87 \text{ V}$.

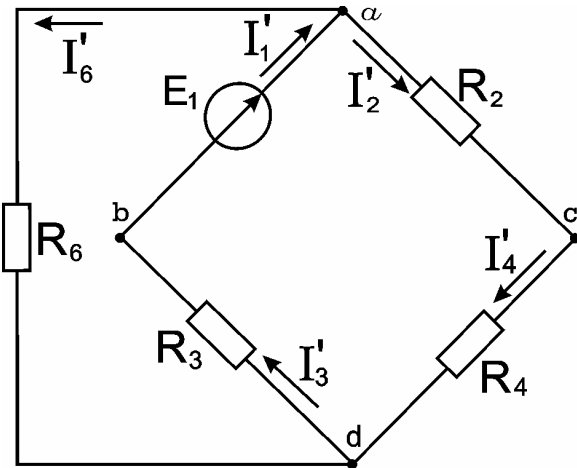
Частичните токове I''_2, I''_3, I''_4 и I''_6 се определят чрез обобщения закон на Ом, а токът I''_1 – чрез I закон на Кирхоф, записан за възел a или b. Стойностите им са: $I''_1 = 63/87 \text{ A}$; $I''_2 = -57/87 \text{ A}$; $I''_3 = -24/87 \text{ A}$; $I''_4 = 30/87 \text{ A}$ и $I''_6 = -6/87 \text{ A}$.

За стойностите на действителните клонови токове, като се използват схемите от фиг.1.6, 1.10 и 1.11, се записва:

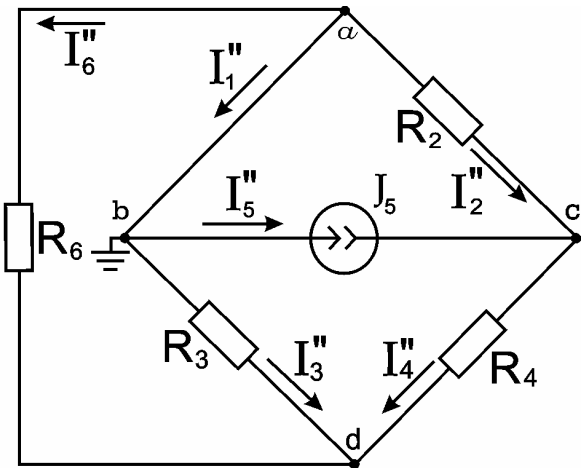
$$I_1 = I''_1 - I''_6; I_2 = I''_2 + I''_6; I_3 = -I''_3 + I''_6; I_4 = I''_4 + I''_6 \text{ и } I_6 = I''_6 + I''_6.$$

2/ по теоремата на Нортон:

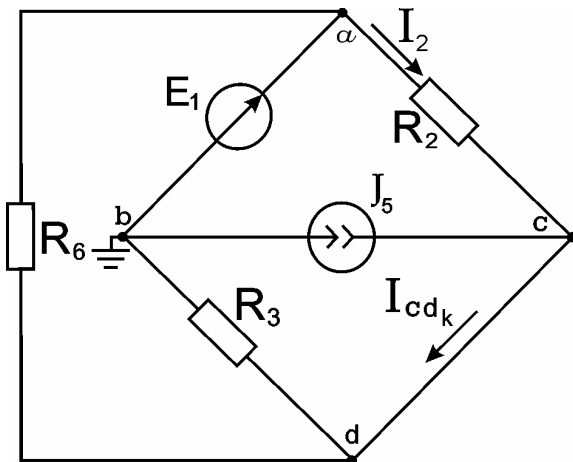
а) определяне на тока J_e на еквивалентния източник на ток (фиг.1.14)



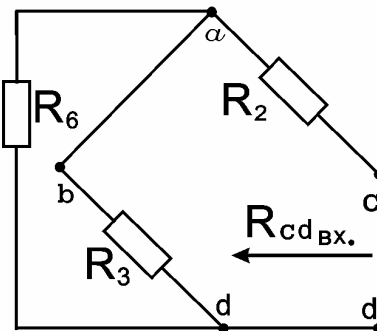
Фиг.1.10



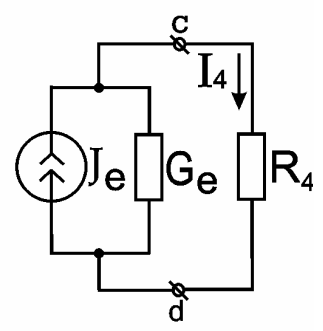
Фиг.1.11



Фиг.1.12



Фиг.1.13



Фиг.1.14

За веригата от фиг.1.12 се определя токът I_{cdk} . Например, по метода с възлови потенциали за потенциала φ_c се записва уравнението:

$$\varphi_c (1/R_2 + 1/R_3 + 1/R_6) - \varphi_a (1/R_2 + 1/R_6) = J_5.$$

От пресмятането се получава:

$$\varphi_c = 320/7 \text{ V}.$$

Стойността на тока I_{cd_k} е:

$$I_{cd_k} = J_e = 45/7 \text{ A.}$$

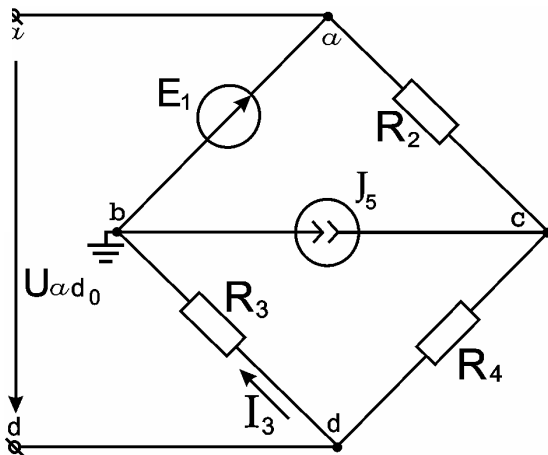
б/ определяне проводимостта G_e на еквивалентния източник на ток (фиг.1.14)

За веригата от фиг.1.13 за $R_{cd_{BX}}$ се записва:

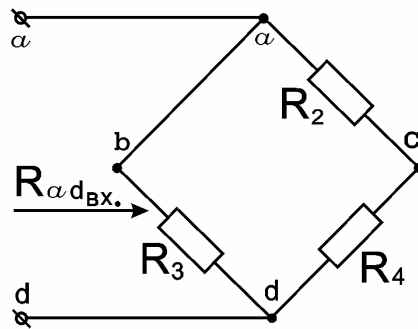
$$R_{cd_{BX}} = R_2 + R_3 \cdot R_6 / (R_3 + R_6).$$

От пресмятането се получава:

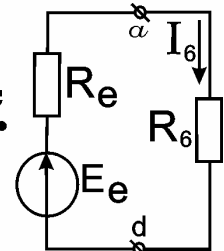
$$G_e = 1/R_{cd_{BX}} = 1/14 \text{ S.}$$



Фиг.1.15



Фиг.1.16



Фиг.1.17

в) определяне на тока I_4

За веригата от фиг.1.14 за тока I_4 се записва: $I_4 = J_e / R_4 (1/R_4 + G_e) = 3,1 \text{ A.}$

3. По теорема на Тевенен

а) определяне на е.д.н E_e на еквивалентния източник на напрежение (фиг.1.17)

За веригата от фиг.1.15 се определя напрежението U_{ad_0} . Например, по метода с възлови потенциали, при въвеждане на псевдовъзлите а и d, се записва системата уравнения:

$$\begin{cases} \varphi_c (1/R_2 + 1/R_4) - \varphi_d / R_4 - \varphi_a / R_2 = J_5; \\ -\varphi_c / R_4 + \varphi_d (1/R_3 + 1/R_4) = 0. \end{cases}$$

От пресмятането се получава: $\varphi_d = 55/3 \text{ V}$; $E_e = U_{ad_0} = \varphi_a - \varphi_d = 245/3 \text{ V.}$

б) определяне на съпротивлението R_e на еквивалентния източник на напрежение (фиг.1.17)

За веригата от фиг.1.16 се записва:

$$R_e = R_{ad_{BX}} = R_3(R_2 + R_4) / (R_2 + R_3 + R_4) = 25/6 \Omega.$$

в/ определяне на тока I_6

За веригата от фиг.1.17 за тока I_6 се записва:

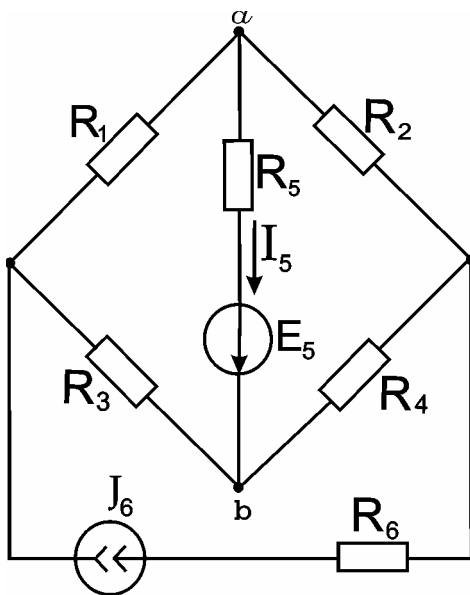
$$I_6 = E_e / (R_e + R_6) = 98/29 \text{ A.}$$

Зад.1.11 За веригата, показана на фиг.1.18, да се определи токът I_5 по теоремата на Тевенен. Дадено е: $E_5 = 1 \text{ V}$; $J_6 = 1 \text{ A}$; $R_1 = 1 \Omega$; $R_2 = 2 \Omega$; $R_3 = 3 \Omega$; $R_4 = 4 \Omega$; $R_5 = 0,6 \Omega$ и $R_6 = 3 \Omega$.

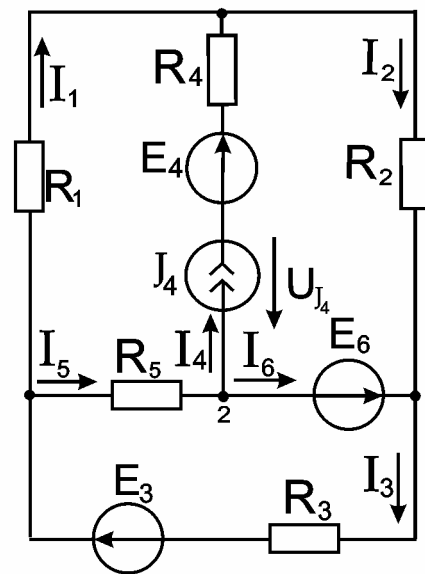
Отговори: $E_e = 0,2 \text{ V}$; $R_e = 2,4 \Omega$; $I_5 = 0,4 \text{ A}$.

Зад.1.12. За веригата, показана на фиг.1.19, да се определят клоновите токове и да се провери балансът на мощностите. Дадено е: $E_3 = 10 \text{ V}$; $E_4 = 5 \text{ V}$; $E_6 = 20 \text{ V}$; $J_4 = 2 \text{ A}$; $R_1 = 1 \Omega$; $R_2 = 2 \Omega$; $R_3 = 3 \Omega$; $R_4 = 4 \Omega$ и $R_5 = 5 \Omega$.

Отговори: $I_1 = -14/13 \text{ A}$; $I_2 = 12/13 \text{ A}$; $I_3 = 40/13 \text{ A}$; $I_5 = 54/13 \text{ A}$; $I_6 = 28/13 \text{ A}$; $U_{J_4} = 323/13 \text{ V}$ и $\sum P_{\text{изт.}} \approx \sum P_{\text{конс.}} \approx 133,53 \text{ W}$.



Фиг.1.18



Фиг.1.19

2. ПОСТОЯННОТОКОВИ РЕЖИМИ В МАГНИТНИ ВЕРИГИ

ОБЩИ ПОЛОЖЕНИЯ

ЗАКОНИ НА ОМ И КИРХОФ

Законът на Ом за пасивен участък дава връзката между магнитното напрежение U_μ , магнитния поток Φ и магнитното съпротивление R_μ на участъка:

$$U_\mu = \Phi \cdot R_\mu. \quad (2.1)$$

Законът на Ом за активен участък дава връзката между U_μ , Φ , R_μ и магнито-възбудителното напрежение F , действащо в участъка:

$$\Phi = (U_\mu + F)/R_\mu. \quad (2.2)$$

Първият закон на Кирхоф дава връзката между магнитните потоци Φ_k на клоновете, свързани към даден възел:

$$\sum_{k=1}^n \Phi_k = 0. \quad (2.3)$$

Вторият закон на Кирхоф дава връзката между магнито-възбудителните напрежения F_k и магнитните напрежения $U_{\mu k}$ на клоновете, образуващи затворен контур:

$$\sum_{k=1}^n F_k = \sum_{k=1}^n U_{\mu k}. \quad (2.4)$$

Забележки:

1. Между величините, характеризиращи електрическите и магнитните вериги, съществува аналогия, която се дава с табл.2.1.

Таблица 2.1

Електрич. вериги	E, V	U, V	I, A	R, Ω	G, S
Магнитни вериги	F, A	U_μ , A	Φ , Wb	R_μ , H^{-1}	G_μ , H

Тази аналогия позволява за магнитните вериги да се чертаят заместващи електрически схеми. Тя се отнася и за методите за пресмятане на магнитните вериги и начините за съставяне на уравненията.

2. При определяне на магнитното напрежение U_μ на даден участък, освен формула (2.1), може да се използва и изразът:

$$U_\mu = H \cdot l, \quad (2.5)$$

където H е интензитетът на магнитното поле, а l - дължината на средната магнитна линия.

Зависимостта (2.5) е целесъобразно да се използва, когато магнитната проницаемост $\mu_r \neq \text{const}$.

3. Магнитовъзбудителното напрежение F може да се определи чрез намагнитващия ток I и броя на навивките w на възбудителната намотка по формулата:

$$F = w \cdot I. \quad (2.6)$$

Посоката на магнитовъзбудителното напрежение F е свързана с посоката на тока I по правилото на десния винт.

ОСНОВНИ ЗАДАЧИ

При пресмятане на магнитните вериги обикновено са зададени конфигурацията на веригата (форма, размери на участъците ѝ, местоположение и брой на навивките на възбудителните намотки) и магнитните свойства на материалите (магнитна проницаемост или крива на намагнитване $B = B(H)$).

Поради разнообразието на магнитните вериги (обикновено те са нелинейни вериги, а при строго разглеждане, т.е. при отчитане потоците на разсейване, са и вериги с разпределени параметри), то за разлика от електрическите вериги няма точни алгоритми за пресмятането им. Ето защо всяка верига се анализира конкретно.

При линейни магнитни вериги ($\mu_r = \text{const}$) са приложими всички методи за анализ на линейни електрически вериги. Изключение прави методът на еквивалентния генератор, тъй като при магнитните вериги не се дефинират режими на празен ход и късо съединение.

При анализа на магнитните вериги се разглеждат два типа задачи:

- права задача - определяне на магнитовъзбудителните напрежения при зададени магнитни потоци. При решаването ѝ директно се използват основните закони;

- обратна задача - определяне на магнитните потоци при зададени магнитовъзбудителни напрежения. В случай, че $\mu_r \neq \text{const}$, тази задача няма директно решение. Тогава се налага използването на приблизителни методи, например неколкостепенно решаване на правата задача, въз основа на което се намира спомагателната зависимост $\Phi = \Phi(F)$.

Зад.2.1. Върху стоманен магнитопровод с $\mu_r = 500$ (фиг.2.1а.) е поставена намотка с $w = 100$ навивки, през които преминава ток $I = 5$ А. Да се определят магнитните индукции в отделните участъци на веригата, като се приеме, че средните индукционни линии се състоят от праволинейни отрезки.

Решение:

Еквивалентната електрическа схема е дадена на фиг.2.1б. Магнитните съпротивления са:

$$R_{\mu 1} = R_{\mu 3} = l_1 / (\mu_0 \mu_r S_1) = 110 \cdot 10^3 / (4 \cdot \pi \cdot 10^{-7} \cdot 500 \cdot 900 \cdot 10^{-6}) = 1,946 \cdot 10^5 \text{ H}^{-1};$$

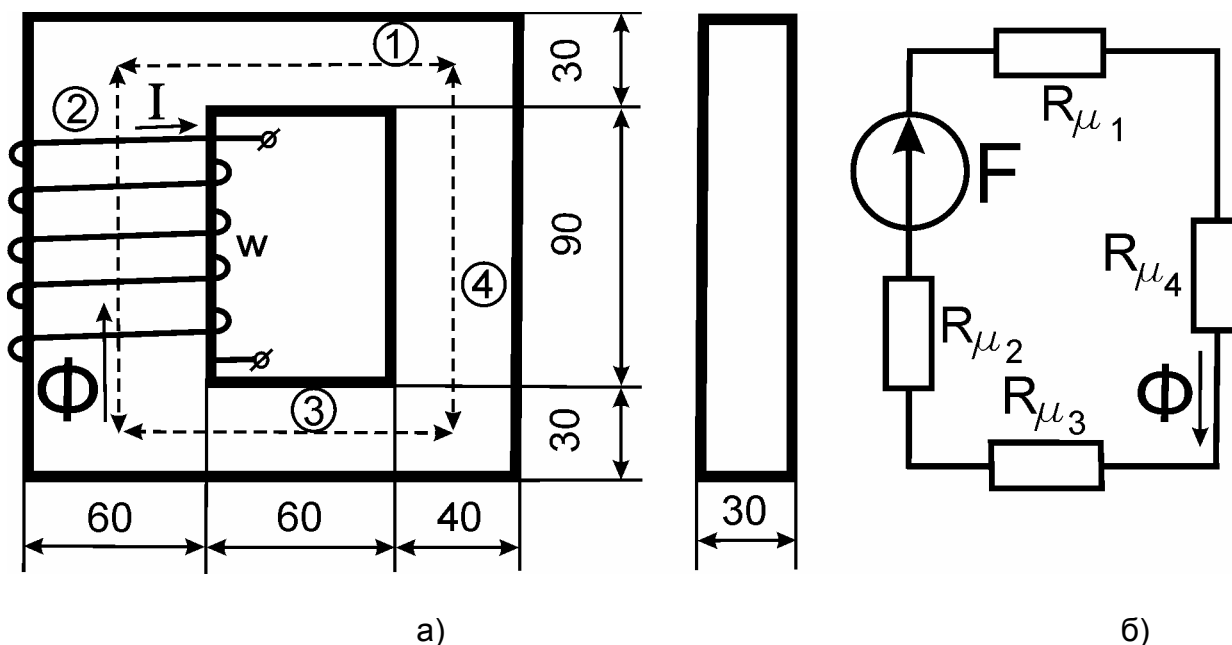
$$R_{\mu 2} = l_2 / (\mu_0 \mu_r S_2) = 1,592 \cdot 10^5 \text{ H}^{-1}; \quad R_{\mu 4} = l_4 / (\mu_0 \mu_r S_4) = 1,06 \cdot 10^5 \text{ H}^{-1}.$$

Посоката на магнитовъзбудителното напрежение F се определя с правилото на десния винт, а стойността му - от израза: $F = w \cdot I = 500 \text{ A}$. Магнитният поток Φ се пресмята по закона на Ом за едноконтурна магнитна верига:

$$\Phi = F / R_{\mu e}, \text{ където } R_{\mu e} = R_{\mu 1} + R_{\mu 2} + R_{\mu 3} + R_{\mu 4} = 6,544 \cdot 10^5 \text{ H}^{-1}.$$

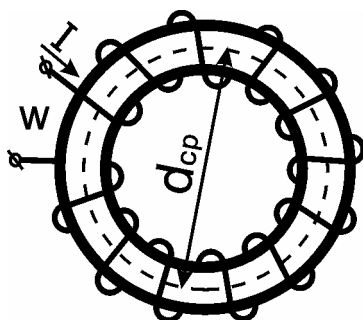
Търсените магнитни индукции са равни на:

$$B_1 = B_3 = \Phi / S_1 = 0,849 \text{ T}; \quad B_2 = \Phi / S_2 = 0,637 \text{ T}; \quad B_4 = \Phi / S_4 = 0,424 \text{ T}.$$



фиг.2.1

Зад.2.2. Върху тороид от стомана равномерно е навита намотка с брой на навивките $w = 300$ (фиг.2.2). При ток $I = 0,2 \text{ A}$ магнитната индукция вътре в намотката има същата стойност, както и при ток $I = 200 \text{ A}$, но без стоманен магнитопровод. Средният диаметър на тороида е $d_{cp} = 239 \text{ mm}$. Да се определи магнитната проникваемост на тороида.



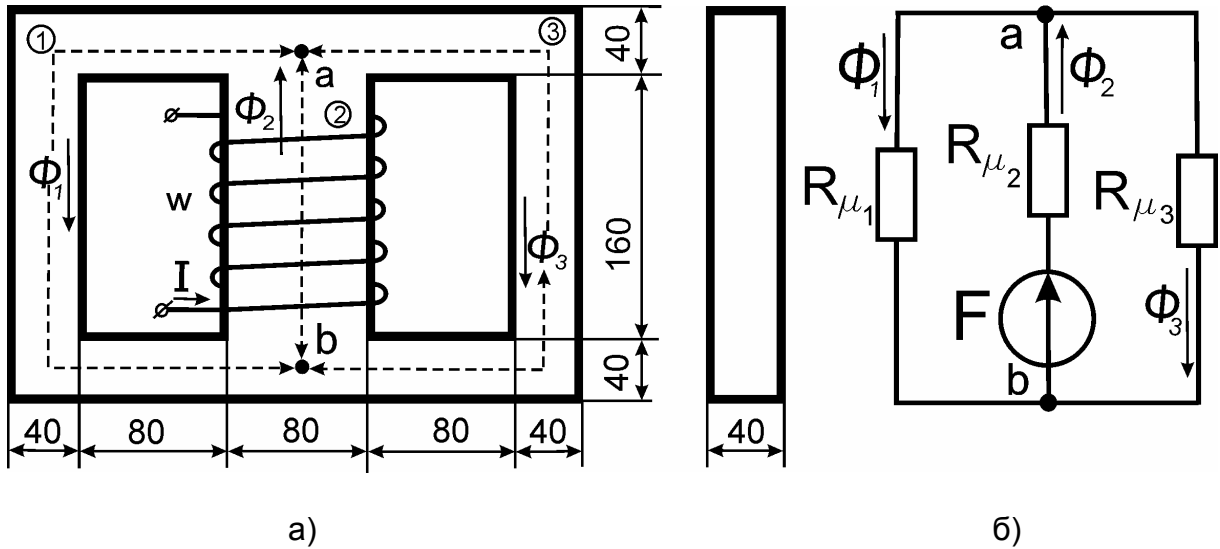
Фиг.2.2

Упътване:

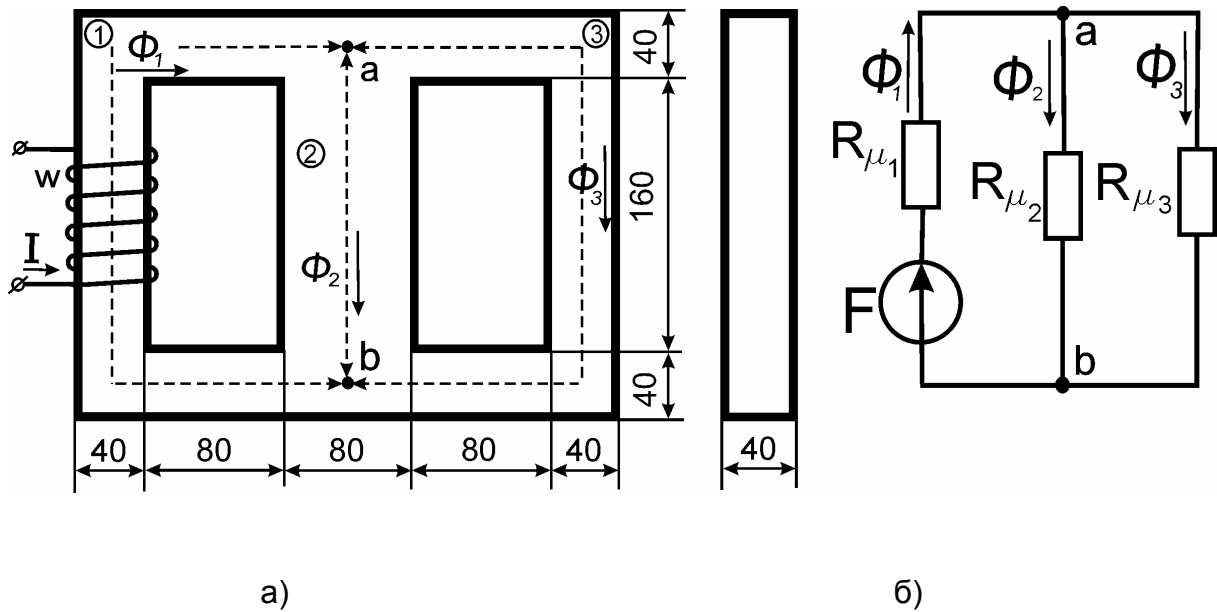
Използува се законът за пълния ток.

Отговор: $\mu_r = 1000$.

Зад.2.3. Върху магнитопровод с $\mu_r = 600$, показан на фиг.2.3, е поставена намотка с $w = 300$ навивки, през които преминава ток $I = 2$ А. Да се определят магнитните потоци и магнитните индукции в различните участъци на магнитопровода.



Фиг.2.3



Фиг.2.4

Решение:

Еквивалентният магнитен поток Φ_2 се определя от закона на Ом за едно-контурна магнитна верига: $\Phi_2 = F/R_{\mu e}$, където $R_{\mu e} = R_{\mu 2} + R_{\mu 1} \cdot R_{\mu 3} / (R_{\mu 1} + R_{\mu 3})$. Получава се $\Phi_2 = 2,12 \cdot 10^{-3}$ Wb. Магнитните потоци Φ_1 и Φ_3 са равни и се определят от I закон на Кирхоф за магнитните вериги: $\Phi_2 = \Phi_1 + \Phi_3$, откъдето се получава:

$$\Phi_1 = \Phi_3 = 1,06 \cdot 10^{-3} \text{ Wb.}$$

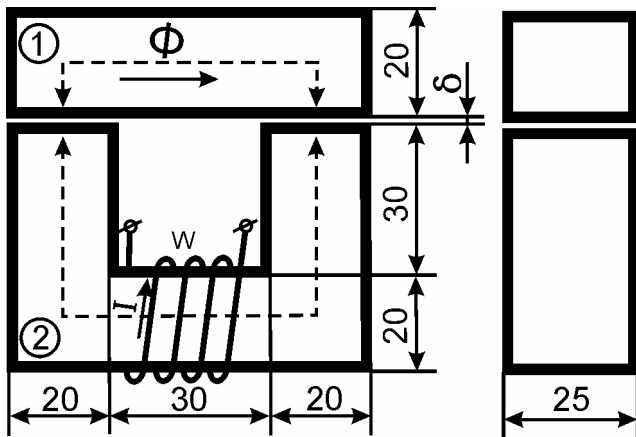
Търсените магнитни индукции са равни на:

$$B_1 = B_3 = \Phi_1/S_1 = 0,66 \text{ Т}, B_2 = \Phi_2/S_2 = 0,66 \text{ Т}.$$

Зад.2.4. Даден е магнитопровод с форма и размери, показани на фиг.2.4а. Известно е, че $\mu_r = 600$, $w = 200$ навивки, а токът $I = 2,5$ А. Да се определят магнитните потоци в отделните участъци на магнитопровода.

Упътване: Еквивалентната електрическа схема е дадена на фиг.2.4б.

Отговори: $\Phi_1 = 1,07 \cdot 10^{-3} \text{ Wb}$, $\Phi_2 = 0,886 \cdot 10^{-3} \text{ Wb}$, $\Phi_3 = 0,184 \cdot 10^{-3} \text{ Wb}$.

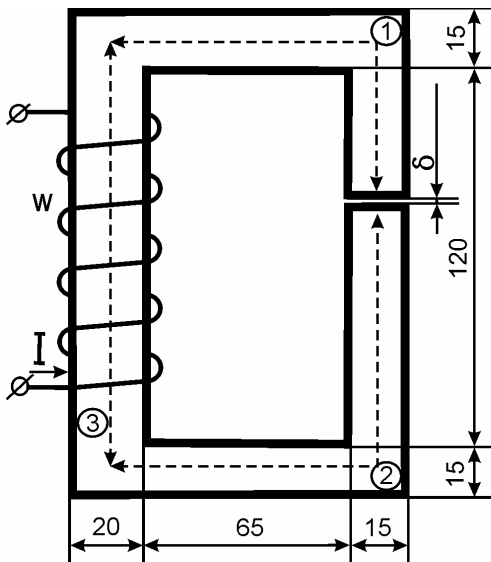


Фиг.2.5

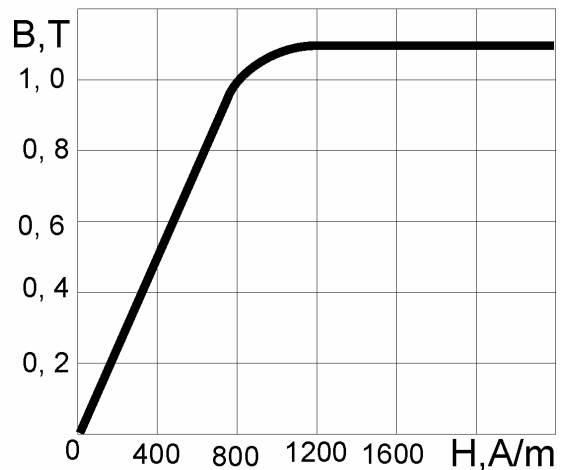
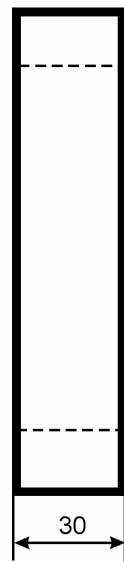
Зад.2.5. Върху магнитопровод, размерите на който са дадени на фиг.2.5, е навита намотка с брой на навивките $w = 100$, през която преминава ток $I = 2$ А. Да се определи магнитната индукция във въздушната междина, считайки нейното сечение равно на сечението на магнитопровода, ако $\mu_r = 500$; $\delta = 1 \text{ mm}$.

Отговор: $B_\delta = 0,105 \text{ Т}$.

Зад.2.6 На фиг.2.6а са показани формата и размерите на магнитна верига с въздушна междина δ . Намотката има $w = 500$ навивки. Да се определи при какъв ток I магнитната индукция във въздушната междина ще бъде $B_\delta = 1 \text{ Т}$, ако $\delta = 1 \text{ mm}$.



а)



б)

Фиг.2.6

Решение:

Тъй като сечението на въздушната междина S_δ е равно на сечението S_1 и на сечението S_2 , то магнитният поток Φ се определя от:

$$\Phi = B_{\delta} \cdot S_{\delta} = B_{\delta} \cdot S_1 = 4,5 \cdot 10^{-4} \text{ Wb.}$$

По условие $B_1 = B_2 = B_{\delta} = 1 \text{ T}$, а $B_3 = \Phi/S_3 = 0,75 \text{ T}$. От кривата на намагнитване (фиг.2.6б) за дадените стойности на магнитните индукции се отчитат и съответните стойности на интензитета на магнитното поле:

$$H_1 = 800 \text{ A/m, } H_2 = 800 \text{ A/m и } H_3 = 600 \text{ A/m.}$$

Интензитетът на магнитното поле във въздушната междина се изчислява:

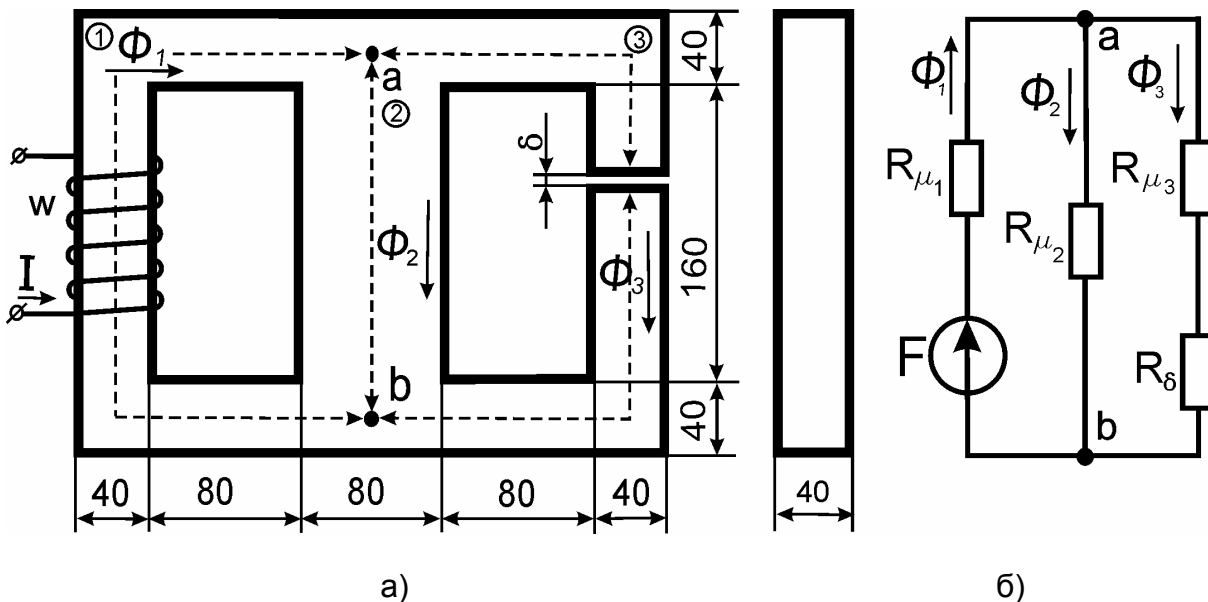
$$H_{\delta} = B_{\delta}/\mu_0 = 796 \cdot 10^3 \text{ A/m.}$$

Търсеният ток I се определя по закона за пълния ток:

$$I \cdot w = H_1 \cdot l_1 + H_2 \cdot l_2 + H_3 \cdot l_3 + H_{\delta} \cdot \delta = 1035,2 \text{ A.}$$

$$\text{Следователно: } I = 2,23 \text{ A.}$$

Зад.2.7. Даден е стоманен магнитопровод с $\mu_r = 600$ и форма и размери, показани на фиг.2.7а. Да се определят магнитовъзбудителното напрежение F и дължината на въздушната междина δ , ако са известни магнитните индукции $B_1 = 0,77 \text{ T}$ и $B_2 = 0,36 \text{ T}$.



Фиг.2.7

Решение:

Еквивалентната електрическа схема е показана на фиг.2.7б, където:

$$R_{\mu_1} = l_1/(\mu_0\mu_r S_1) = 39,8 \cdot 10^4 \text{ H}^{-1};$$

$$R_{\mu_2} = l_2/(\mu_0\mu_r S_2) = 8,29 \cdot 10^4 \text{ H}^{-1};$$

$$R_{\mu_3} = (l_3 - \delta)/(\mu_0\mu_r S_3);$$

$$R_{\delta} = \delta/\mu_0 S_3, \quad \Phi_1 = B_1 S_1 = 12,32 \cdot 10^{-4} \text{ Wb};$$

$$\Phi_2 = B_2 S_2 = 11,52 \cdot 10^{-4} \text{ Wb.}$$

Φ_3 се определя от първи закон на Кирхоф за магнитните вериги:

$$\Phi_3 = \Phi_1 - \Phi_2 = 0,8 \cdot 10^{-4} \text{ Wb.}$$

Магнитовъзбудителното напрежение F се определя от II закон на Кирхоф за магнитните вериги:

$$F = \Phi_1 R_{\mu_1} + \Phi_2 R_{\mu_2} = 585,84 \text{ A.}$$

От закона на Ом за магнитните вериги се определя $U_{\mu_{ab}}$:

$$U_{\mu_{ab}} = \Phi_2 R_{\mu_2} = \Phi_3 (R_{\mu_3} + R_{\delta}),$$

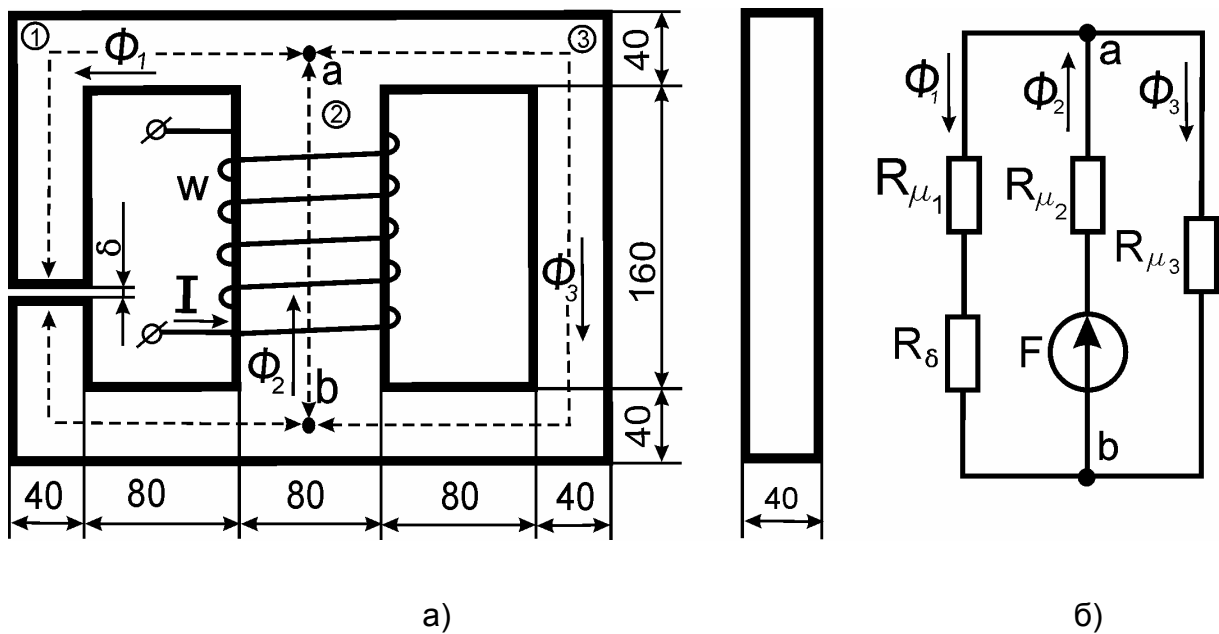
откъдето се изразява дължината на въздушната междина:

$$\delta = ((\Phi_2/\Phi_3) \mu_0 \mu_r R_{\mu_2} \cdot S_3 - l_3)/(\mu_r - 1) = 1,6 \cdot 10^{-3} \text{ m.}$$

Зад.2.8. За показания магнитопровод (фиг.2.8а) $\mu_r = 600$, а $w = 200$ навивки, като $B_1 = B_3/3 = 0,2 \text{ T}$. Да се определи магнитовъзбудителното напрежение F и дължината на въздушната междина δ .

Упътване: Еквивалентната електрическа схема е показана на фиг.2.8б.

Отговори: $F = 489 \text{ A}$; $\delta = 1,6 \cdot 10^{-3} \text{ m}$.



Фиг.2.8

3. УСТАНОВЕНИ СИНУСОИДАЛНИ ПРОЦЕСИ В ЛИНЕЙНИ ЕЛЕКТРИЧЕСКИ ВЕРИГИ

ОБЩИ ПОЛОЖЕНИЯ

Ако в дадена линейна електрическа верига действуват източници на синусоидално е.д.н $e(t)$ или ток $J(t)$ с един и същи период T , то във веригата се установяват синусоидални токове $i(t)$ и напрежения $u(t)$ със същия период T . Синусоидалната величина $a(t)$ се записва по следния начин:

$$a(t) = A_m \sin(\omega t + \psi_a), \quad (3.1)$$

където: $a(t)$ е моментната стойност на величината;

A_m - максималната (амплитудната) ѝ стойност;

$\omega t + \psi_a$ - фазата ѝ;

ψ_a - началната ѝ Фаза;

ω - ъгловата ѝ честота.

Ъгловата честота ω е свързана с периода T и честотата f по формулата:

$$\omega = 2\pi/T = 2\pi f. \quad (3.2)$$

Всяка синусоидална величина, освен с моментна a и амплитудна A_m стойности, се характеризира още и с ефективна стойност A (средноквадратична стойност за период) и средна стойност A_{av} за полупериод. Стойностите A и A_{av} се свързват със стойността A_m чрез зависимостите:

$$A = A_m/\sqrt{2} = 0,707; \quad (3.3)$$

$$A_{av} = \frac{2}{\pi} A_m = 0,637 A_m. \quad (3.4)$$

Основните закони се записват по следния начин:

I закон на Кирхоф:

$$\sum_{k=1}^n i_k(t) = 0; \quad (3.5)$$

II закон на Кирхоф:

$$\sum_{k=1}^n e_k(t) = \sum_{k=1}^n u_k(t). \quad (3.6)$$

В случай на последователна R, L, C - верига напрежението $u(t)$ и токът $i(t)$ са свързани с уравнението:

$$u(t) = Ri + L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int_0^t i dt + u_c(0). \quad (3.7)$$

При синусоидално напрежение $u(t) = U_m \sin(\omega t + \psi_u)$ за тока се записва:

$$i(t) = I_m \sin(\omega t + \psi_i), \quad (3.8)$$

където $I_m = U_m/z$, а $\psi_i = \psi_u - \varphi$.

Величината z се нарича пълно съпротивление на веригата и се определя от израза:

$$z = \sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2} = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} = \sqrt{R^2 + X^2}. \quad (3.9)$$

Величината φ се нарича фазова разлика между напрежението и тока и се определя от израза:

$$\varphi = \arctg \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R} = \arctg \frac{X_L - X_C}{R} = \arctg \frac{X}{R}. \quad (3.10)$$

В случай на паралелна G, L, C - верига връзката между напрежението $u(t)$ и тока $i(t)$ се дава с уравнението:

$$i(t) = Gu + \frac{1}{L} \int_0^t u dt + i_L(0) + C \frac{du}{dt}. \quad (3.11)$$

При синусоидален ток $i(t) = I_m \sin(\omega t + \psi_i)$, за напрежението се записва:

$$u(t) = U_m \sin(\omega t + \psi_u), \quad (3.12)$$

където $U_m = I_m / y$, а $\psi_u = \psi_i + \varphi$.

Величината y се нарича пълна проводимост на веригата и се определя от израза:

$$y = \sqrt{G^2 + \left(\frac{1}{\omega L} - \omega C\right)^2} = \sqrt{G^2 + (B_L - B_C)^2} = \sqrt{G^2 + B^2}. \quad (3.13)$$

Фазовата разлика в случая се дава с формулата:

$$\varphi = \arctg \frac{\frac{1}{\omega L} - \omega C}{G} = \arctg \frac{B_L - B_C}{G} = \arctg \frac{B}{G}. \quad (3.14)$$

Анализът на установените синусоидални процеси в линейни електрически вериги се свежда до сумиране на синусоидални величини с еднаква ъглова честота ω , при което се получава също синусоидална величина със същата честота ω .

При сумиране на две синусоидални величини $a_1 = A_{m_1} \sin(\omega t + \psi_{a_1})$ и $a_2 = A_{m_2} \sin(\omega t + \psi_{a_2})$ се получава синусоидална величина $a = A_m \sin(\omega t + \psi_a)$, чиято амплитуда A_m и начална фаза ψ_a се определят по формулите:

$$A_m = \sqrt{A_{m_1}^2 + A_{m_2}^2 - 2A_{m_1}A_{m_2} \cos(\psi_{a_1} - \psi_{a_2})}; \quad (3.15)$$

$$\psi_a = \arctg \frac{A_{m_1} \sin \psi_{a_1} + A_{m_2} \sin \psi_{a_2}}{A_{m_1} \cos \psi_{a_1} + A_{m_2} \cos \psi_{a_2}}. \quad (3.16)$$

КОМПЛЕКСЕН МЕТОД

Комплексният (символичният) метод позволява да се облекчи анализът на установените синусоидални процеси в линейните електрически вериги. Чрез замяна на действителните е.д.н. $e(t)$, токове $i(t)$ и напрежения $u(t)$ с техните комплексни образи $\dot{e}(t)$, $\dot{i}(t)$ и $\dot{u}(t)$, диференциалните уравнения на веригите се свеждат до алгебрични уравнения.

Съответствието между действителната функция на времето (оригинала) $a(t)$ и комплексният ѝ образ $\dot{a}(t)$ се дава с уравнението:

$$a(t) = A_m \sin(\omega t + \Psi_a) \quad \dot{a}(t) = A_m \cdot e^{j(\omega t + \Psi_a)} = \dot{A}_m \cdot e^{j\omega t} = \sqrt{2} \dot{A} \cdot e^{j\omega t}, \quad (3.17)$$

където \dot{A}_m е комплексната ѝ амплитуда, а \dot{A} - комплексната ѝ ефективна стойност.

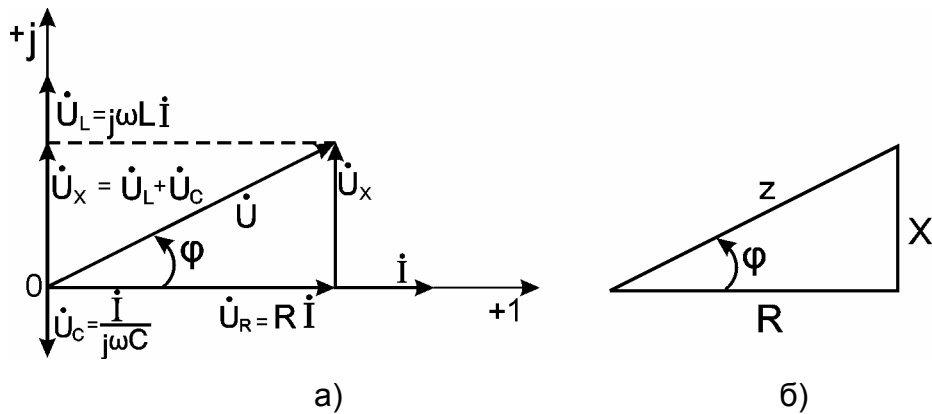
При последователна R, L, C - верига за комплексната амплитуда \dot{I}_m , съответно за комплексната ефективна стойност \dot{I} на тока, се записва:

$$\dot{I}_m = \dot{U}_m / Z; \quad \dot{I} = \dot{U} / Z; \quad (3.18)$$

където Z е комплексното съпротивление на веригата:

$$Z = R + j\omega L + 1/j\omega C = R + j(\omega L - 1/\omega C) = R + j(X_L - X_C) = R + jX = z \cdot e^{j\varphi}. \quad (3.19)$$

Графичната интерпретация на уравнение (3.18) е илюстрирана на фиг.3.0.1а.



фиг.3.0.1

Диаграмата от фиг.3.0.1а е начертана при $\psi_i = 0$ и $\omega L > 1/\omega C$, т.е. $\varphi > 0$. Въз основа на триъгълника на напреженията от фигурата е получен триъгълникът на съпротивленията (фиг.3.0.1б).

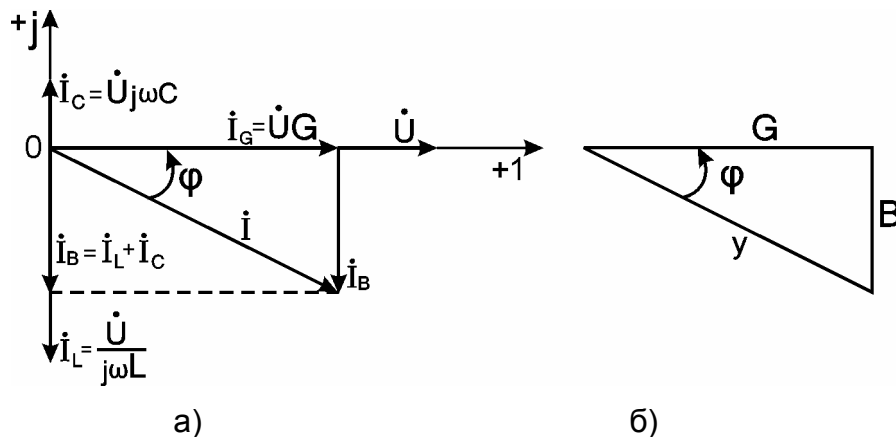
При паралелна G, L, C - верига за комплексната амплитуда на напрежението \dot{U}_m , респективно за комплексната ефективна стойност на напрежението, се записва:

$$\dot{U}_m = \dot{I}_m / Y; \quad \dot{U} = \dot{I} / Y, \quad (3.20)$$

където Y е комплексната проводимост на веригата:

$$Y = G + 1/j\omega L + j\omega C = G - j(1/\omega L - \omega C) = G - j(B_L - B_C) = G - jB = y \cdot e^{-j\varphi}. \quad (3.21)$$

Графичната интерпретация на уравнение (3.20) е илюстрирана на фиг.3.0.2а.



фиг.3.0.2

Диаграмата от фиг.3.0.2а е начертана при $\psi_u = 0$ и $1/\omega L > \omega C$, т.е. $\varphi > 0$.

Въз основа на триъгълника на токовете от фигурата е получен триъгълникът на проводимостите (фиг.3.0.2б).

Уравнения (3.18) и (3.20) представляват комплексен запис на закона на Ом за пасивен участък. От тези уравнения се установява, че Z и Y са реципрочни величини, т.е. $Z \cdot Y = 1$, откъдето могат да се получат формулите за преход от последователна R, L, C - верига към еквивалентна паралелна G, L, C - верига и обратно:

$$y = 1/z; \quad G = R/z^2; \quad B = X/z^2; \quad B_L = X_L/z^2; \quad B_C = X_C/z^2; \quad (3.22)$$

$$z = 1/y; \quad R = G/y^2; \quad X = B/y^2; \quad X_L = B_L/y^2; \quad X_C = B_C/y^2. \quad (3.23)$$

Законите на Кирхоф в комплексен вид се записват по следния начин:

I закон на Кирхоф:

$$\sum_{k=1}^n \dot{I}_k = 0; \quad (3.24)$$

II закон на Кирхоф:

$$\sum_{k=1}^n \dot{E}_k = \sum_{k=1}^n \dot{U}_k = \sum_{k=1}^n Z_k \dot{I}_k. \quad (3.25)$$

Еквивалентното комплексно съпротивление Z_e на последователно съединени пасивни участъци е:

$$Z_e = R_e + jX_e = \sum_{k=1}^n Z_k = \sum_{k=1}^n R_k + j \sum_{k=1}^n X_k, \quad (3.26)$$

а еквивалентната комплексна проводимост Y_e на паралелно съединени пасивни участъци е:

$$Y_e = G_e - jB_e = \sum_{k=1}^n Y_k = \sum_{k=1}^n G_k - j \sum_{k=1}^n B_k. \quad (3.27)$$

При установени синусоидални процеси в линейни електрически вериги се въвежда понятието комплексна мощност \dot{S} :

$$\dot{S} = \dot{U} \dot{I}^* = S e^{j\varphi} = UI \cos\varphi + jUI \sin\varphi = P + jQ, \quad (3.28)$$

където $S = UI$ е пълната мощност, VA;

$P = UI \cos\varphi = S \cos\varphi = RI^2 = GU^2$ - активната мощност, W;

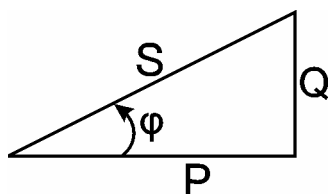
$Q = UI \sin\varphi = S \sin\varphi = XI^2 = BU^2$ - реактивната мощност, VAR.

Аналогично на триъгълниците на съпротивленията и проводимостите може да бъде построен подобен на тях триъгълник на мощностите. На фиг.3.0.3 е показан такъв триъгълник при $\varphi > 0$.

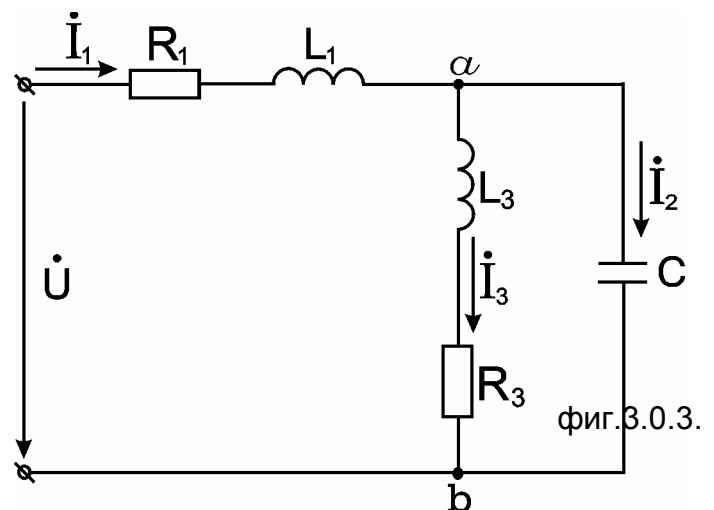
От триъгълника на мощностите могат да бъдат записани съотношенията:
 $S = (P^2 + Q^2)^{1/2}$; $\varphi = \arctg(Q/P)$. (3.29)

Балансът на мощностите се изразява с уравнението:

$$\sum \dot{S}_и = \sum \dot{S}_к. \quad (3.30)$$



фиг.3.0.3.



Фиг.3.1

Уравнение (3.30) може да бъде записано във вида:

$$\sum \dot{S}_E + \sum \dot{S}_J = \sum \dot{E} \dot{I}_E^* + \sum \dot{U}_J \dot{J} = \sum (R \cdot I^2 + jX \cdot I^2) = \sum (G \cdot U^2 + jB \cdot U^2). \quad (3.31)$$

Комплексното изобразяване на синусоидалните величини позволява при анализа на установени синусоидални процеси в линейни електрически вериги да

бъдат използвани всички методи за анализ, разглеждани при постоянните режими. Единствената разлика е в това, че всички величини (е.д.н., токове, напрежения, съпротивления и проводимости) трябва да бъдат записани в комплексен вид.

Зад.3.1. Да се изчислят комплексните ефективни стойности на токовете ако: $R_1 = 2 \Omega$; $\omega L_1 = 5 \Omega$; $R_3 = 4 \Omega$; $\omega L_3 = 20 \Omega$; $1/\omega C = 50 \Omega$; $U = 100 \text{ V}$; $f = 50 \text{ Hz}$ (фиг.3.1). Да се провери балансът на мощностите. Да се построи векторната диаграма. Да се напишат изразите за моментните стойности на токовете.

Решение:

Приема се, че началната фаза на напрежението е нула, т.е.:

$$\dot{U} = U \cdot e^{j0^\circ} = 100 \text{ V.}$$

Комплексните съпротивления на веригата имат вида:

$$Z_1 = R_1 + j\omega L_1 = 2 + j5 \Omega; Z_3 = R_3 + j\omega L_3 = 4 + j20 \Omega; Z = 1/j\omega C = -j50 \Omega.$$

Еквивалентното комплексно съпротивление на веригата Z_e е:

$$Z_e = Z_1 + Z_3 \cdot Z / (Z_3 + Z) = 39,07 e^{j70,70^\circ}, \Omega.$$

Еквивалентният ток на веригата \dot{I}_1 се определя от закона на Ом в комплексен вид: $\dot{I}_1 = \dot{U} / Z_e = 2,56 e^{-j70,70^\circ} \text{ A.}$

Токовете \dot{I}_2 и \dot{I}_3 се определят чрез \dot{I}_1 :

$$\dot{I}_2 = \dot{I}_1 Z_3 / (Z_3 + Z) = 1,73 e^{j90,4^\circ} \text{ A} \text{ и } \dot{I}_3 = \dot{I}_1 Z / (Z_3 + Z) = 4,23 e^{-j78,29^\circ} \text{ A.}$$

Балансът за активната мощност има вида:

$$R_1 I_1^2 + R_3 I_3^2 = \text{Re}[\dot{U} \cdot \dot{I}_1^*]$$

$$\text{или: } 2(2,56)^2 + 4(4,23)^2 = \text{Re}[100 \cdot 2,56 e^{j70,70^\circ}] = 84,6 \text{ W.}$$

Балансът за реактивната мощност има вида:

$$(\omega L_1) I_1^2 + (\omega L_3) I_3^2 - (1/\omega C) I_2^2 = \text{Im}[\dot{U} \cdot \dot{I}_1^*]$$

$$\text{или: } 5(2,56)^2 + 20(4,23)^2 - 50(1,73)^2 = \text{Im}[100 \cdot 2,56 e^{j70,70^\circ}] = 214 \text{ VAr.}$$

Векторната диаграма е показана на фиг.3.2,

където: $R_1 \dot{I}_1 = 5,12 e^{-j70,70^\circ} \text{ V}$; $j\omega L_1 \dot{I}_1 = 12,8 e^{j19,3^\circ} \text{ V}$; $R_3 \dot{I}_3 = 16,92 e^{-j78,29^\circ} \text{ V}$; $j\omega L_3 \dot{I}_3 = 84,6 e^{j11,71^\circ} \text{ V}$; $(1/\omega C) \dot{I}_2 = 86,5 e^{j0,4^\circ} \text{ V}$; $\dot{U}_1 = \dot{I}_1 Z_1$; $\dot{U}_{ab} = \dot{I}_3 Z_3 = \dot{I}_2 Z$; $\dot{U} = \dot{U}_1 + \dot{U}_{ab}$.

Изразите за моментните стойности на токовете имат вида:

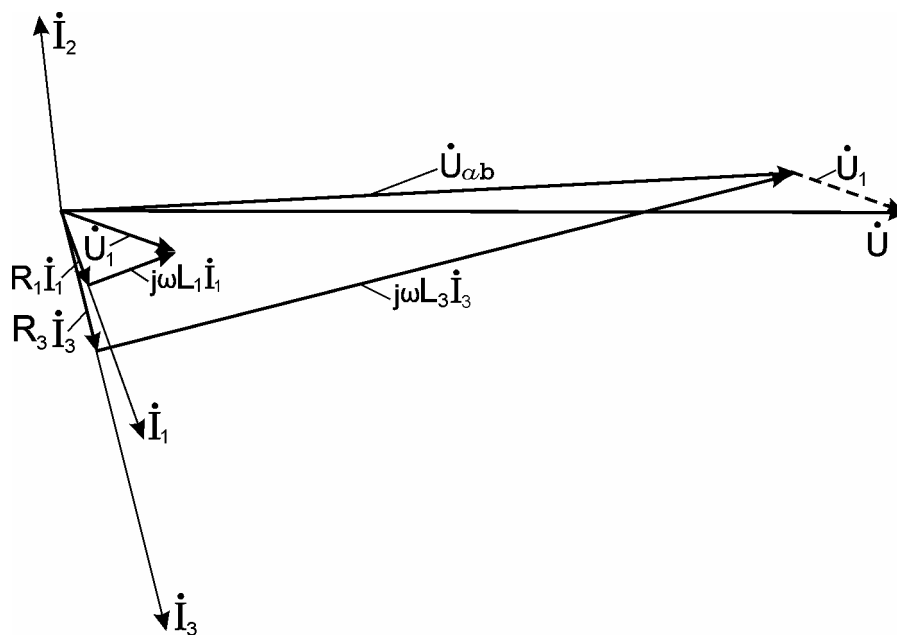
$$i_1(t) = 2,56 \cdot \sqrt{2} \sin(314t - 70,7^\circ) \text{ A};$$

$$i_2(t) = 1,73 \cdot \sqrt{2} \sin(314t + 90,4^\circ) \text{ A};$$

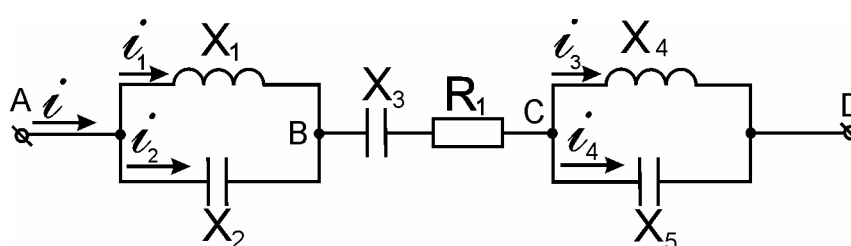
$$i_3(t) = 4,23 \cdot \sqrt{2} \sin(314t - 78,29^\circ) \text{ A}.$$

Зад.3.2. Дадено е напрежението $u_{AD} = 100 \sin \omega t$, V. Да се определят моментните стойности на токовете i , i_1 , i_2 , i_3 , i_4 и на напреженията u_{AB} и u_{CD} (фиг.3.3). Дадено е: $X_1 = 40 \Omega$; $X_2 = -80 \Omega$; $X_3 = -20 \Omega$; $X_4 = 60 \Omega$; $X_5 = -30 \Omega$ и $R_1 = 50 \Omega$. Да се построи векторната диаграма.

Отговори: $i(t) = 2 \sin \omega t$, A; $i_1(t) = 4 \sin \omega t$, A; $i_2(t) = -2 \sin \omega t$, A; $i_3(t) = -2 \sin \omega t$, A; $i_4(t) = 4 \sin \omega t$, A; $u_{AB}(t) = 160 \sin(\omega t + 90^\circ)$, V; $u_{CD}(t) = 120 \sin(\omega t - 90^\circ)$, V.



фиг.3.2



Фиг. 3.3

Зад.3.3. През неразклонената част на веригата (фиг.3.4) преминава ток $I_1 = 2,4 \text{ A}$. Известно е, че Z_1 е комплексното съпротивление на бобина с активно съпротивление $R_1 = 7 \Omega$. Да се определи индуктивното съпротивление X_1 на тази бобина, ако е дадено: $R_2 = 20 \Omega$; $\omega L_2 = 30 \Omega$; $R_3 = 10 \Omega$; $1/\omega C_3 = 20 \Omega$ и $U = 120 \text{ V}$.

Решение:

Пълното съпротивление z на веригата се определя от израза:

$$z = U/I_1 = 50 \Omega.$$

Тъй като z е модул на еквивалентното комплексно съпротивление Z на веригата: $Z = R + jX$, то:

$$z = |Z| = \sqrt{R^2 + X^2}.$$

От друга страна:

$$Z = Z_1 + Z_{ab} = (R_1 + jX_1) + (R_2 + j\omega L_2) \cdot (R_3 - j1/\omega C_3) / (R_2 + j\omega L_2 + R_3 + 1/j\omega C_3).$$

След заместване с числени стойности се получава: $Z = (7 + jX_1) + (23 - j11)$, откъдето следва, че: $R = 30 \Omega$, а $X = X_1 - 11$.

Следователно:

$$z = [30^2 + (X_1 - 11)^2]^{1/2} = 50 \Omega.$$

Получава се следното уравнение спрямо X_1 :

$$X_1^2 - 22 X_1 - 1479 = 0.$$

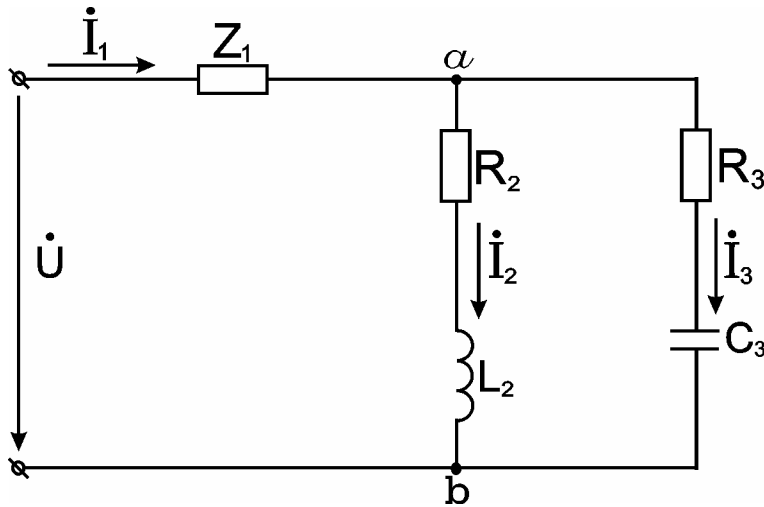
От изчислените две стойности за X_1 :

$$X_1^I = 51 \Omega \text{ и}$$

$$X_1'' = -29 \Omega,$$

втората отпада, тъй като по условие X_1 има индуктивен характер.

Зад.3.4. Да се определи напрежението на входа \dot{U} , ако $I_3 = 1 \text{ A}$ (фиг.3.5). Да се построи векторната диаграма. Дадено е: $R_1 = 2 \Omega$; $X_1 = -2 \Omega$; $X_2 = -4 \Omega$; $R_3 = 2 \Omega$; $X_3 = 2 \Omega$; $R_4 = 2 \Omega$ и $X_4 = 2 \Omega$.



Фиг.3.4

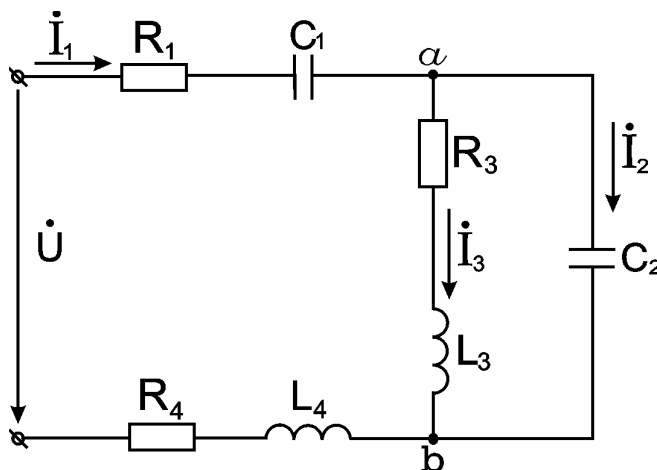
Решение:

Приема се, че началната

фаза на i_3 е нула, т.е. $\dot{I}_3 = I_3 e^{j0^\circ} = 1 \text{ A}$.

По закона на Ом в комплексен вид се определят:

$$\begin{aligned} \dot{U}_{ab} &= \dot{I}_3 Z_3 = \dot{I}_3 (R_3 + jX_3) = 2 + j2 = 2,83 e^{j45^\circ} \text{ V} \text{ и} & \dot{I}_2 &= \\ \dot{U}_{ab}/Z_2 &= \dot{U}_{ab}/jX_2 = -0,5 + j0,5 = 0,707 e^{j135^\circ} \text{ A.} \end{aligned}$$



фиг.3.5

От законите на Кирхоф в комплексен вид се определят:

$$\begin{aligned} \dot{I}_1 &= \dot{I}_2 + \dot{I}_3 = 0,5 + j0,5 = 0,707 e^{j45^\circ} \text{ A} \\ \text{и} \quad \dot{U} &= \dot{I}_1 (Z_1 + Z_4) + \dot{U}_{ab} = \dot{I}_1 (R_1 + R_4 + jX_1 + jX_4) + (2 + j2) = 4 + j4 = 5,66 e^{j45^\circ} \text{ V.} \end{aligned}$$

Векторната диаграма е показана на фиг.3.6, където:

$$\begin{aligned} R_3 \dot{I}_3 &= 2 \text{ V}; \quad jX_3 \dot{I}_3 = j2 \text{ V} \quad \text{и} \\ \dot{I}_1 (Z_1 + Z_4) &= 2,83 e^{j45^\circ} \text{ V.} \end{aligned}$$

Зад.3.5. Да се определи стойността на R_2 , при която фазовата разлика между \dot{U} и \dot{I}_3 е равна на 90° (фиг.3.7). Дадено е: $R_1 = 10 \Omega$; $X_1 = 22 \Omega$; $R_3 = 20 \Omega$ и $X_3 = 50 \Omega$.

Решение:

Еквивалентното комплексно съпротивление на веригата Z_e има вида:

$$Z_e = Z_1 + Z_2 Z_3 / (Z_2 + Z_3), \text{ като:}$$

$$Z_1 = R_1 + jX_1 = 10 + j22 \Omega; \quad Z_2 = R_2 \text{ и } Z_3 = R_3 + jX_3 = 20 + j50 \Omega.$$

Токът в неразклонената част на веригата \dot{I}_1 се определя по закона на Ом в комплексна форма:

$$\dot{I}_1 = \dot{U} / Z_e,$$

а \dot{I}_3 се изразява чрез \dot{I}_1 :

$$\dot{I}_3 = \dot{I}_1 Z_2 / (Z_2 + Z_3) = \dot{U} / (Z_1 + Z_3 + Z_1 Z_3 / Z_2) = \dot{U} / Z,$$

където $Z = Z_1 + Z_3 + Z_1 Z_3 / Z_2 = z e^{j\varphi}$.

За да изостава \dot{I}_3 от \dot{U} на 90° е необходимо $\varphi = 90^\circ$, т.е. Z да бъде имагинерна величина.

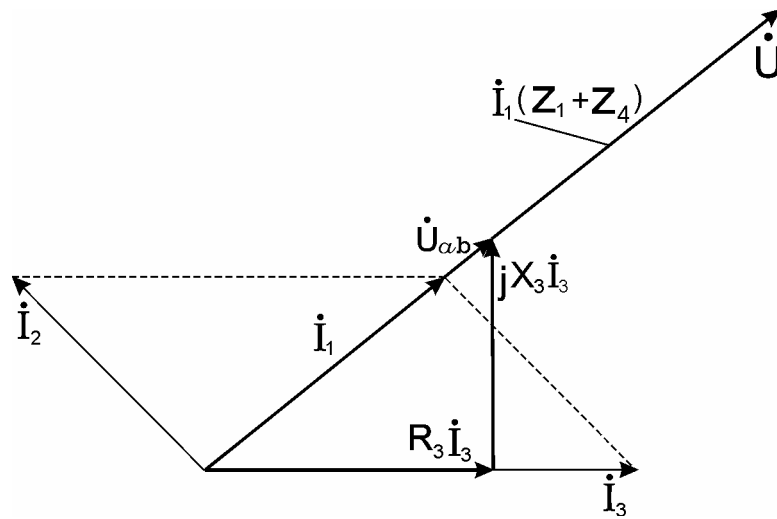
За целта Z се представя в алгебрична форма:

$$Z = [R_1 + R_3 + (R_1 R_3 - X_1 X_3) / R_2] + j[X_1 + X_3 + (R_1 X_3 + R_3 X_1) / R_2].$$

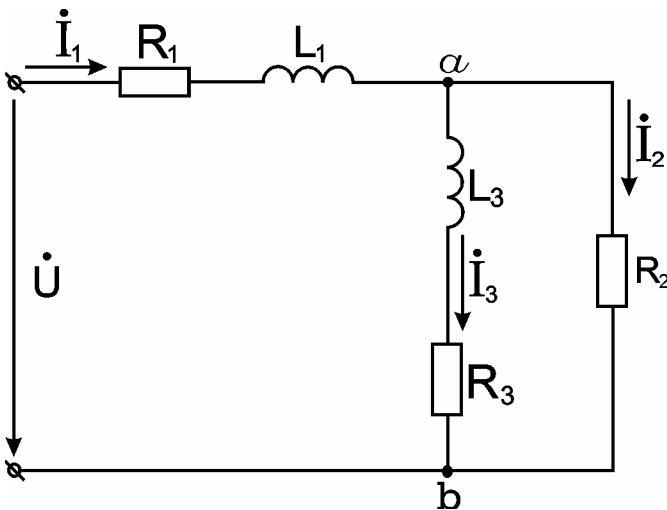
Реалната част на Z се приравнява на нула:

$$\operatorname{Re}[Z] = R_1 + R_3 + (R_1 R_3 - X_1 X_3) / R_2 = 0,$$

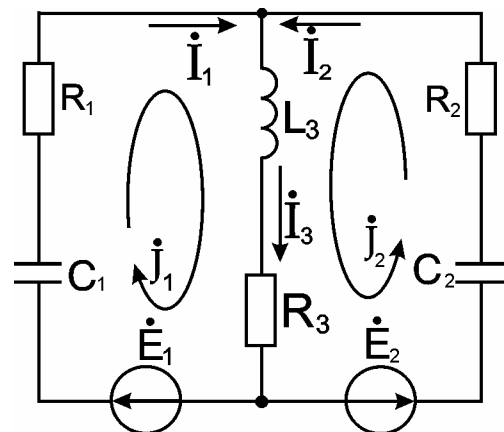
откъдето за R_2 се получава: $R_2 = 30 \Omega$.



фиг.3.6



Фиг.3.7



Фиг.3.8

Зад.3.6. За веригата, чиято схема е показана на фиг.3.8, да се определят моментните стойности на токовете i_1 , i_2 и i_3 . Дадено е: $R_1 = 5 \Omega$; $X_1 = -1 \Omega$; $R_2 = 2 \Omega$; $X_2 = -5 \Omega$; $R_3 = 3 \Omega$; $X_3 = 5 \Omega$; $E_1 = E_2 = 200 \text{ V}$, като e_2 изостава от e_1 на ъгъл $\pi/2$.

Решение:

Системата уравнения, записана по метода с контурните токове, има вида:

$$\begin{cases} \dot{J}_1 (Z_1 + Z_3) + \dot{J}_2 Z_3 = \dot{E}_1; \\ \dot{J}_2 (Z_2 + Z_3) + \dot{J}_1 Z_3 = \dot{E}_2. \end{cases}$$

Приема се, че началната фаза на e_1 е равна на нула, т.е. $\dot{E}_1 = E_1 e^{j0^\circ} = 200 \text{ V}$.
Тъй като по условие e_2 изостава от e_1 на 90° , то:

$$\dot{E}_2 = 200 e^{-j90^\circ} \text{ V.}$$

Комплексните съпротивления имат вида:

$$Z_1 = 5 - j1 \ \Omega; Z_2 = 2 - j5 \ \Omega \text{ и } Z_3 = 3 + j5 \ \Omega.$$

След заместване системата добива вида:

$$\begin{cases} \dot{J}_1 (8 + j4) + \dot{J}_2 (3 + j5) = 200; \\ \dot{J}_2 5 + \dot{J}_1 (3 + j5) = -j200. \end{cases}$$

За контурните токове се получава:

$$\dot{J}_1 = 10,55 e^{j100,13^\circ} \text{ A и } \dot{J}_2 = 45,85 e^{-j75,48^\circ} \text{ A.}$$

Клоновите токове, съгласно метода, се изразяват чрез контурните токове:

$$\dot{I}_1 = \dot{J}_1; \dot{I}_2 = \dot{J}_2 \text{ и } \dot{I}_3 = \dot{J}_1 + \dot{J}_2 = 35,34 e^{-j74,17^\circ} \text{ A.}$$

Изразите за моментните им стойности имат вида:

$$i_1(t) = \sqrt{2} \cdot 10,55 \sin(\omega t + 100,13^\circ) \text{ A;}$$

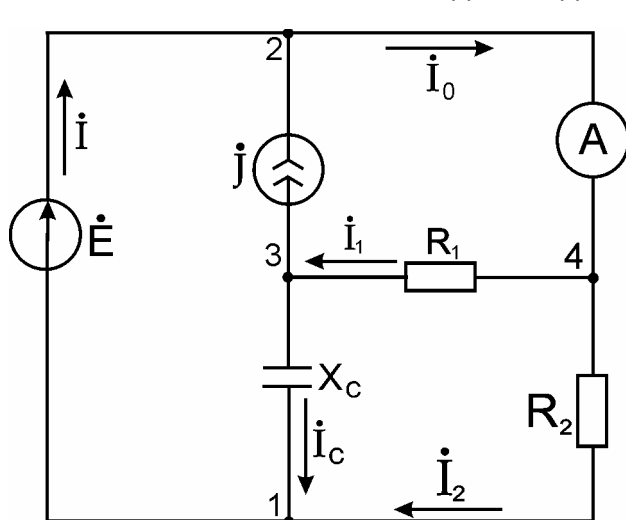
$$i_2(t) = \sqrt{2} \cdot 45,85 \sin(\omega t - 75,48^\circ) \text{ A;}$$

$$i_3(t) = \sqrt{2} \cdot 35,34 \sin(\omega t - 74,17^\circ).$$

Зад.3.7. По метода с възлови потенциали да се изчислят комплексните ефективни стойности на токовете във веригата (фиг.3.9) и да се определи показанието на амперметъра, включен между точките 2 и 4, ако е дадено: $\dot{E} = 20 \text{ V}$; $\dot{J} = 0,1 \text{ A}$; $R_1 = 100 \ \Omega$; $R_2 = 50 \ \Omega$ и $X_C = 100 \ \Omega$.

Решение:

Тъй като източникът на е.д.н. е идеален, то за базисен възел се избира възел



Фиг. 3.9

1, т.е.: $\phi_1 = 0 \text{ V}$ и следователно:

$$\phi_2 = \phi_4 = \dot{E} = 20 \text{ V.}$$

Необходимият брой уравнения е равен на 1, като уравнението се записва за възел 3:

$$\phi_3 (1/R_1 + j/X_C) - \phi_4 / R_1 = - \dot{J},$$

откъдето се получава:

$$\phi_3 = 7,143 e^{-j45^\circ} \text{ V.}$$

Клоновите токове, съгласно метода, се изразяват чрез закона на Ом в комплексна форма:

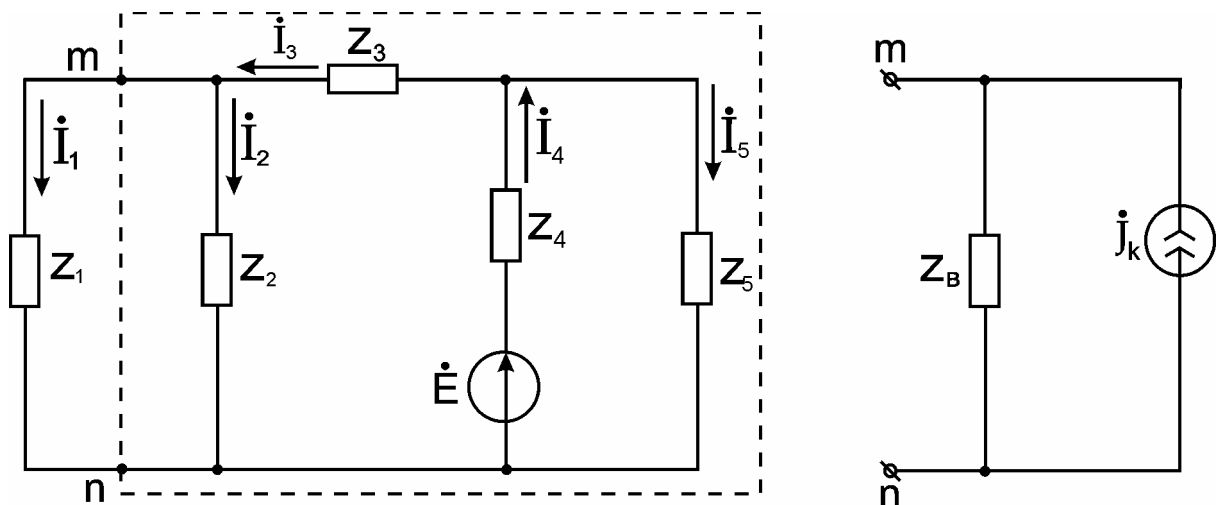
$$\dot{I}_1 = (\dot{\varphi}_4 - \dot{\varphi}_3) / R_1 = 0,1495 + j0,0505 \text{ A}; \quad \dot{I}_2 = \dot{\varphi}_4 / R_2 = 0,4 \text{ A} \text{ и } \dot{I}_C = \dot{\varphi}_3 / (-jX_C) = 0,0714 e^{j45^\circ} \text{ A}.$$

Токовете \dot{I} и \dot{I}_0 се определят чрез първия закон на Кирхоф в комплексна форма:

$$\dot{I} = \dot{I}_C + \dot{I}_2 = 0,451 + j0,051 \text{ A} \text{ и } \dot{I}_0 = \dot{I} + \dot{J} = 0,551 + j0,051 \text{ A}.$$

$$\text{Показанието на амперметъра е равно на } I_A = I_0 = (0,551^2 + 0,051^2)^{1/2} = 0,553 \text{ A}.$$

Зад.3.8. Част от схемата, очертана с пунктир, е заменена с еквивалентен източник на ток (фиг.3.10). Да се определят Z_2 , \dot{E} и токовете в изходната схема, ако: $\dot{J}_k = 8,4 e^{j70^\circ} \text{ A}$; $Z_B = 13,6 e^{-j28,33^\circ} \Omega$; $Z_1 = 6 e^{j30^\circ} \Omega$; $Z_3 = 10 e^{j37^\circ} \Omega$; $Z_4 = 3 \Omega$ и $Z_5 = 4 e^{j90^\circ} \Omega$.



Фиг.3.10

Решение:

Съгласно теоремата на Нортън Z_B е еквивалентното комплексно съпротивление между точките m и n при прекъсване на клоната със съпротивлението Z_1 , т.е.:

$$Z_B = Z_2 [Z_3 + Z_4 Z_5 / (Z_4 + Z_5)] / [Z_2 + Z_3 + Z_4 Z_5 / (Z_4 + Z_5)],$$

откъдето се определя $Z_2 = 12,01 e^{j90,7^\circ} \approx j12 \Omega$;

Токът \dot{J}_k е равен на тока на късо съединение между точките m и n, т.е.:

$$\dot{J}_k = \dot{E} [Z_5 / (Z_3 + Z_5)] / [Z_4 + Z_3 Z_5 / (Z_3 + Z_5)],$$

откъдето $\dot{E} = 130,2 e^{j70^\circ} \text{ V}$.

Токовете в изходната схема се определят по някои от методите за анализ на установени синусоидални процеси. Тъй като източникът е един, може да се използва законът на Ом в комплексна форма съвместно с правилата за преобразуване на пасивни участъци.

Еквивалентният ток на веригата \dot{I}_4 е равен на: $\dot{I}_4 = \dot{E} / Z_e$,

където $Z_e = Z_4 + Z_5 [Z_3 + Z_1 Z_2 / (Z_1 + Z_2)] / [Z_5 + Z_3 + Z_1 Z_2 / (Z_1 + Z_2)] = 4,864 e^{j42,55^\circ} \Omega$.

Получава се: $\dot{I}_4 = 26,77 e^{j27,45^\circ} \text{ A}$.

Тъй като токовете \dot{I}_5 и \dot{I}_3 са токове в паралелни клонове, те се изразяват чрез тока \dot{I}_4 :

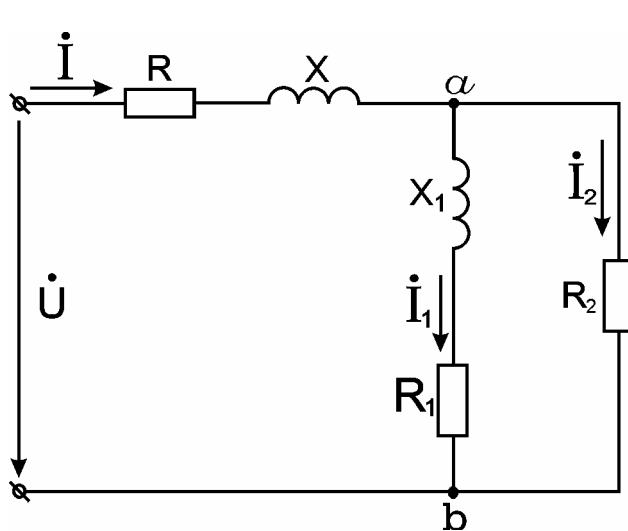
$$\dot{I}_5 = \dot{I}_4 \cdot [Z_3 + Z_1 Z_2 / (Z_1 + Z_2)] / [Z_5 + Z_3 + Z_1 Z_2 / (Z_1 + Z_2)] = 22,327 e^{j17,39^\circ} \text{ A};$$

$$\dot{I}_3 = \dot{I}_4 \cdot Z_5 / [Z_5 + Z_3 + Z_1 Z_2 / (Z_1 + Z_2)] = 6,174 e^{j66,62^\circ} \text{ A}.$$

Аналогично, тъй като токът \dot{I}_3 се разклонява през паралелни клонове със съпротивления Z_1 и Z_2 , то токовете \dot{I}_1 и \dot{I}_2 се изразяват чрез \dot{I}_3 :

$$\dot{I}_1 = \dot{I}_3 \cdot Z_2 / (Z_1 + Z_2) = 4,667 e^{j85,73^\circ} \text{ A} \text{ и } \dot{I}_2 = \dot{I}_3 \cdot Z_1 / (Z_1 + Z_2) = 2,334 e^{j25,73^\circ} \text{ A}.$$

Зад.3.9. Да се определи стойността на съпротивлението R_2 (фиг.3.11), при



Фиг.3.11

която фазовата разлика между \dot{U} и \dot{I}_1 е равна на 90° . Дадено е: $R = 5 \Omega$; $X = 11 \Omega$; $R_1 = 10 \Omega$ и $X_1 = 25 \Omega$.

Упътване:

Отношението $\dot{U} / \dot{I}_1 = Z + Z_1 + \dots + Z Z_1 / Z_2$ трябва да бъде имагинерна величина.

Следователно, реалната част на това комплексно съпротивление трябва да се приравни на нула:

$$[R + R_1 + (R R_1 - X X_1) / R_2] = 0.$$

Отговор: $R_2 = 15 \Omega$.

4. УСТАНОВЕНИ СИНУСОИДАЛНИ ПРОЦЕСИ В ЛИНЕЙНИ ЕЛЕКТРИЧЕСКИ ВЕРИГИ С ИНДУКТИВНА ВРЪЗКА

ОБЩИ ПОЛОЖЕНИЯ

При отчитане на явлението взаимна индукция се въвеждат така наречените едноименни изводи на индуктивно свързаните бобини. Тези изводи са начала или краища на бобините и се маркират със знаците *, Δ, Π и т.н. Смисълът от въвеждане на едноименни изводи е в следното: ако токът в едната от две индуктивно свързани бобини има посока към или от едноименния ѝ извод, то посоката на напрежението от взаимната индукция, индуцирано във втората бобина, е същата по отношение на едноименния ѝ извод, т.е. тази посока е към или от извода ѝ.

При разглеждане на две индуктивно свързани бобини се въвежда показателят коефициент на магнитна връзка k . Той се определя по формулата:

$$k = M / \sqrt{L_1 L_2}, \quad (4.1)$$

където: M е взаимната индуктивност;

L_1 и L_2 - индуктивностите на бобините.

За пресмятане на установени синусоидални процеси във вериги с индуктивна връзка директно са приложими всички методи за анализ на сложни вериги с изключение на метода с възлови потенциали и преобразуванията триъгълник-звезда и звезда-триъгълник. Използването на тези методи изисква въвеждането на допълнителни правила.

Основните трудности при анализа на вериги с индуктивна връзка са свързани с отчитането на напреженията от взаимната индукция, т.е. с определянето на броя и знаците на тези напрежения в уравненията на веригата.

Във връзка с гореизложеното при съставянето на уравненията по II закон на Кирхоф е необходимо да се извърши следното:

1. Установява се има ли в разглеждания контур индуктивно свързани бобини и с колко бобини всяка от тях е свързана. Така се определя броят на допълнителните членове в уравнението на контура, отчитащи напреженията на взаимната индукция.

2. Определя се посоката на напрежението от взаимната индукция - тя е ориентирана по същия начин спрямо едноименния извод на бобината, в която се индуцира, както е ориентирана посоката на тока спрямо едноименния извод на бобината, от която се индуцира това напрежение. Така определената посока на напрежението от взаимната индукция се сравнява с посоката на сумиране на контура и се определя знакът му: (+) - ако двете посоки съвпадат, в противен случай - (-).

При съставянето на уравненията по метода с контурни токове при вериги с индуктивна връзка е необходимо да се извърши следното:

А. При определянето на собственото съпротивление на даден контур:

1. Установява се има ли в разглеждания контур две или повече индуктивно свързани бобини и с колко бобини на контура всяка от тях е свързана. Така се определя броят на двойките допълнителни членове в израза за собственото съпротивление на контура, отчитащи напреженията от взаимната индукция, индуцирани от контурния му ток.

2. Определя се знакът, с който се записват тези допълнителни членове. За целта се изхожда от посоката на контурния ток. Ако тя е еднакво ориентирана спрямо едноименните изводи на бобините знакът е (+), в противен случай - (-).

Б. При определяне на общото съпротивление на два контура:

1. Установява се има ли в разглежданите два контура индуктивно свързани бобини и с колко бобини на единия контур всяка бобина от другия контур е свързана.

Така се определя броят на допълнителните членове в израза за общото съпротивление на контурите, отчитащи напреженията от взаимната индукция, индуцирани в единия контур от контурният ток на другия контур.

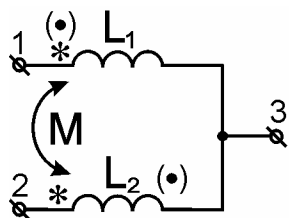
2. Определя се знакът, с който се записват тези допълнителни членове. За целта се изхожда от посоките на контурните токове. Ако те са еднакво ориентирани спрямо едноименните изводи на бобините знакът е (+), а в противен случай - (-).

За облекчаване на анализа на процесите във веригите с индуктивна връзка е целесъобразно предварително да се елиминира индуктивната връзка. Това дава възможност за използване на метода с възлови потенциали и преобразованията триъгълник-звезда и звезда-триъгълник.

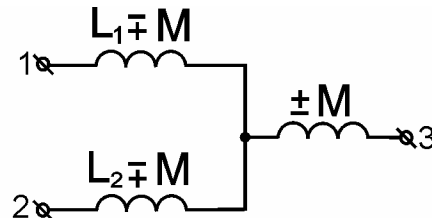
Типичен случай на елиминиране на индуктивната връзка е триполюсното съединение на две индуктивно свързани бобини (фиг.4.0.1). Преобразуваната схема има вида, показан на фиг.4.0.2.

Елиминирането на индуктивната връзка може да бъде извършено и по отношение на трансформаторното съединение на две индуктивно свързани бобини (фиг.4.0.3). Преобразуваната схема има вида, показан на (фиг.4.0.4)

Схемите от фиг.4.0.2 и 4.0.4 имат изчислително значение.

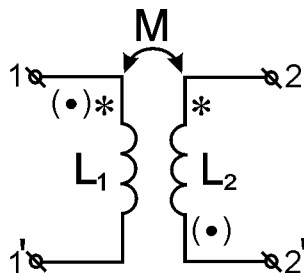


фиг.4.0.1

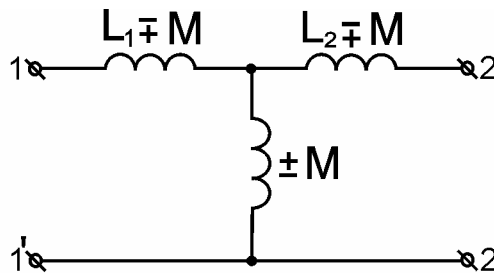


Фиг.4.0.2

Горният ред знаци пред M съответствува на означението на едноименните изводи на бобините със (*), а долният ред знаци пред M - на означението на едноименните изводи на бобините с (•). Тук трябва да се има предвид, че знаците пред M не зависят от посоките на токовете през бобините, а само от взаимното разположение на едноименните изводи.



фиг.4.0.3



Фиг.4.0.4

При разглеждане на индуктивно свързани бобини от енергийна гледна точка се въвежда понятието комплексна мощност, предавана по индуктивен път.

При еднакво ориентиране на токовете спрямо едноименните изводи на бобините (фиг.4.0.5), тя се дефинира по следния начин:

$$\dot{S}_{1M} = \dot{U}_{1M} \dot{I}_1 = Z_M \dot{I}_2 \dot{I}_1 = j\omega M \dot{I}_2 \dot{I}_1. \quad (4.2)$$

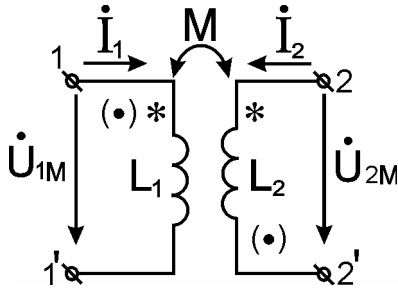
Ако $\text{Re}[\dot{S}_{1M}] > 0$, то бобината L_1 предава активна мощност по индуктивен път на бобината L_2 , а в противен случай - предаването на активна мощност е обратно.

В случай, че токовете \dot{I}_1 и \dot{I}_2 са различно ориентирани по отношение на едноименните изводи на бобините, комплексната мощност се дефинира по следния начин:

$$\dot{S}_{1M} = -\dot{U}_{1M} I_1 = -Z_M \dot{I}_2 I_1 = -j\omega M \dot{I}_2 I_1. \quad (4.3)$$

Посоката на предаване на активна мощност по индуктивен път може да се определи и въз основа на началните фази ψ_{i1} и ψ_{i2} на токовете. За активната мощност P_{1M} , предавана по индуктивен път, се записва:

$$P_{1M} = \omega M I_1 I_2 \sin(\psi_{i1} - \psi_{i2}). \quad (4.4)$$



фиг.4.0.5

Ако е изпълнено условието: $\pi > \psi_{i1} - \psi_{i2} > 0$, то $P_{1M} > 0$ и бобината L_1 предава активната мощност по индуктивен път на бобината L_2 .

Зад.4.1. Да се определят токовете в клоновете на веригата, показана на фиг.4.1, ако $E = 100 \text{ V}$; $R_1 = 10 \text{ } \Omega$; $X_{L1} = 5 \text{ } \Omega$; $X_{L2} = X_{L3} = 10 \text{ } \Omega$; $X_M = 8 \text{ } \Omega$; $X_C = 12 \text{ } \Omega$.

Решение:

1/ по законите на Кирхоф

Системата уравнения за указаните посоки на токовете има вида:

$$\begin{cases} \dot{I}_1 - \dot{I}_2 - \dot{I}_3 = 0; \\ \dot{I}_1 (R_1 + jX_{L1}) + \dot{I}_2 jX_{L2} + \dot{I}_3 jX_M = \dot{E}; \\ \dot{I}_2 (-jX_M - jX_{L2}) + \dot{I}_3 (jX_{L3} + jX_M - jX_C) = 0. \end{cases}$$

От системата уравнения се получава:

$$\dot{I}_1 = 6,4 e^{-j50,2^\circ}, \text{ A}; \quad \dot{I}_2 = 3,2 e^{j129,8^\circ}, \text{ A}; \quad \dot{I}_3 = 9,6 e^{-j50,2^\circ}, \text{ A}.$$

2/ по метода с контурни токове

Приема се, че контурният ток в I контур е \dot{I}_1 , а във II контур е \dot{I}_3 .

Системата уравнения има вида:

$$\begin{cases} \dot{I}_1 (R_1 + jX_{L1} + jX_{L2}) + \dot{I}_3 (jX_M - jX_{L2}) = \dot{E}; \\ \dot{I}_1 (jX_M - jX_{L2}) + \dot{I}_3 (jX_{L3} - jX_C + jX_{L2} - 2jX_M) = 0. \end{cases}$$

От системата за контурните токове се получава:

$$\dot{I}_1 = 6,4 e^{-j50,2^\circ}, \text{ A}; \quad \dot{I}_3 = 9,6 e^{-j50,2^\circ}, \text{ A}.$$

Клоновият ток \dot{I}_2 се изразява чрез контурните токове \dot{I}_1 и \dot{I}_3 :

$$\dot{I}_2 = \dot{I}_1 - \dot{I}_3 = 3,2 e^{j129,8^\circ}, \text{ A}.$$

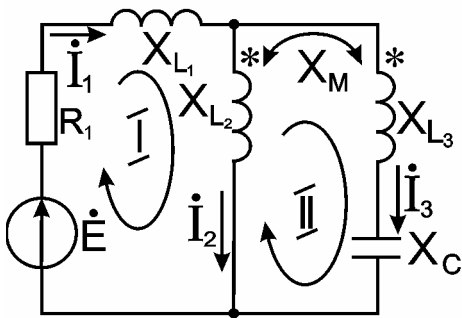
Зад.4.2. За веригата, показана на фиг.4.2, да се определят токовете в клоновете и показанията на уредите, ако: $E = 140 \text{ V}$; $R_1 = R_2 = 10 \text{ } \Omega$; $X_1 = X_2 = 10 \text{ } \Omega$, а коефициентът на магнитна връзка между двете индуктивно свързани бобини е $k = 0,8$.

Решение:

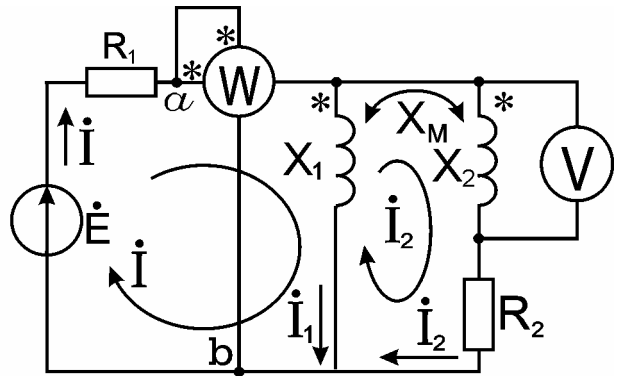
За определяне на X_M се използва формулата:

$$\kappa = M / \sqrt{L_1 L_2} = \omega M / \sqrt{\omega L_1 \omega L_2} = X_M / \sqrt{X_{L1} X_{L2}},$$

откъдето за X_M се записва: $X_M = \kappa / \sqrt{X_{L1} X_{L2}} = 8 \Omega$.



фиг.4.1



фиг.4.2

По метода с контурни токове за указаните посоки на контурните токове \dot{I} и \dot{I}_2 се записва системата уравнения:

$$\begin{cases} \dot{I} (R_1 + jX_1) + \dot{I}_2 (jX_M - jX_1) = \dot{E}; \\ \dot{I} (jX_M - jX_1) + \dot{I}_2 (R_2 + jX_1 + jX_2 - 2jX_M) = 0. \end{cases}$$

От системата се получава: $\dot{I} = 9,87 e^{j2,77^\circ}$, А и $\dot{I}_2 = 56,81 e^{j22,55^\circ}$, А.

За тока \dot{I}_1 се записва: $\dot{I}_1 = \dot{I} - \dot{I}_2 = 47,77 e^{j208,9^\circ}$, А.

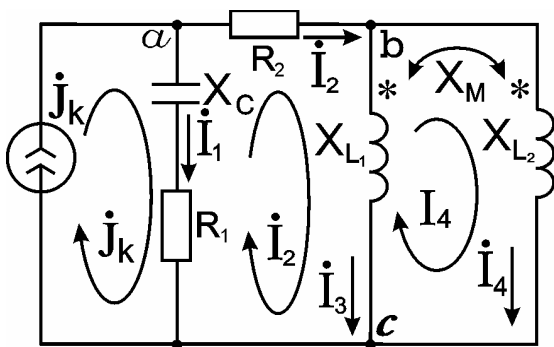
Напрежението U_V върху волтметра е:

$$\dot{U}_V = \dot{I}_2 jX_2 + \dot{I}_1 jX_M = -51,04 + j182,22 = 189,23 e^{j106,64^\circ}, \text{ V.}$$

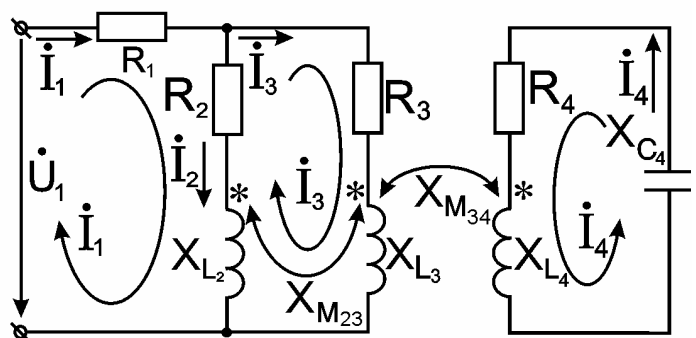
За определяне показанието на ватметъра се намира напрежението \dot{U}_{ab} :

$$\dot{U}_{ab} = \dot{I}_1 jX_1 + \dot{I}_2 jX_M = 43,06 e^{j6,64^\circ}, \text{ V или: } \dot{U}_{ab} = \dot{E} - \dot{I} R_1 = 43,06 e^{j6,64^\circ}, \text{ V.}$$

За показанието на ватметъра се записва: $P_W = R_e[\dot{U}_{ab} \dot{I}] = 442,1 \text{ W.}$



фиг.4.3



фиг.4.4

Зад.4.3. За веригата, показана на фиг.4.3, да се пресметнат клоновите токове и напреженията \dot{U}_{ac} и \dot{U}_{bc} , ако $J_k = 20 \text{ A}$; $R_1 = 4,9 \Omega$; $R_2 = 5,1 \Omega$; $X_C = 15,1 \Omega$; $X_{L1} = 6 \Omega$; $X_{L2} = 10 \Omega$ и $X_M = 3 \Omega$.

Решение:

По метода с контурни токове за указаните посоки на контурните токове \dot{I}_2 и \dot{I}_4 се записва системата уравнения:

$$\begin{cases} \dot{I}_2 (R_1 + R_2 + jX_{L1} - jX_C) + \dot{I}_4 (jX_M - jX_{L1}) + \dot{J}_K (jX_C - R_1) = 0; \\ \dot{I}_2 (jX_M - jX_{L1}) + \dot{I}_4 (jX_{L1} + jX_{L2} - 2jX_M) = 0. \end{cases}$$

От системата се получава: $\dot{I}_2 = 20 - j10,2$ A; $\dot{I}_4 = 6 - j3,06$ A.

За токовете \dot{I}_1 и \dot{I}_3 се записва:

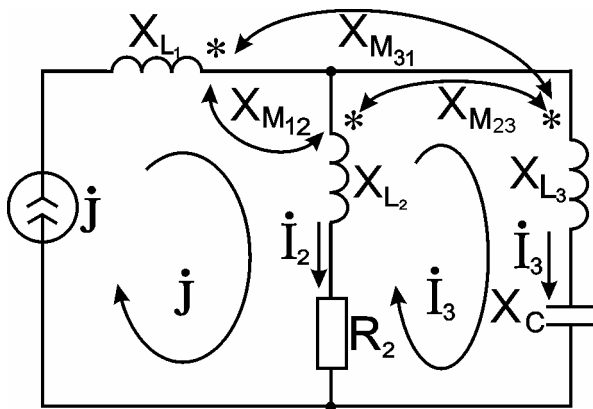
$$\dot{I}_1 = \dot{J}_K - \dot{I}_2 = j10,2 \text{ A}; \quad \dot{I}_3 = \dot{I}_2 - \dot{I}_4 = 14 - j7,14 \text{ A}.$$

За напреженията \dot{U}_{ac} и \dot{U}_{bc} се получава:

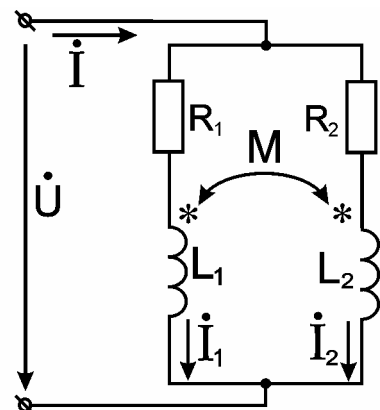
$$\dot{U}_{ac} = \dot{I}_1 (R_1 - jX_C) = 154 + j50 \text{ V};$$

$$\dot{U}_{bc} = \dot{I}_3 jX_{L1} + \dot{I}_4 jX_M = 52,02 + j102 \text{ V}.$$

Зад.4.4. За веригата, показана на фиг.4.4, да се определят клоновите токове и входното напрежение, ако през кондензатора C_4 преминава ток $I_4 = 2$ A. Дадено е: $R_1 = 13 \Omega$; $R_2 = 8 \Omega$; $R_3 = 6 \Omega$; $R_4 = 10 \Omega$; $X_{L2} = 12 \Omega$; $X_{L3} = 18 \Omega$; $X_{L4} = 15 \Omega$; $X_{C4} = 20 \Omega$; $X_{M23} = 6 \Omega$; $X_{M34} = 10 \Omega$.



фиг.4.5



Фиг.4.6

Решение:

По метода с контурни токове за указаните посоки на контурните токове \dot{I}_1 , \dot{I}_3 и \dot{I}_4 се записва системата уравнения:

$$\begin{cases} \dot{I}_1 (R_1 + R_2 + jX_{L2}) + \dot{I}_3 (-R_2 - jX_{L2} + jX_{M23}) = \dot{U}_1; \\ \dot{I}_1 (-R_2 - jX_{L2} + jX_{M23}) + \dot{I}_3 (R_2 + jX_{L2} + R_3 + jX_{L3} - 2jX_{M23}) + \dot{I}_4 jX_{M34} = 0; \\ \dot{I}_3 jX_{M34} + \dot{I}_4 (R_4 + jX_{L4} - jX_{C4}) = 0. \end{cases}$$

От системата се получава: $\dot{I}_1 = 2,2 + j6,6$ A; $\dot{I}_3 = 1 - j2$ A; $\dot{U}_1 = -29 + j143$ V.

За тока \dot{I}_2 се записва: $\dot{I}_2 = \dot{I}_1 - \dot{I}_3 = 1,2 + j4,6$ A.

Зад.4.5. За веригата, показана на фиг.4.5, да се пресметнат клоновите токове, ако $J = 10$ A; $R_2 = 10 \Omega$; $X_{L1} = 5 \Omega$; $X_{L2} = X_{L3} = 8 \Omega$; $X_{M13} = 10 \Omega$; $X_{M23} = 15 \Omega$; $X_{M12} = 13 \Omega$; $X_C = 12 \Omega$.

Решение:

По метода с контурни токове за указаната посока на контурния ток \dot{I}_3 се записва уравнението:

$$\dot{I}_3 (jX_{L2} + jX_{L3} + R_2 - jX_C - 2jX_{M23}) + \dot{J} (-R_2 - jX_{L2} + jX_{M23} - jX_{M13} + jX_{M12}) = 0.$$

За тока \dot{I}_3 се получава: $\dot{I}_3 = 3,59e^{j23,96^\circ}$ А.

За тока \dot{I}_2 се записва: $\dot{I}_2 = \dot{J} - \dot{I}_3 = 6,875e^{-j12,24^\circ}$ А.

Зад.4.6. За веригата, показана на фиг.4.6, $R_1 = R_2 = 20 \Omega$; $\omega L_1 = \omega M = 10 \Omega$; $\omega L_2 = 20 \Omega$ и $U = 150$ V. Да се пресметнат клоновите токове, активните мощности и мощностите на топлинните загуби за паралелните клонове, общата активна мощност и активните мощности, предавани по индуктивен път.

Решение:

По законите на Кирхоф се записва системата уравнения:

$$\begin{cases} \dot{I} = \dot{I}_1 + \dot{I}_2; \\ \dot{U} = \dot{I}_1 Z_1 + \dot{I}_2 Z_M; \\ \dot{U} = \dot{I}_2 Z_2 + \dot{I}_1 Z_M. \end{cases}$$

За токовете \dot{I}_1 и \dot{I}_2 се получават изразите:

$$\dot{I}_1 = \dot{U} (Z_2 - Z_M) / (Z_1 Z_2 - Z_M^2); \quad \dot{I}_2 = \dot{U} (Z_1 - Z_M) / (Z_1 Z_2 - Z_M^2).$$

Пресметнатите стойности на токовете са: $\dot{I}_1 = 4 - j3 = 5e^{-j36^\circ 50'}$ А;

$\dot{I}_2 = 2 - j4 = 4,47e^{-j63^\circ 30'}$ А и $\dot{I} = \dot{I}_1 + \dot{I}_2 = 6 - j7 = 9,22e^{-j49^\circ 25'}$ А.

За мощностите се получават следните стойности:

- за активните мощности:

$$P_1 = \text{Re}[\dot{U} \cdot \dot{I}_1^*] = 600 \text{ W}; \quad P_2 = \text{Re}[\dot{U} \cdot \dot{I}_2^*] = 300 \text{ W} \text{ и } P = \text{Re}[\dot{U} \cdot \dot{I}^*] = 900 \text{ W};$$

- за мощностите на топлинните загуби:

$$P_{R_1} = R_1 \cdot I_1^2 = 500 \text{ W}; \quad P_{R_2} = R_2 \cdot I_2^2 = 400 \text{ W};$$

- за активните мощности, предавани по индуктивен път:

$$P_{1M} = \text{Re}[\dot{U}_{1M} \cdot \dot{I}_1^*] = \text{Re}[j\omega M \dot{I}_2 \cdot \dot{I}_1^*] = 100 \text{ W};$$

$$P_{2M} = \text{Re}[\dot{U}_{2M} \cdot \dot{I}_2^*] = \text{Re}[j\omega M \dot{I}_1 \cdot \dot{I}_2^*] = -100 \text{ W}.$$

Тъй като $P_{1M} > 0$, бобината L_1 предава активна мощност по индуктивен път на бобината L_2 . Тази мощност се изразходва във вид на топлина във R_2 .

До горния резултат може да се достигне и ако се изходи от съотношението между началните фази Ψ_{i1} и Ψ_{i2} на токовете i_1 и i_2 . И действително, тъй като $\pi > \Psi_{i1} - \Psi_{i2} = 26^\circ 40' > 0$, то от бобината L_1 се предава активна мощност по индуктивен път на бобината L_2 .

5. РЕЗОНАНСНИ ЯВЛЕНИЯ В ЛИНЕЙНИ ЕЛЕКТРИЧЕСКИ ВЕРИГИ

ОБЩИ ПОЛОЖЕНИЯ

Резонансът е явление, при което напрежението и токът в електрическите вериги или в отделни техни части, съдържащи реактивни елементи, съвпадат по фаза, т.е. $\varphi = 0$. Във връзка с това се разглежда резонанс по отношение на входа на веригата и по отношение на отделни нейни части.

Условието за резонанс на напреженията е:

$$X = 0, \quad (5.1)$$

а за резонанс на токовете е:

$$B = 0. \quad (5.2)$$

В (5.1) X е реактивното съпротивление, а в (5.2) B е реактивната проводимост.

Резонансната честота ω_0 на последователна R, L, C - верига и паралелна G, L, C - верига се определя по формулата:

$$\omega_0 = 1/\sqrt{LC}. \quad (5.3)$$

При разглеждане на резонанс в последователна R, L, C - верига се въвеждат величините: характеристично съпротивление ρ , качествено число Q и затихване d . Те се определят по формулите:

$$\rho = \sqrt{L/C}, \quad (5.4)$$

$$Q = \rho/R = (\sqrt{L/C})/R = U_{L0}/U = U_{C0}/U, \quad (5.5)$$

$$d = 1/Q = R/\rho = R\sqrt{C/L}. \quad (5.6)$$

При разглеждане на резонанс в паралелна G, L, C - верига се въвеждат аналогични величини: характеристична проводимост γ , качествено число Q и затихване d . Определянето им се извършва по формулите:

$$\gamma = \sqrt{C/L}, \quad (5.7)$$

$$Q = \gamma/G = (\sqrt{C/L})/G = I_{L0}/I = I_{C0}/I, \quad (5.8)$$

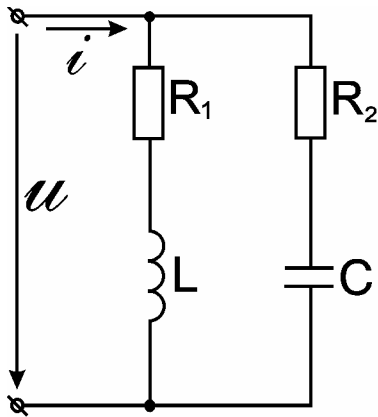
$$d = 1/Q = G/\gamma = G\sqrt{L/C}. \quad (5.9)$$

Резонансната честота ω_0 на верига, съставена от паралелно съединени бобина и кондензатор със загуби (фиг.5.0.1), се определя по формулата:

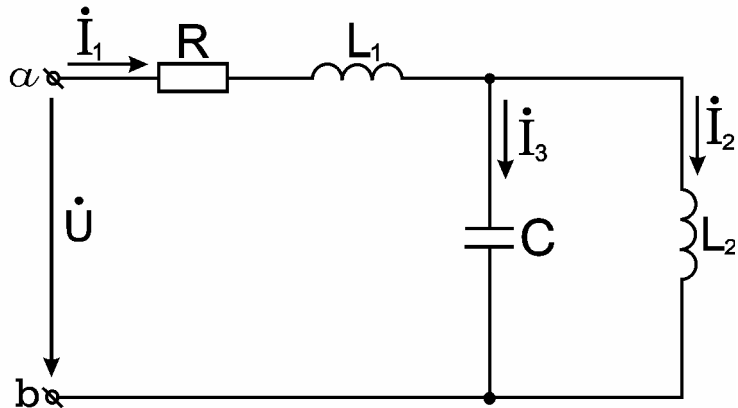
$$\omega_0 = [1/\sqrt{LC}] \sqrt{(\rho^2 - R_1^2)/(\rho^2 - R_2^2)}, \quad (5.10)$$

където $\rho = \sqrt{L/C}$ е характеристичното съпротивление на веригата.

В случай, че $R_1 = R_2 = \rho$, за всяка честота се изпълнява условието за резонанс. Това означава, че ако е налице горното равенство, се реализира резонанс при всички честоти.



Фиг.5.0.1



Фиг.5.1

Зад.5.1. За веригата, показана на фиг.5.1, $L_1 = L_2 = 20 \text{ mH}$; $C = 200 \text{ }\mu\text{F}$ и $R = 2 \text{ }\Omega$. Да се определят честотите, при които във веригата възникват токов и напрежителен резонанс. Да се определят също така токовете в клоновете на веригата при напрежителен резонанс, ако входното напрежение е $U = 20 \text{ V}$.

Решение:

По отношение на паралелно съединените L_2 и C , от условието за токов резонанс $B_e = 0$, за резонансната честота ω_T се получава:

$$\omega_T = 1/\sqrt{L_2 \cdot C} = 500 \text{ s}^{-1}.$$

За входното съпротивление $Z_{\text{вх}}$ на веригата се записва:

$$Z_{\text{вх}} = R + j\omega L_1 + j\omega L_2 / j\omega C (j\omega L_2 + 1/j\omega C) = R + j\omega L_1 + j\omega L_2 / (1 - \omega^2 L_2 C) = R_{\text{вх}} + jX_{\text{вх}}.$$

По отношение на входа на веригата, от условието за напрежителен резонанс $X_{\text{вх}} = 0$, за резонансната честота ω_H се получава:

$$\omega_H = \sqrt{(L_1 + L_2) / L_1 L_2 C} = 707 \text{ s}^{-1}.$$

За входното съпротивление $Z_{\text{вх}}$ на веригата при напрежителен резонанс се записва: $Z_{\text{вх}} = R_{\text{вх}} = R = 2 \text{ }\Omega$.

За комплексните токове се получава: $\dot{I}_1 = \dot{U} / Z_{\text{вх}} = 10 \text{ A}$;

$$\dot{I}_2 = \dot{I}_1 / j\omega C (j\omega L_2 + 1/j\omega C) = -10 \text{ A}; \quad \dot{I}_3 = \dot{I}_1 j\omega L_2 / (j\omega L_2 + 1/j\omega C) = 20 \text{ A}.$$

Зад.5.2. Да се определи резонансната честота за веригата, показана на фиг.5.2, ако: $L_1 = 9 \text{ mH}$; $L_2 = 4 \text{ mH}$; $M = 2 \text{ mH}$ и $C = 0,2 \text{ }\mu\text{F}$.

Решение:

За опростяване на решението се елиминира индуктивната връзка (фиг.5.3).

За съпротивленията Z_{bc} и Z_{ac} на веригата от фиг.5.3 се записва:

$$Z_{\text{bc}} = j\omega_0 M \cdot j\omega_0 (L_2 - M) / (j\omega_0 M + j\omega_0 L_2 - j\omega_0 M) = j\omega_0 M (L_2 - M) / L_2;$$

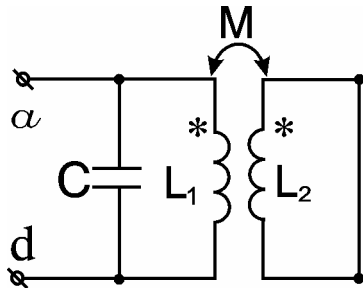
$$Z_{\text{ac}} = Z_{\text{ab}} + Z_{\text{bc}} = j\omega_0 (L_1 - M) + j\omega_0 M (L_2 - M) / L_2 = j\omega_0 (L_1 L_2 - M^2) / L_2.$$

След определяне на съпротивлението Z_{ac} , схемата от фиг.5.3 може да бъде опростена - фиг.5.4.

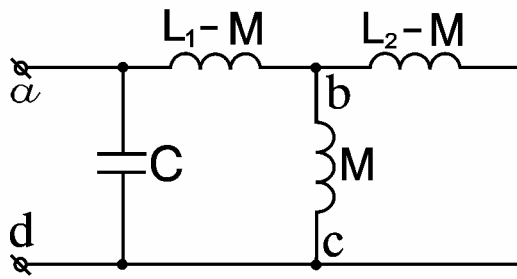
За входната проводимост $Y_{\text{вх}}$ на веригата от фиг.5.4 се записва:

$$Y_{\text{вх}} = j\omega_0 C + 1/Z_{\text{ac}} = j\omega_0 C + L_2 / j\omega_0(L_1 L_2 - M^2) = -j B_{\text{вх}}.$$

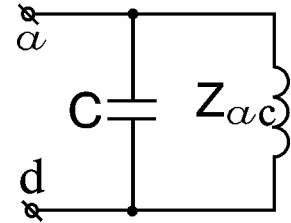
От условието за токов резонанс $B_{\text{вх}} = 0$ за резонансната честота ω_0 се получава: $\omega_0 = \sqrt{L_2 / C(L_1 L_2 - M^2)} = 2,5 \cdot 10^4 \text{ s}^{-1}$.



Фиг.5.2



Фиг.5.3



Фиг.5.4

Зад.5.3. Параметрите на веригата, показана на фиг.5.5, са: $R_1 = 10 \Omega$; $C_1 = 50 \mu\text{F}$; $L_2 = 10 \text{ mH}$; $R_2 = 20 \Omega$; $R_3 = 20 \Omega$; $C_4 = 500 \mu\text{F}$ и $L_5 = 2 \text{ mH}$. Да се определят показанията на волтметъра V и на амперметъра A_1 , ако показанието на волтметъра V_1 е $U_{V1} = 100 \text{ V}$, а токът през амперметъра A е равен на нула.

Решение:

По условие токът $i_A = 0$. Това означава, че паралелно свързаните елементи L_5 и C_4 са в режим на токов резонанс. За резонансната честота ω_0 се записва:

$$\omega_0 = 1/\sqrt{L_5 C_4} = 10^3 \text{ s}^{-1}.$$

Тъй като токът $i_A = 0$, то токът i_{R_2} през резистора R_2 ще бъде равен на входния ток i на веригата, т.е. $i_{R_2} = i$. В такъв случай за ефективната му стойност I може да се запише: $I = U_{V1} / R_2 = 5 \text{ A}$.

Входното съпротивление $Z_{\text{вх}}$ на веригата в случая е:

$$Z_{\text{вх}} = R_1 + 1/j\omega_0 C + Z_{12} = R_1 + 1/j\omega_0 C + R_3 j\omega_0 L_2 / (R_3 + j\omega_0 L_2) + R_2 = 36 \cdot e^{-j10^\circ 28'} \Omega.$$

За показаниято на волтметъра V на входа на веригата се получава:

$$U = z_{\text{вх}} I = 180, \text{ V}.$$

За напрежението U_{12} се записва: $U_{12} = z_{12} \cdot I = 126,5, \text{ V}$.

Оттук за тока I_5 се получава: $I_5 = I_{A1} = U_{12} / \omega_0 L_5 = 63,25, \text{ A}$.

Зад.5.4. За веригата, показана на фиг.5.6, $R_1 = 2,7 \Omega$; $C = 318 \mu\text{F}$; $L = 286 \mu\text{H}$ и $U = 30 \text{ V}$. Да се определи съпротивлението R_2 , при което при честота $f = 500 \text{ Hz}$ във веригата възниква напрежителен резонанс. Да се определят също така токовете в клоновете на веригата при напрежителния резонанс.

Упътване:

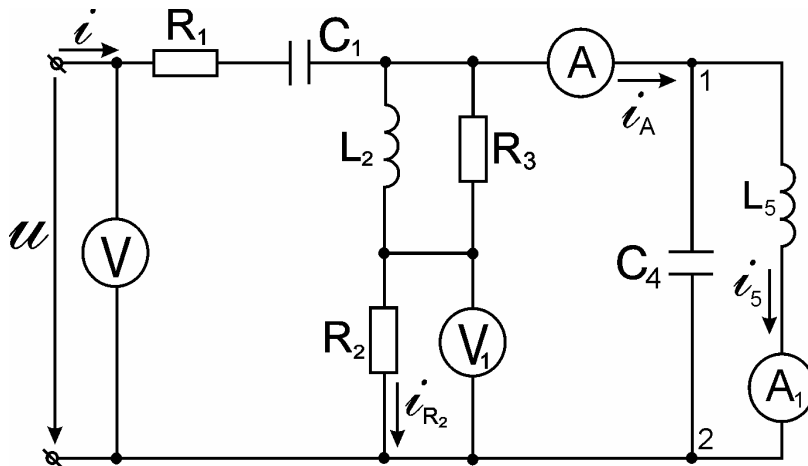
При известна резонансна честота $\omega_0 = 2\pi f_0$, се определят съпротивленията $X_L = \omega_0 L = 0,9 \Omega$ и $X_C = 1/\omega_0 C = 1 \Omega$.

От условието за напрежителен резонанс $X_{BX} = 0$ се определя $R_2 = 3 \Omega$.

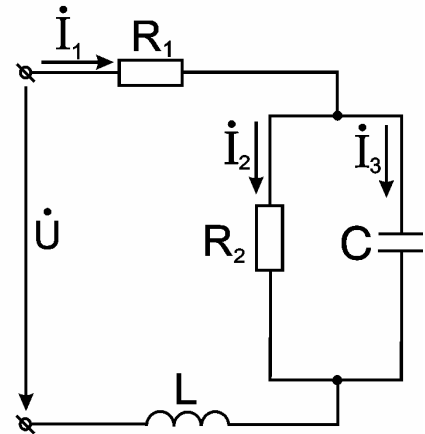
Оттук, като се има предвид, че при напрежителен резонанс $Z_{BX} = R_{BX} = 3 \Omega$, за тока \dot{I}_1 на входа на веригата се получава: $\dot{I}_1 = \dot{U} / R_{BX} = 10 \text{ A}$.

Стойностите на токовете \dot{I}_2 и \dot{I}_3 в паралелните клонове са:

$$\dot{I}_2 = 3,16e^{-j71^\circ 35'} \text{ A} \text{ и } \dot{I}_3 = 9,5 \cdot e^{j18^\circ 25'} \text{ A}.$$



Фиг.5.5



Фиг.5.6

Зад.5.5. На фиг.5.7. е изобразено паралелно съединение на бобина със загуби с параметри L и $R_1 = 5 \Omega$ и кондензатор със загуби с параметри $C = 10 \mu\text{F}$ и $R_2 = 100 \Omega$. Да се определи при каква индуктивност L във веригата възниква токов резонанс. Да се определят също така входната проводимост на веригата и токът през кондензатора при токов резонанс, ако входното напрежение е: $u(t) = \sqrt{2} \cdot 220 \cdot \sin 8000 t$, V.

Упътване:

От условието за токов резонанс $B_{BX} = 0$ се получава квадратно уравнение по отношение на индуктивността L . Съответните стойности на входната проводимост са: $G_{BX1} = 0,05 \text{ S}$ и $G_{BX2} = 0,17 \text{ S}$. За тока през кондензатора се получава:

$$i_C(t) = 22,63 \cdot \sin(8000 t + \pi/2) \text{ A}, \text{ а за } L \text{ се получават: } L' = 1,25 \text{ mH} \text{ и } L'' = 0,3125 \text{ mH}.$$

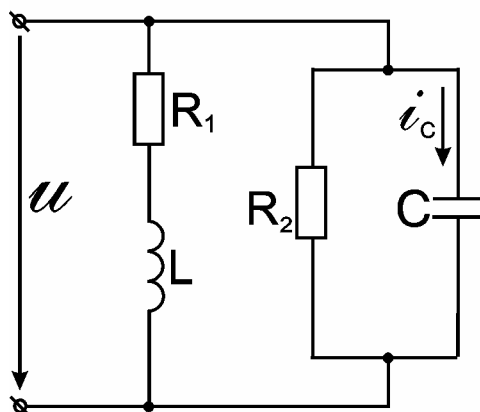
Зад.5.6. За веригата, показана на фиг.5.8, $R_2 = 8 \Omega$, $X_{L2} = 6 \Omega$; $R_3 = 12 \Omega$ и $X_{C3} = 5 \Omega$. Да се определят характерът и стойността на съпротивлението Z_1 , при които показаниято на ватметъра W ще бъде максимално. Да се определи това показание при входно напрежение $U = 110 \text{ V}$.

Упътване:

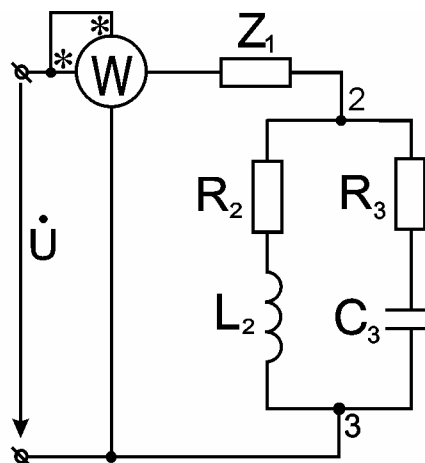
За постигане на максимално показание на ватметъра W е необходимо веригата да бъде в режим на напрежителен резонанс. За целта, като се използва условието $X_{BX} = 0$, при зададените стойности на параметрите на елементите на веригата се получава, че Z_1 трябва да бъде чисто реактивно и стойността му да бъде равна на: $Z_1 = -j X_{C1} = -j1,28 \Omega$.

Тогава: $Z_{BX} = R_{BX} = 6,36 \Omega$.

За показаниято на ватметъра W се получава: $P_{Wmax} \approx 1,9 \text{ kW}$.



Фиг.5. 7



Фиг.5.8

Зад. 5.7. За веригата, показана на фиг.5.8, $Z_1 = R_1 = 10 \Omega$; $R_2 = R_3 = 10 \Omega$; $L_2 = 4 \text{ mH}$. Да се определи стойността на капацитета C_3 , при която показаниято на ватметъра W ще бъде минимално. Да се определи това показание при входно напрежение $U = 100 \text{ V}$.

Упътване:

За постигане на минимално показание на ватметъра W е необходимо в паралелно съединените клонове на веригата да бъде осъществен режим на токов резонанс.

Тъй като резонансната честота ω_0 (формула (5.10)) не е зададена еднозначно, решение за капацитета C_3 може да се получи за случая на резонанс при всички честоти. От условието за такъв резонанс: $R_2 = R_3 = \rho = \sqrt{L_2 / C_3}$ се намира $C_3 = 4 \mu\text{F}$ и $Y_{23} = G_{23} = 1/\rho = 0,1 \text{ S}$.

Тогава: $R_{\text{вх}} = R_1 + R_{23} = R_1 + 1/G_{23} = 20 \Omega$.

За показаниято на ватметъра се получава: $P_{W\text{min}} = 500 \text{ W}$.

6. ПЕРИОДИЧНИ НЕСИНУСОИДАЛНИ ПРОЦЕСИ В ЛИНЕЙНИ ЕЛЕКТРИЧЕСКИ ВЕРИГИ

ОБЩИ ПОЛОЖЕНИЯ

Анализът на периодичните несинусоидални процеси в линейни електрически вериги може да бъде извършен по следния алгоритъм:

1. Определя се хармоничният състав на е.д.н. $e(t)$, токовете $J(t)$ или напреженията $u(t)$ на захранващите източници:

$$e(t) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{(k)}; J(t) = \sum_{k=0}^{\infty} J^{(k)}; u(t) = \sum_{k=0}^{\infty} u^{(k)}, \quad (6.1)$$

където $e^{(k)}$, $J^{(k)}$ и $u^{(k)}$ са k -тите хармоници на $e(t)$, $J(t)$ и $u(t)$ в реда на Фурие.

2. Решава се веригата поотделно за постоянната съставка ($k = 0$) и за всеки хармоник ($k = 1 \dots \infty$).

Забележки:

1. При решаване на веригата за постоянната съставка трябва да се има предвид, че бобините са с нулево съпротивление (късо съединение), а кондензаторите – с безкрайно голямо съпротивление (прекъсване на веригата).

2. При решаване на веригата за кой да е от хармониците е целесъобразно да се използва комплексният метод:

а) например, за комплексните съпротивления на бобините $Z_L^{(k)}$ и на кондензаторите $Z_C^{(k)}$ за k -тия хармоник се записва:

$$Z_L^{(k)} = jk\omega L; Z_C^{(k)} = 1/jk\omega C. \quad (6.2)$$

В случай, че е зададено е.д.н. $e(t)$, комплексната амплитуда на k -тия му хармоник $e^{(k)} = E_m^{(k)} \cdot \sin[k\omega t + \Psi_e^{(k)}]$ е:

$$\dot{E}_m^{(k)} = E_m^{(k)} e^{j\Psi_e^{(k)}}. \quad (6.3)$$

б) при известни $\dot{E}_m^{(k)}$ и $Z^{(k)}$ се определят комплексните амплитуди на k -тия хармоник на търсените величини.

в) по-нататък се записват моментните стойности на k -тия хармоник на търсените величини. Например, при известен $\dot{I}_{m_s}^{(k)}$, за k -тия хармоник на тока в клоната с номер s се записва:

$$i_s^{(k)} = I_{m_s}^{(k)} \sin(k\omega t + \psi_{i_s}^{(k)}), \quad (6.4)$$

където $I_{m_s}^{(k)}$ е модулът, а $\psi_{i_s}^{(k)}$ е аргументът на $\dot{I}_{m_s}^{(k)}$.

3. Намират се моментните стойности на търсените величини чрез сумиране на постоянната им съставка и моментните стойности на съответните им хармоници.

4. Изчисляват се ефективните стойности на търсените величини.

Например, за I_S на тока $i_s(t)$ се записва:

$$I_S = \sqrt{I_S^{(0)^2} + \frac{I_{m_s}^{(1)^2} + \dots + I_{m_s}^{(k)^2} + \dots}{2}}. \quad (6.5)$$

5. Активната мощност в клоната с номер s се определя по формулата:

$$P_S = U_S^{(0)} \cdot I_S^{(0)} + \sum_{k=1}^{\infty} U_S^{(k)} \cdot I_S^{(k)} \cos \varphi_S^{(k)}, \quad (6.6)$$

където $U_S^{(k)}$, $I_S^{(k)}$ са ефективните стойности на k -тия хармоник на напрежението и тока за клоната s , а $\varphi_S^{(k)}$ - фазовата разлика между тях.

Активната мощност за k -тия хармоник може да бъде изчислена и като се използва изразът:

$$P_S^{(k)} = \operatorname{Re}[\dot{U}_S^{(k)} \cdot I_S^{(k)*}], \quad (6.7)$$

където $\dot{U}_S^{(k)}$ е комплексната ефективна стойност на напрежението, а $\dot{I}_S^{(k)}$ е спрегнатата комплексна ефективна стойност на тока на k -тия хармоник на клоната s .

Зад.6.1. За показаната на фиг.6.1 електрическа верига $R = 40 \Omega$ и $1/\omega C = 30 \Omega$. Да се определят моментните и ефективните стойности на тока във веригата и на напрежението върху кондензатора, ако входното напрежение е:

$$u(t) = 5 + 10 \cdot \sin(\omega t + 45^\circ) + 15 \cdot \sin 3\omega t, \text{ V.}$$

Решение:

1/ Определяне на постоянните съставки

$$i^{(0)} = 0, \text{ A} \quad \text{и} \quad u_C^{(0)} = u^{(0)} = 5, \text{ V.}$$

2/ Определяне на първите хармоници

За комплексните амплитуди на тока $\dot{I}_m^{(1)}$ във веригата и напрежението върху кондензатора $\dot{U}_{Cm}^{(1)}$ се записва:

$$\dot{I}_m^{(1)} = \dot{U}_m^{(1)} / Z^{(1)} = 0,2 \cdot e^{j 81^\circ 52'}, \text{ A}; \quad \dot{U}_{Cm}^{(1)} = \dot{I}_m^{(1)} / j\omega C = 6 \cdot e^{-j 8^\circ 8'}, \text{ V,}$$

където $\dot{U}_m^{(1)} = 10 e^{j 45^\circ}$, V и $Z^{(1)} = R - j / \omega C$.

3/ Определяне на третите хармоници

За комплексните амплитуди на тока $\dot{I}_m^{(3)}$ и на напрежението върху кондензатора $\dot{U}_{Cm}^{(3)}$ се записва:

$$\dot{I}_m^{(3)} = \dot{U}_m^{(3)} / Z^{(3)} = 0,36 \cdot e^{j 14^\circ}, \text{ A}; \quad \dot{U}_{Cm}^{(3)} = \dot{I}_m^{(3)} / j 3\omega C = 3,6 \cdot e^{-j 76^\circ}, \text{ V,}$$

където $\dot{U}_m^{(3)} = 15 \text{ V}$ и $Z^{(3)} = R - j / 3\omega C$.

За моментните стойности на тока $i(t)$ и напрежението $u_C(t)$ се записва:

$$i(t) = i^{(0)} + i^{(1)} + i^{(3)} = 0,2 \cdot \sin(\omega t + 81^\circ 52') + 0,36 \cdot \sin(3\omega t + 14^\circ), \text{ A};$$

$$u_C(t) = u_C^{(0)} + u_C^{(1)} + u_C^{(3)} = 5 + 6 \cdot \sin(\omega t - 8^\circ 8') + 3,6 \cdot \sin(3\omega t - 76^\circ), \text{ V.}$$

Ефективните стойности на същите величини са:

$$I = \sqrt{(i^{(0)})^2 + ((I_m^{(1)})^2 + (I_m^{(3)})^2) / 2} = \sqrt{(0,2^2 + 0,36^2) / 2} = 0,29, \text{ A};$$

$$U = \sqrt{(U_C^{(0)})^2 + ((U_{Cm}^{(1)})^2 + (U_{Cm}^{(3)})^2) / 2} = \sqrt{5^2 + (6^2 + 3,6^2) / 2} = 7,03, \text{ V.}$$

Зад.6.2. За веригата, показана на фиг.6.2, $R = 2 \Omega$ и $\omega L = 1 \Omega$. Да се определят моментните и ефективните стойности на входното напрежение и на тока през бобината, ако токът на входа на веригата е: $i(t) = 2 + 6.\sin(2\omega t - 30^\circ) + 8.\sin 4\omega t$, А.

Решение:

1/ Определяне на постоянните съставки

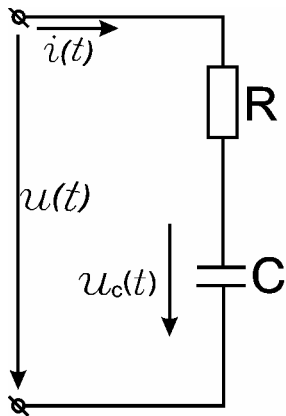
$$u^{(0)} = 0, \text{ V}; i_L^{(0)} = i^{(0)} = 2, \text{ A.}$$

2/ Определяне на вторите хармоници

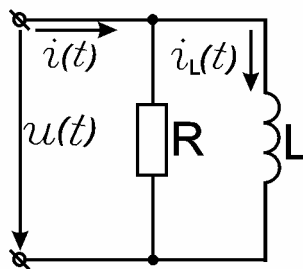
За комплексните амплитуди на входното напрежение $\dot{U}_m^{(2)}$ и на тока $\dot{I}_{mL}^{(2)}$ през бобината се записва:

$$\dot{U}_m^{(2)} = \dot{I}_m^{(2)} / Y^{(2)} = 8,51.e^{j15^\circ}, \text{ V, където } \dot{I}_m^{(2)} = 6.e^{-j30^\circ}, \text{ A и } Y^{(2)} = 1/R + 1/j2\omega L;$$

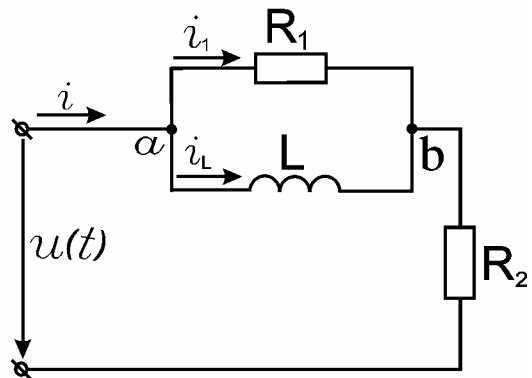
$$\dot{I}_{mL}^{(2)} = \dot{U}_m^{(2)} / j2\omega L = 4,24.e^{-j75^\circ}, \text{ A.}$$



Фиг.6.1



Фиг.6.2



фиг.6.3

3/ Определяне на четвъртите хармоници

За комплексните амплитуди на входното напрежение $\dot{U}_m^{(4)}$ и на тока $\dot{I}_{mL}^{(4)}$ през бобината се записва:

$$\dot{U}_m^{(4)} = \dot{I}_m^{(4)} / Y^{(4)} = 14,31.e^{j26^\circ 34'}, \text{ V, където } \dot{I}_m^{(4)} = 8 \text{ A и } Y^{(4)} = 1/R + 1/j4\omega L;$$

$$\dot{I}_{mL}^{(4)} = \dot{U}_m^{(4)} / j4\omega L = 3,6.e^{-j63^\circ 26'}, \text{ A.}$$

За моментните стойности на входното напрежение $u(t)$ и на тока $i_L(t)$ през бобината се записва:

$$u(t) = u^{(0)} + u^{(2)} + u^{(4)} = 8,51.\sin(2\omega t + 15^\circ) + 14,31.\sin(4\omega t + 26^\circ 34'), \text{ V};$$

$$i_L(t) = i_L^{(0)} + i_L^{(2)} + i_L^{(4)} = 2 + 4,24.\sin(2\omega t - 75^\circ) + 3,6.\sin(4\omega t - 63^\circ 26'), \text{ A.}$$

За ефективните стойности на същите величини се получава:

$$U = 11,77 \text{ V и } I_L = 4,41 \text{ A.}$$

Зад.6.3. За показаната на фиг.6.3. електрическа верига $R_1 = R_2 = 10 \Omega$ и $\omega L = 10 \Omega$. Да се определят моментните и ефективните стойности на напрежението и на тока на входа на веригата, ако токът през бобината е:
 $i_L(t) = 1 + 0,2 \cdot \sin(\omega t - 60^\circ) + 0,1 \cdot \sin 4\omega t$, A.

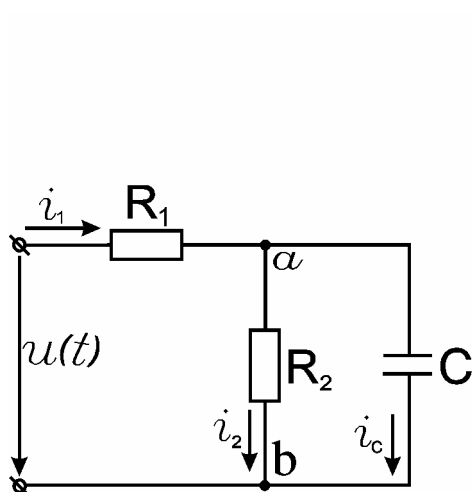
Упътване:

За отделните хармоници последователно се определят напрежението между точките а и b, токът през резистора R_1 , входният ток и входното напрежение.

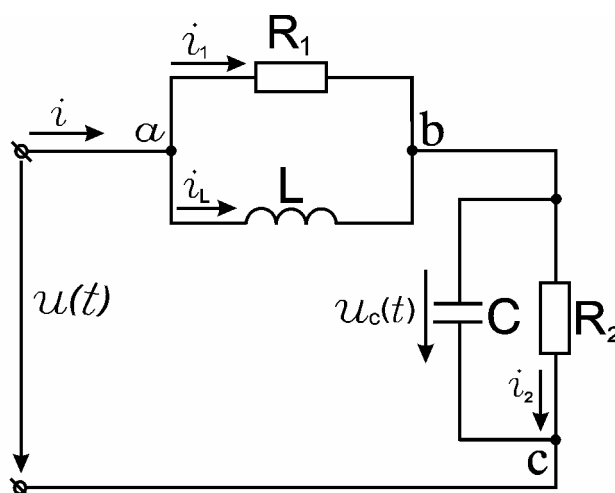
Отговори:

$$i(t) = 1 + 0,28 \cdot \sin(\omega t - 15^\circ) + 0,41 \cdot \sin(4\omega t + 75^\circ 58')$$

$$u(t) = 10 + 4,47 \cdot \sin(\omega t + 3^\circ 26') + 8,06 \cdot \sin(4\omega t + 82^\circ 52')$$



фиг.6.4



фиг.6.5

Зад.6.4. За показаната на фиг.6.4 електрическа верига $R_1 = 10 \Omega$; $R_2 = 2 \Omega$ и $1/\omega C = 2 \Omega$. Да се определят моментните и ефективните стойности на напрежението и на тока на входа на веригата, ако токът през резистора R_2 е:

$$i_2(t) = 2 + 1 \cdot \sin 2\omega t + 0,5 \cdot \sin(5\omega t - 30^\circ)$$

Упътване:

За отделните хармоници последователно се определят напрежението между точки а и b, токът през кондензатора C, токът и напрежението на входа на веригата.

Отговори:

$$i_1(t) = 2 + 2,24 \cdot \sin(2\omega t + 63^\circ 26') + 2,55 \cdot \sin(5\omega t + 48^\circ 41')$$

$$u(t) = 24 + 23,32 \cdot \sin(2\omega t + 59^\circ 21') + 25,7 \cdot \sin(5\omega t + 46^\circ 30')$$

Зад.6.5. За веригата, показана на фиг.6.5, $R_1 = R_2 = 10 \Omega$; $\omega L = 5 \Omega$ и $1/\omega C = 20 \Omega$. Да се определят моментните и ефективните стойности на тока през бобината и напрежението върху кондензатора, ако входното напрежение е:
 $u(t) = 3 + 4 \cdot \sin 2\omega t + 5 \cdot \sin(4\omega t + 45^\circ)$, V.

Отговори:

$$i_L(t) = 0,3 + 0,28 \cdot \sin(2\omega t - 45^\circ) + 0,22 \cdot \sin(4\omega t - 18^\circ 25')$$

$$u_C(t) = 3 + 2,83 \cdot \sin(2\omega t - 45^\circ) + 2,24 \cdot \sin(4\omega t - 18^\circ 25')$$

Зад.6.6. За веригата, показана на фиг.6.6, $R_1 = 1 \Omega$; $R_2 = 2 \Omega$; $\omega L_1 = 1 \Omega$; $\omega L_2 = 2 \Omega$ и $\omega M = 1 \Omega$. Да се определят показанията на волтметрите V_1 и V_2 (уредите отчитат ефективни стойности), ако токът на източника на ток е:
 $J_1(t) = 2 + 3 \cdot \sin(\omega t + 45^\circ) + \sin(2\omega t + 90^\circ)$, А.

Решение:

1/ Определяне на постоянните съставки

$$U_{ab}^{(0)} = J_1^{(0)} \cdot R_1 = 2 \text{ V} \quad \text{и} \quad U_{cd}^{(0)} = 0, \text{ V, където } J_1^{(0)} = 2 \text{ A.}$$

2/ Определяне на първите хармоници

За комплексните амплитуди на тока $\dot{I}_{m_2}^{(1)}$ и на напреженията $\dot{U}_{m_{ab}}^{(1)}$ и $\dot{U}_{m_{cd}}^{(1)}$ се записва:

$$\dot{I}_{m_2}^{(1)} = -j\omega M \cdot \dot{J}_{m_1}^{(1)} / (R_2 + j\omega L_2) = -j1,06 = 1,06 \cdot e^{-j90^\circ}, \text{ A};$$

$$\dot{U}_{m_{ab}}^{(1)} = (R_1 + j\omega L_1) \cdot \dot{J}_{m_1}^{(1)} + j\omega M \cdot \dot{I}_{m_2}^{(1)} = 1,06 + j4,23 = 4,36 \cdot e^{j75^\circ 56'}, \text{ V};$$

$$\dot{U}_{m_{cd}}^{(1)} = -R_2 \cdot \dot{I}_{m_2}^{(1)} = j2,1 = 2,1 \cdot e^{j90^\circ}, \text{ V},$$

където $\dot{J}_{m_1}^{(1)} = 3 \cdot e^{j45^\circ}$, А.

3/ Определяне на вторите хармоници

За комплексните амплитуди на тока $\dot{I}_{m_2}^{(2)}$ и на напреженията $\dot{U}_{m_{ab}}^{(2)}$ и $\dot{U}_{m_{cd}}^{(2)}$ се записва:

$$\dot{I}_{m_2}^{(2)} = -j2\omega M \cdot \dot{J}_{m_1}^{(2)} / (R_2 + j2\omega L_2) = 0,2 - j0,4 = 0,447 \cdot e^{-j63^\circ 26'}, \text{ A};$$

$$\dot{U}_{m_{ab}}^{(2)} = (R_1 + j2\omega L_1) \cdot \dot{J}_{m_1}^{(2)} + j2\omega M \cdot \dot{I}_{m_2}^{(2)} = -1,2 + j1,4 = 1,84 \cdot e^{j130^\circ 36'}, \text{ V};$$

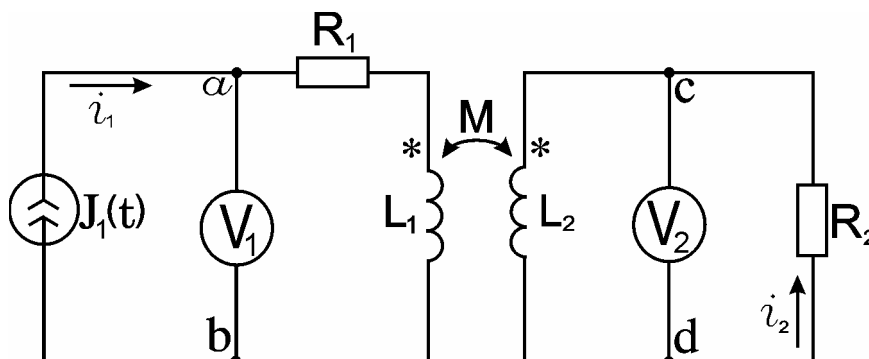
$$\dot{U}_{m_{cd}}^{(2)} = -R_2 \cdot \dot{I}_{m_2}^{(2)} = -0,4 + j0,8 = 0,89 \cdot e^{j116^\circ 33'}, \text{ V},$$

където $\dot{J}_{m_1}^{(2)} = j1$, А.

За показанията на двата волтметра се записва:

$$U_{V_1} = U_{ab} = \sqrt{(U_{ab}^{(0)})^2 + ((U_{m_{ab}}^{(1)})^2 + (U_{m_{ab}}^{(2)})^2) / 2} = \sqrt{2^2 + (4,36^2 + 1,84^2) / 2} = 3,898 \text{ V};$$

$$U_{V_2} = U_{cd} = \sqrt{(U_{cd}^{(0)})^2 + ((U_{m_{cd}}^{(1)})^2 + (U_{m_{cd}}^{(2)})^2) / 2} = \sqrt{0 + (2,1^2 + 0,89^2) / 2} = 1,62 \text{ V}.$$



фиг.6.6

Зад.6.7. За веригата, показана на фиг.6.7, $R_1 = 10 \Omega$; $\omega L_1 = 1 \Omega$; $1/\omega C_1 = 9 \Omega$; $\omega L_2 = 1 \Omega$ и $1/\omega C_2 = 1 \Omega$. Да се определи токът през резистора R_1 , ако входното напрежение е: $u(t) = 10\sin\omega t + 30\sin 3\omega t$, V.

Решение:

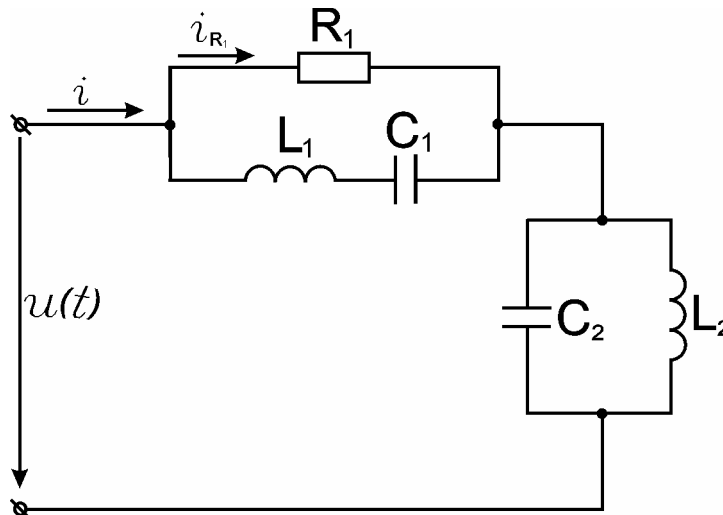
1) Определяне на първия хармоник

Тъй като $1/\omega L_2 = \omega C_2$, то $B_2^{(1)} = 0$, т.е. $Y_2^{(1)} = 0$ или $Z_2^{(1)} = \infty$. Следователно има резонанс на токовете. Оттук следва, че $i_{R_1}^{(1)} = 0$ A, тъй като $i^{(1)} = 0$, A.

2) Определяне на третия хармоник

Тъй като $3\omega L_1 = 1/3\omega C_1$, то $X_1^{(3)} = 0$, т.е. $Z_1^{(3)} = 0$. Следователно има резонанс на напреженията. Оттук следва, че: $i_{R_1}^{(3)} = 0$, A.

Окончателно се получава: $i_{R_1}(t) = i_{R_1}^{(1)} + i_{R_1}^{(3)} = 0$, A.



фиг.6.7

7. ПРЕХОДНИ ПРОЦЕСИ В ЛИНЕЙНИ ЕЛЕКТРИЧЕСКИ ВЕРИГИ СЪС СЪСРЕДОТОЧЕНИ ПАРАМЕТРИ ПРИ ВЪЗДЕЙСТВИЕ НА ПОСТОЯННИ И ХАРМОНИЧНИ ИЗТОЧНИЦИ НА НАПРЕЖЕНИЕ И ТОК

ОБЩИ ПОЛОЖЕНИЯ

КЛАСИЧЕСКИ МЕТОД

Алгоритъмът на метода е следният:

1. Записва се общият вид на търсената величина $y(t)$:

$$y(t) = y'(t) + y''(t), \quad (7.1)$$

където $y'(t)$ е установената ѝ съставка;

$y''(t)$ - преходната (свободната) ѝ съставка.

2. По законите на Кирхоф се записва системата диференциални уравнения на веригата за след комутацията.

3. Намира се характеристичното уравнение на веригата. Това може да се извърши по следните начини:

а) чрез изключване на отделните променливи - получава се диференциалното уравнение за търсената величина $y(t)$, което има вида:

$$\sum_{s=0}^n a_s \frac{d^s y(t)}{dt^s} = f_k(t), \quad (7.2)$$

където n е редът на диференциалното уравнение;

a_s - постоянният коефициент;

$f_k(t)$ - свободният член, съдържащ захранващите източници.

Редът n на уравнение (7.2) се определя от структурата на веригата, т.е. от вида на елементите, начина на свързването им и от параметрите им.

Характеристичното уравнение на (7.2) се получава като $\frac{d^s}{dt^s}$ се заменя с α^s , а

$f_k(t)$ се приравнява на 0:

$$\sum_{s=0}^n a_s \alpha^s = 0; \quad (7.3)$$

б) записва се детерминантата от коефициентите пред неизвестните величини на системата уравнения от т.2, като символът $\frac{d}{dt}$ се заменя с α , символът $\int \dots dt$ - с

α^{-1} , и се приравнява на нула, при което се получава уравнение (7.3).

в) намира се входното операторно съпротивление $Z_{вх}(p)$ на следкомутационната схема за пасивната верига, получена от активната, спрямо два нейни извода. В $Z_{вх}(p)$ операторът p се заменя с α и $Z_{вх}(p)$ се приравнява на нула, при което се получава уравнение (7.3). Съпротивлението $Z_{вх}(p)$ не бива да се определя спрямо изводи, към които е бил включен източник на ток.

Забележка:

Ако (7.2) е от първи ред, т.е. веригата съдържа един реактивен елемент, коренът α на (7.3) се определя по формулата:

$$\alpha = -\tau^{-1}, \quad (7.4)$$

където τ е времеконстантата на веригата.

При реактивен елемент бобина с индуктивност L , $\tau = L/R_e$, а при реактивен елемент кондензатор с капацитет C , $\tau = R_e C$. Съпротивлението R_e се определя като входно съпротивление на пасивната верига спрямо изводите на реактивния й елемент.

4. Намират се корените на уравнение (7.3) и се записва свободната съставка $y''(t)$ на търсената величина $y(t)$.

а) ако корените α_s на (7.3) са реални, различни и еднократни, $y''(t)$ има вида:

$$y''(t) = \sum_{s=1}^n A_s e^{\alpha_s t}, \quad (7.5)$$

където A_s са интеграционните константи;

б) ако (7.3) има корен α_s с кратност m , съставките на $y''(t)$, свързани с този корен, са от вида:

$$y''_l(t) = A_l e^{\alpha_l t}; y''_{l+1}(t) = t A_{l+1} e^{\alpha_l t}, \dots, y''_{l+m-1}(t) = t^{m-1} A_{l+m-1} e^{\alpha_l t}, \quad (7.6)$$

където $A_l, A_{l+1}, \dots, A_{l+m-1}$ са интеграционните константи.

в) ако (7.3) има двойка комплексно спрегнати корени $\alpha_k = \alpha_k + j\omega_k$ и $\alpha_k^* = \alpha_k - j\omega_k$, съставката на $y''(t)$, свързана с тези корени, е от вида:

$$y''_k(t) + y''_{k^*}(t) = y''_k(t) = A_k e^{\alpha_k t} \sin(\omega_k t + \psi_k), \quad (7.7)$$

където A_k и ψ_k са интеграционните константи.

5. Определят се интеграционните константи A_s . Това се извършва в следния ред:

а) намират се независимите начални условия $u_C(0^-)$ и $i_L(0^-)$. За целта се пресмята установеният режим във веригата преди комутацията и се полага $t = 0^-$.

б) определя се установената съставка $y'(t)$. За целта се пресмята установеният режим във веригата след комутацията.

в) намират се стойностите на $y(t)$ и производните й до $n-1$ ред при $t = 0^+$. За целта се използва системата уравнения от т.2 и законите на комутацията:

$$u_C(0^+) = u_C(0^-), \quad i_L(0^+) = i_L(0^-). \quad (7.8)$$

г) записва се системата уравнения за определяне на интеграционните константи. В случай на реални, различни и еднократни корени α_s на (7.3) тази система има вида:

$$\begin{cases} y(0^+) = y'(0^+) + \sum_{s=1}^n A_s \\ \left. \frac{d^m y(t)}{dt^m} \right|_{t=0^+} = \left. \frac{d^m y'(t)}{dt^m} \right|_{t=0^+} + \sum_{s=1}^n \alpha_s^m A_s, \quad m = 1 \dots n-1 \end{cases} \quad (7.9)$$

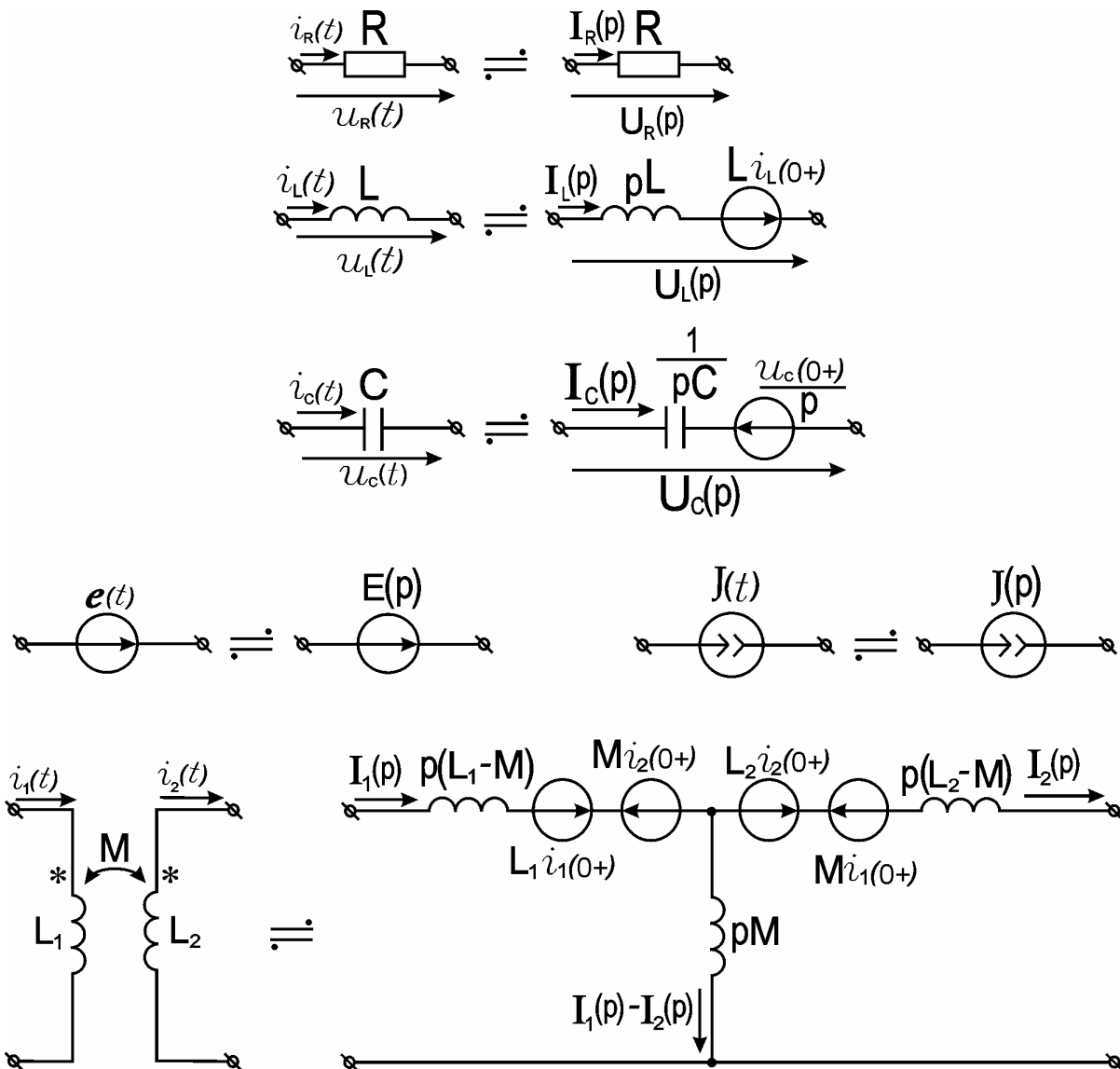
Решава се система (7.9) спрямо интеграционните константи A_s .

ОПЕРАТОРЕН МЕТОД

Алгоритъмът на метода е следният:

1. Намират се независимите начални условия $u_C(0^-)$ и $i_L(0^-)$. За целта се пресмята установеният режим във веригата преди комутацията и се полага $t = 0^-$.

2. Съставя се еквивалентната операторна схема на следкомутационната верига, като всеки елемент се заменя с операторния си еквивалент (фиг.7.0.1).



фиг.7.0.1

3. Определя се операторният образ на търсената величина. Това се извършва от системата уравнения, записана за еквивалентната операторна схема въз основа на методите за пресмятане на сложни вериги, които се основават на законите на Ом (7.10) и Кирхоф (7.11) ... (7.13) в операторен вид:

$$I(p) = \frac{U(p) + \sum E(p) + \sum L i_L(0^+) - \sum \frac{u_C(0^+)}{p}}{Z(p)}; \quad (7)$$

$$\sum_{k=1}^n I_k(p) = 0; \quad (7.11)$$

$$\sum_{k=1}^n E_k(p) + \sum_{k=1}^n L_{kL} i_{Lk}(0+) - \sum_{k=1}^n \frac{u_c(0+)}{p} = \sum_{k=1}^n I_k(p) Z_k(p); \quad (7.12)$$

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^n E_k(p) + \sum_{k=1}^n L_{kL} i_{Lk}(0+) - \sum_{k=1}^n \frac{u_c(0+)}{p} + \sum_{\substack{s=1 \\ s \neq k}}^n M_{ks} i_{Ls}(0+) = \\ & = \sum_{k=1}^n I_k(p) Z_k(p) + \sum_{\substack{s=1 \\ s \neq k}}^n I_s(p) p M_{ks}. \end{aligned} \quad (7.13)$$

4. Определя се оригиналът на търсената величина $y(t)$ по определения в т. 3 операторен образ $Y(p)$. Това може да се извърши по един от следните начини:

а) чрез директно използване на обратното преобразуване на Лаплас (формула на Риман-Мелин);

б) чрез използване на формули от таблицата на операторните съответствия.

В таблица 7.0.1 са дадени операторните образи на най-често срещаните функции. Този метод е удобен при прост израз за $Y(p)$.

Таблица 7.0.1

	Операторен образ	Оригинал
1	A/p	A
2	$\frac{A}{p+a}$	$A e^{\pm at}$
3	$\frac{1}{p \pm j\omega}$	$e^{\mp j\omega t}$
4	$\frac{1}{p(p+a)}$	$\frac{1}{a}(1 - e^{-at})$
5	$\omega/(p^2 + \omega^2)$	$\sin \omega t$
6	$p/(p^2 + \omega^2)$	$\cos \omega t$
7	$(p \cdot \sin \psi + \omega \cdot \cos \psi)/(p^2 + \omega^2)$	$\sin(\omega t + \psi)$
8	$(p \cdot \cos \psi - \omega \cdot \sin \psi)/(p^2 + \omega^2)$	$\cos(\omega t + \psi)$
9	$a/(p^2 + a^2)$	$\text{sh } at$
10	$p/(p^2 - a^2)$	$\text{ch } at$
11	$\frac{(p+a) \cdot \sin \psi + \omega \cdot \cos \psi}{(p+a)^2 + \omega^2}$	$e^{-at} \cdot \sin(\omega t + \psi)$

в) чрез използване на теоремата на разлагане. В този случай $Y(p)$ се представя по следния начин:

$$Y(p) = G(p)/H(p). \quad (7.14)$$

Разлагането на $Y(p)$ на елементарни дроби зависи от вида на корените на $H(p) = 0$. Възможни са следните случаи:

1) корените p_k на $H(p) = 0$ са реални, различни и еднократни:

$$Y(p) = \sum_{k=1}^n \frac{G(p_k)}{H'(p_k)(p-p_k)} \cdot \bullet \quad y(t) = \sum_{k=1}^n \frac{G(p_k)}{H'(p_k)} e^{p_k t}; \quad (7.15)$$

2) $H(p) = 0$ има корен $p_1 = 0$, а останалите корени са реални, различни и еднократни:

$$Y(p) = \frac{G(0)}{H'(0)p} + \sum_{k=2}^n \frac{G(p_k)}{H'(p_k)(p-p_k)} \cdot \bullet \quad y(t) = \frac{G(0)}{H'(0)} + \sum_{k=2}^n \frac{G(p_k)}{H'(p_k)} e^{p_k t}. \quad (7.16)$$

3) $H(p) = 0$ има два чисто имагинерни комплексно спрегнати корена $p_1 = j\omega$, $p_2 = -j\omega$, а останалите корени са реални, различни и еднократни:

$$\begin{aligned} Y(p) &= \frac{G(j\omega)}{H'(j\omega)(p-j\omega)} + \frac{G(-j\omega)}{H'(-j\omega)(p+j\omega)} + \sum_{k=3}^n \frac{G(p_k)}{H'(p_k)(p-p_k)} \cdot \bullet \quad y(t) = \\ &= \frac{G(j\omega)}{H'(j\omega)} e^{j\omega t} + \frac{G(-j\omega)}{H'(-j\omega)} e^{-j\omega t} + \sum_{k=3}^n \frac{G(p_k)}{H'(p_k)} e^{p_k t} = \\ &= 2\operatorname{Re} \left[\frac{G(j\omega)}{H'(j\omega)} e^{j\omega t} \right] + \sum_{k=3}^n \frac{G(p_k)}{H'(p_k)} e^{p_k t}. \end{aligned} \quad (7.17)$$

4) $H(p) = 0$ има корен p_1 с кратност q , а останалите корени са реални и различни. В този случай $Y(p)$ се представя по следния начин:

$$\begin{aligned} Y(p) = \frac{G(p)}{H(p)} &= \frac{G(p)}{(p-p_1)^q H'(p)} = \frac{A_{11}}{p-p_1} + \frac{A_{12}}{(p-p_1)^2} + \dots + \frac{A_{1s}}{(p-p_1)^{q-s+1}} + \dots + \\ &+ \frac{A_{1q}}{(p-p_1)^q} + \frac{A_2}{p-p_2} + \dots + \frac{A_k}{p-p_k} + \dots + \frac{A_n}{p-p_n}, \end{aligned} \quad (7.18)$$

където $A_{1s} = \frac{1}{(q-s)!} \left[\frac{d^{q-s}}{dp^{q-s}} \frac{(p-p_1)^q G(p)}{H(p)} \right]_{p=p_1}$; $A_k = \frac{G(p_k)}{H'(p_k)}$.

Оригиналът на $\frac{A_{1s}}{(p-p_1)^{q-s+1}}$ е: $A_{1s} \cdot \frac{t^{q-s}}{(q-s)!} \cdot e^{p_1 t}$,

а на $\frac{A_k}{p-p_k}$ е: $A_k \cdot e^{p_k t}$.

5) $H(p) = 0$ има два комплексно спрегнати корена $p_1 = \delta + j\omega$, $p_2 = \delta - j\omega$, а останалите корени са реални, различни и еднократни:

$$\begin{aligned} Y(p) &= \frac{G(\delta + j\omega)}{H'(\delta + j\omega)(p-\delta-j\omega)} + \frac{G(\delta - j\omega)}{H'(\delta - j\omega)(p-\delta+j\omega)} + \sum_{k=3}^n \frac{G(p_k)}{H'(p_k)(p-p_k)} \cdot \bullet \\ &\bullet \quad y(t) = 2\operatorname{Re} \left[\frac{G(\delta + j\omega)}{H'(\delta + j\omega)} e^{(\delta + j\omega)t} \right] + \sum_{k=3}^n \frac{G(p_k)}{H'(p_k)} e^{p_k t}. \end{aligned} \quad (7.19)$$

Зад.7.1. Да се определят законите на изменение на тока $i_L(t)$ през бобината и напрежението $u_C(t)$ на кондензатора за верига (фиг.7.1) с параметри: $R = 50 \Omega$; $R_1 = R_2 = 100 \Omega$; $L = 0,15 \text{ H}$ и $C = 20 \mu\text{F}$ след отваряне на ключа k , ако в нея действа източник на постоянно напрежение с $E = 300 \text{ V}$.

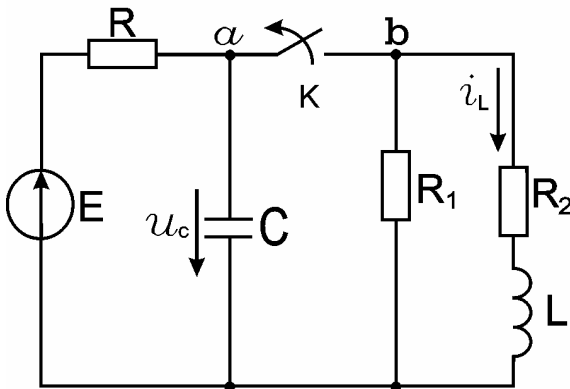
Решение:

А/ Класически метод

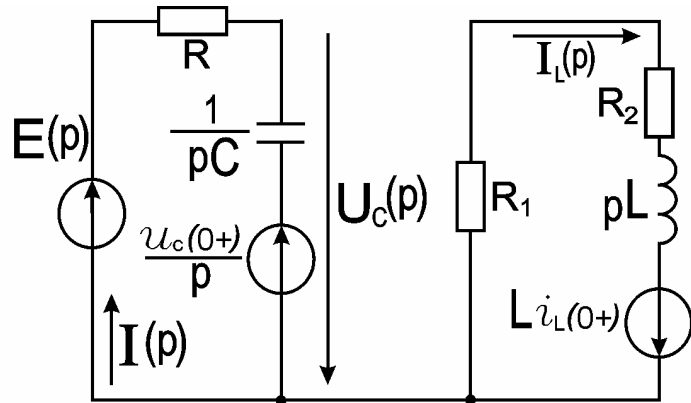
Токовете и напреженията във верига от I ред при въздействие на постоянни и хармонични източници на напрежение и ток са от вида:

$$i(t) = i'(t) + i''(t) = i'(t) + A \cdot e^{\alpha \cdot t} = i'(t) + [i(0+) - i'(0+)] e^{\alpha \cdot t};$$

$$u(t) = u'(t) + u''(t) = u'(t) + B \cdot e^{\alpha \cdot t} = u'(t) + [u(0+) - u'(0+)] e^{\alpha \cdot t}.$$



фиг.7.1



фиг.7.2

1. Определяне на установените съставки i'_L и u'_C за веригата след комутацията:

$$i'_L = 0; u'_C = E = 300 \text{ V}.$$

2. Определяне на началните условия:

$$i_L(0+) = i_L(0-) = \frac{E}{R + \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2}} \cdot \frac{R_1}{R_1 + R_2} = 1,5 \text{ A};$$

$$u_C(0+) = u_C(0-) = i_L(0-) \cdot R_2 = 150 \text{ V}.$$

3. Определяне на характеристичното уравнение и неговите корени

Приравнява се на нула операторното съпротивление на следкомутиционната схема на пасивната верига спрямо два нейни извода, получени при прекъсване в даден клон, след заместване на p с α .

Например, при прекъсване в т.а за веригата с кондензатора и след заместване на p с α се получава уравнението:

$$\alpha CR + 1 = 0 \text{ с корен } \alpha = -1000 \text{ s}^{-1},$$

а при прекъсване в т. b за веригата с бобината уравнението е:

$$\alpha L + (R_1 + R_2) = 0 \text{ с корен } \alpha = -1333 \text{ s}^{-1}.$$

Коренът α на характеристичното уравнение на верига от I ред може да се изрази и чрез времеконстантата τ на веригата :

$$\alpha = -1/\tau = -Re/L \text{ за верига с бобина};$$

$$\alpha = -1/\tau = -1/CR \text{ за верига с кондензатор},$$

където Re е еквивалентното съпротивление на пасивната верига спрямо реактивния елемент L (C).

За веригата с бобината $\tau = L / (R_1 + R_2)$, а за веригата с кондензатора $\tau = RC$.

За $i_L(t)$ и $u_C(t)$ се получават следните изрази:

$$i_L(t) = 1,5 \cdot e^{-1333t}, \text{ A и } u_C(t) = 300 - 150 \cdot e^{-1000t}, \text{ V}.$$

Б/ Операторен метод

1. Определяне на независимите начални условия

Независимите начални условия се намират от установения режим преди комутация:

$$i_L(0+) = i_L(0-) = 1,5 \text{ A} \text{ и } u_C(0+) = u_C(0-) = 150 \text{ V}.$$

2. Съставяне на операторната заместваща схема

Операторната заместваща схема е представена на фиг.7.2.

3. Определяне на операторния образ на търсената величина

Това може да се извърши с помощта на някой от методите за анализ на установени режими.

Например, за контура с бобината от II закон на Кирхоф за тока $I_L(p)$ се получава:

$$I_L(p) = 0,225 / (0,15p + 200),$$

а за контура с кондензатора за $I(p)$ се записва:

$$I(p) = \frac{C [E - u_C(0+)]}{1 + pRC},$$

откъдето за $U_C(p)$ се достига до израза :

$$U_C(p) = \frac{1}{pC} \cdot I(p) + \frac{u_C(0+)}{p} = \frac{150}{p(1 + p \cdot 10^{-3})} + \frac{150}{p}.$$

4. Определяне на оригинала

а) чрез таблицата на съответствието (табл.7.0.1):

$$I_L(p) = \frac{0,225}{p + \frac{200}{0,15}} = \frac{1,5}{p + 1333} \cdot 1,5 \cdot e^{-1333t}, \text{ A} = i_L(t);$$

$$U_C(p) = 150 \cdot 10^3 \cdot \frac{1}{p(p + 10^3)} + \frac{150}{p} = \frac{150 \cdot 10^3}{10^3} (1 - e^{-1000t}) + 150 = 300 - 150 \cdot e^{-1000t}, \text{ V} = u_C(t)$$

б) чрез теоремата на разлагане:

Изразът за тока $I_L(p)$ е:

$$I_L(p) = \frac{G(p)}{H(p)} = \frac{0,225}{0,15p + 200}.$$

Тъй като полиномът $H(p) = 0$ има един корен $p_1 = -1333 \text{ s}^{-1}$, то съгласно теоремата на разлагането:

$$i_L(t) = \frac{G(p_1)e^{p_1 t}}{H'(p_1)} = \frac{0,225e^{-1333t}}{0,15} = 1,5e^{-1333t}, \text{ A}.$$

За напрежението $U_C(p)$ се записва:

$$U_C(p) = \frac{G(p)}{p \cdot H_1(p)} + \frac{u_C(0+)}{p}.$$

Корените на полинома $pH_1(p) = 0$ са $p_1 = 0$ и $p_2 = -1000 \text{ s}^{-1}$.

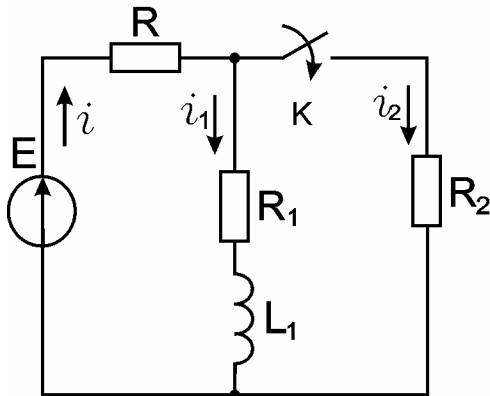
Съгласно теоремата на разлагане за напрежението $u_C(t)$ се получава:

$$u_C(t) = \frac{G(0)}{H_1(0)} + \frac{G(-1000) \cdot e^{-1000t}}{(-1000) \cdot H_1'(-1000)} + \frac{u_C(0+)}{1} = 150 - 150 \cdot e^{-1000t} + 150 = 300 - 150e^{-1000t}, \text{ V}.$$

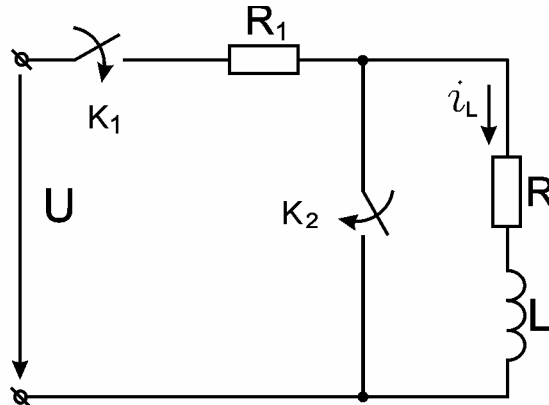
Зад.7.2. Да се определят законите на изменение на токовете $i(t)$, $i_1(t)$ и $i_2(t)$ след затваряне на ключа k във верига (фиг.7.3) с параметри: $R = 10 \Omega$; $R_1 = 5 \Omega$; $R_2 = 30 \Omega$ и $L_1 = 2 \text{ H}$, ако в нея действа източник на постоянно напрежение $E = 30 \text{ V}$.

Отговори:

$$i(t) = 2,1 + 0,15e^{-6,25t}, \text{ A}; \quad i_1(t) = 1,8 + 0,2e^{-6,25t}, \text{ A} \quad \text{и} \quad i_2 = 0,3 - 0,05e^{-6,25t}, \text{ A}.$$



фиг.7.3.



фиг.7.4.

Зад.7.3. При отворен ключ k_2 се затваря ключът k_1 и верига (фиг.7.4.) се включва към източник на постоянно напрежение U . След време $t = t_1$ след затварянето на ключа k_1 , се затваря и ключът k_2 . Да се намери законът на изменение на тока $i_L(t)$ и да се построи кривата $i_L = i_L(t)$.

Упътване:

В момента $t = t_1$ токът i_L се определя от израза:

$$i_L(t_1) = \frac{U}{R + R_1} \left(1 - e^{-\frac{R+R_1}{L}t_1} \right).$$

Отговор:

$$i_L(t) = \frac{U}{R + R_1} \left(1 - e^{-\frac{R+R_1}{L}t_1} \right) \cdot e^{-\frac{R}{L}(t-t_1)}, \text{ A}.$$

Зад.7.4. Да се определят законите на изменение на тока $i_1(t)$ и напрежението на кондензатора $u_C(t)$ във верига (фиг.7.5) с параметри $R_1 = 100 \Omega$; $R_2 = 400 \Omega$ и $C = 5 \mu\text{F}$, ако след затваряне на ключа k тя се включва към източник на постоянно напрежение $U = 200 \text{ V}$.

Отговори:

$$i_1(t) = 0,4 + 1,6e^{-2500t}, \text{ A} \quad \text{и} \quad u_C(t) = 160(1 - e^{-2500t}), \text{ V}.$$

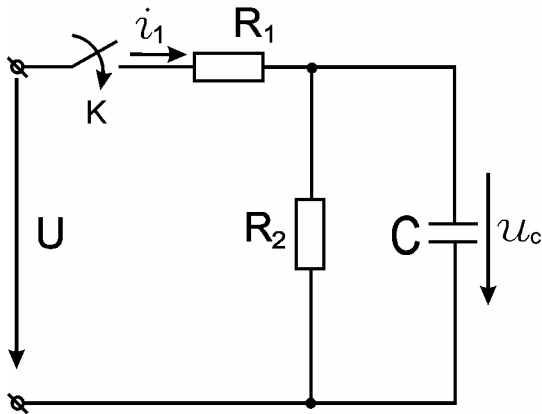
Зад.7.5. Да се определят законите на изменение на тока $i_C(t)$ и напрежението $u_C(t)$ на кондензатора след отваряне на ключа k във верига (фиг.7.6) с параметри: $R_1 = R_2 = R_3 = R_4 = 1 \text{ k}\Omega$ и $C = 0,66 \mu\text{F}$, ако в нея действа източник на постоянно напрежение $E = 150 \text{ V}$.

Упътване:

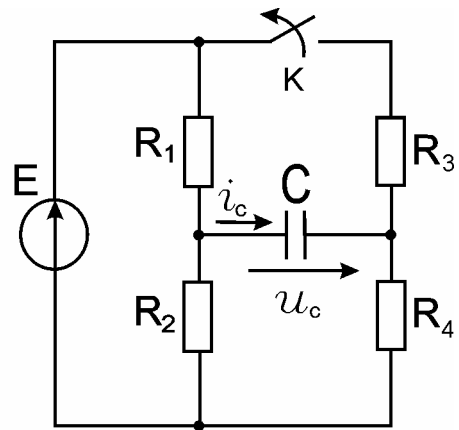
Целесъобразно е първо да се определи напрежението $u_C(t)$, а след това токът $i_C(t)$.

Отговори:

$$u_C(t) = 75 - 75.e^{-1000t}, \text{ V} \quad \text{и} \quad i_C(t) = 0,05.e^{-1000t}, \text{ A}.$$



фиг.7.5.



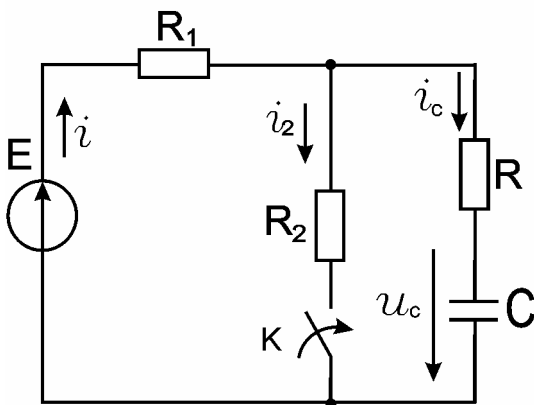
фиг.7.6.

Зад.7.6. Да се определят законите на изменение на токовете $i(t)$, $i_2(t)$, $i_C(t)$ и напрежението на кондензатора $u_C(t)$ след затваряне на ключа K във верига (фиг.7.7) с параметри: $R = 20 \Omega$; $R_1 = 50 \Omega$; $R_2 = 100 \Omega$ и $C = 3 \mu\text{F}$, ако в нея действа източник на постоянно напрежение $E = 24 \text{ V}$.

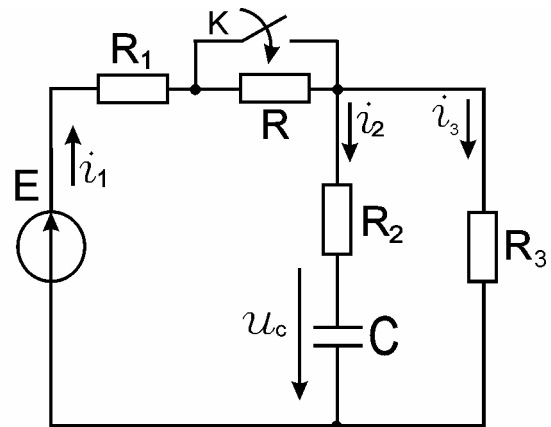
Отговори:

$$i(t) = 0,16 - 0,1.e^{-6,25 \cdot 10^3 t}, \text{ A}; \quad i_2(t) = 0,16 + 0,05.e^{-6,25 \cdot 10^3 t}, \text{ A};$$

$$i_C(t) = -0,15.e^{-6,25 \cdot 10^3 t}, \text{ A} \quad \text{и} \quad u_C(t) = 16 + 8.e^{-6,25 \cdot 10^3 t}, \text{ V}.$$



фиг.7.7



фиг.7.8

Зад.7.7. Да се определят законите на изменение на токовете $i_1(t)$, $i_2(t)$, $i_3(t)$ и напрежението на кондензатора $u_C(t)$ след затваряне на ключа K във верига (фиг.7.8) с параметри: $R = 20 \Omega$; $R_1 = 10 \Omega$; $R_2 = R_3 = 5 \Omega$ и $C = 3 \mu\text{F}$, ако в нея действа източник на постоянно напрежение $E = 35 \text{ V}$.

Отговори:

$$i_1(t) = 2,33 + 0,27 e^{-4 \cdot 10^4 t}, \text{ A}; \quad i_2(t) = 0,8 e^{-4 \cdot 10^4 t}, \text{ A};$$

$$i_3(t) = 2,33 - 0,5 e^{-4 \cdot 10^4 t}, \text{ A} \quad \text{и} \quad u_C(t) = 11,66 - 6,66 e^{-4 \cdot 10^4 t}, \text{ V}.$$

Зад.7.8. Да се определят законите на изменение на токовете $i_1(t)$, $i_2(t)$, $i_3(t)$ и напрежението на кондензатора $u_c(t)$ във верига (фиг.7.9) с параметри: $R_1 = 5 \Omega$; $R_2 = 10 \Omega$; $R_3 = 5 \Omega$; $R_4 = 15 \Omega$ и $C = 1 \mu F$, ако в нея действа източник на постоянно напрежение $E = 15 V$ за два случая: а) след затваряне на ключа k ; б) след отваряне на ключа k .

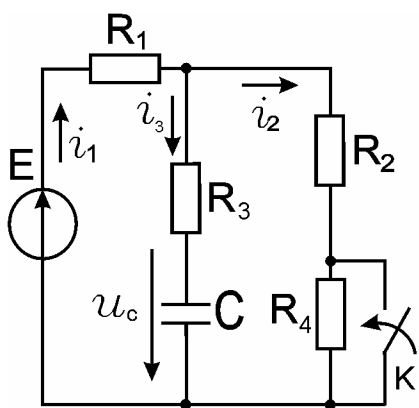
Отговори:

$$\begin{aligned} \text{а) } i_1(t) &= 1 - 0,2 e^{-12 \cdot 10^4 t}, \text{ A}; & i_2(t) &= 1 + 0,1 e^{-12 \cdot 10^4 t}, \text{ A}; \\ i_3(t) &= -0,3 e^{-12 \cdot 10^4 t}, \text{ A}; & u_c(t) &= 10 + 2,5 e^{-12 \cdot 10^4 t}, \text{ V}; \\ \text{б) } i_1(t) &= 3,25 + 0,568 \cdot e^{-1,1 \cdot 10^5 t}, \text{ A}; & i_2(t) &= 1,25 - 0,114 \cdot e^{-1,1 \cdot 10^5 t}, \text{ A}; \\ i_3(t) &= 2 + 0,682 \cdot e^{-1,1 \cdot 10^5 t}, \text{ A}; & u_c(t) &= 31,25 - 2,84 \cdot e^{-1,1 \cdot 10^5 t}, \text{ V}. \end{aligned}$$

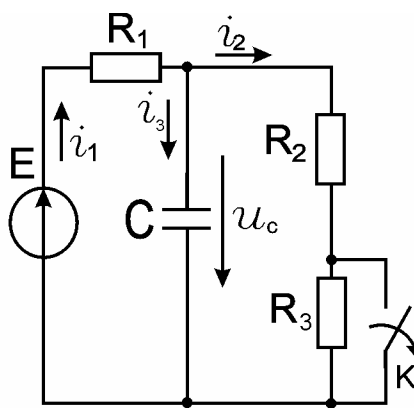
Зад. 7.9. Да се определят законите на изменение на токовете $i_1(t)$, $i_2(t)$, $i_3(t)$ и напрежението на кондензатора $u_c(t)$ след отваряне на ключа k във верига (фиг.7.10) с параметри: $R_1 = 50 \Omega$; $R_2 = 30 \Omega$; $R_3 = 20 \Omega$ и $C = 10 \mu F$, ако в нея действа източник на постоянно напрежение $E = 80 V$.

Отговори:

$$\begin{aligned} i_1(t) &= 0,8 + 0,2 e^{-4000t}, \text{ A}; & i_2(t) &= 0,8 - 0,2 e^{-4000t}, \text{ A}; \\ i_3(t) &= 0,4 e^{-4000t}, \text{ A} & \text{и} & u_c(t) = 40 - 10 e^{-4000t}, \text{ V}. \end{aligned}$$



фиг.7.9



фиг.7.10

Зад.7.10. Да се определи законът на изменение на тока $i_1(t)$ след затваряне на ключа k във верига (фиг.7.11) с параметри: $R_1 = 20 \Omega$; $R_2 = 30 \Omega$; $R_3 = 60 \Omega$ и $L = 159 \text{ mH}$, ако в момента на комутацията той има максимална стойност $I_{1m} = 10 A$. Честотата на източника на синусоидално напрежение $e(t)$ е $f = 50 \text{ Hz}$.

Решение:

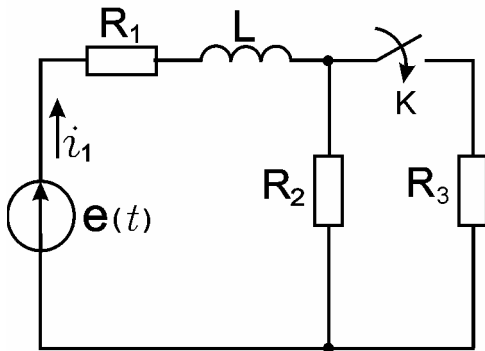
А/ Определяне на $e(t) = E_m \sin(\omega t + \psi_e)$.

Тъй като по условие преди комутацията $i_1(t) = 10 \sin(314t + 90^\circ)$, то:

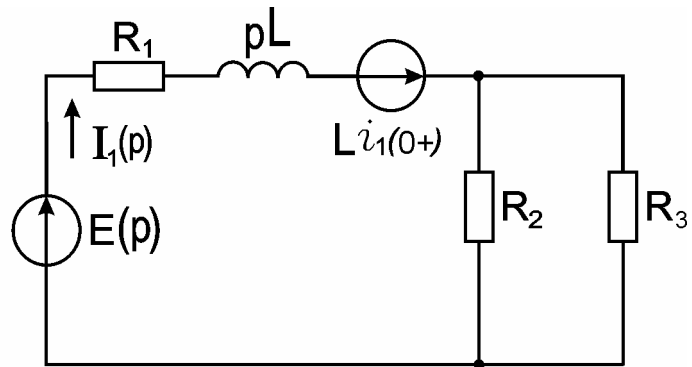
$$E_m = I_{1m} \cdot \sqrt{(R_1 + R_2)^2 + (\omega L)^2} = 707,1, \text{ V};$$

$$\psi_e = \psi_i + \varphi = \psi_i + \arctg \frac{\omega L}{R_1 + R_2} = 90^\circ + 45^\circ = 135^\circ,$$

откъдето за $e(t)$ се получава:
 $e(t) = 707,1 \sin(314t + 135^\circ), V.$



фиг.7.11



фиг.7.12

Б/ Определяне закона на изменение на тока $i_1(t)$.

1. Класически метод

а) определяне на установената съставка:

$$\dot{I}_{1m} = \frac{E_m}{R_1 + R_2 R_3 / (R_2 + R_3) + j\omega L} = 11,05 \cdot e^{j83,7^\circ}, A, \text{ т.е. } i_1'(t) = 11,05 \sin(314t + 83,7^\circ), A.$$

б) определяне на независимото начално условие:

$$i_1(0+) = i_1(0-) = 10 A.$$

в) определяне на времеконстантата на веригата:

$$\tau = \frac{L}{R_1 + R_2 R_3 / (R_2 + R_3)} = 0,003975 s, \text{ т.е. } \alpha = -1/\tau = -252 s^{-1}.$$

Следователно:

$$i_1(t) = 11,05 \sin(314t + 83,7^\circ) - 0,98 \cdot e^{-252t}, A.$$

2. Операторен метод

а) определяне на независимото начално условие:

$$i_1(0+) = i_1(0-) = 10 A.$$

б) съставяне на еквивалентната операторна схема (фиг.7.12.)

в) определяне на операторния образ на търсената величина

I начин:

$$I_{1m}(p) = \frac{E_m(p) + Li_1(0+)}{R_1 + R_2 R_3 / (R_2 + R_3) + pL},$$

където: $E_m(p) = E_m \frac{p \sin \psi_e + \omega \cos \psi_e}{p^2 + \omega^2} = \frac{499,99 p - 156998,5}{p^2 + \omega^2}.$

$$\text{Тогава: } I_{1m}(p) = \frac{1,59p^2 + 499,99p - 230,86}{(p^2 + \omega^2)(40 + 0,159p)} = \frac{G(p)}{H(p)}.$$

II начин:

Тъй като операторният образ на комплексния образ на синусоидална функция е по-прост, отколкото операторният образ на самата функция, то е целесъобразно да се използва комплексното изобразяване на е.д.н. $e(t)$, т.е.:

$$e(t) \dot{=} \dot{E}_m \dot{=} \dot{E}_m(p) = \frac{\dot{E}_m}{p - j\omega} = \frac{707 \cdot e^{j135^\circ}}{p - j314},$$

където \dot{E}_m е комплексната амплитуда на е.д.н. $e(t)$;

$\dot{E}_m(p)$ - операторният образ на комплексната амплитуда \dot{E}_m .

В еквивалентната операторна схема действуват два източника - един на синусоидално е.д.н. и един на постоянно е.д.н. Ето защо за определяне на операторния образ $\dot{I}_{1m}(p)$ е удобно да се използва принципът на наслагване:

$$\dot{I}_{1m}(p) = \dot{I}_{1,1m}(p) + \dot{I}_{1,2m}(p),$$

$$\text{където: } \dot{I}_{1,1m}(p) = \frac{\dot{E}_m(p)}{Z(p)} = \frac{707,1 \cdot e^{j135^\circ}}{(p - j314)(40 + 0,159p)} = \frac{G(p)}{H(p)};$$

$$\dot{I}_{1,2m}(p) = \frac{L i_1(0+)}{Z(p)} = \frac{1,59}{40 + 0,159p}.$$

г) определяне на оригинала на получения образ - чрез теоремата на разлагане

При I начин на получаване на операторния образ $I_{1m}(p)$ полиномът $H(p)$ има три корена ($p_{1,2} = \pm j314 \text{ s}^{-1}$ и $p_3 = -252 \text{ s}^{-1}$). В такъв случай, съгласно теоремата на разлагане, се записва:

$$i_1(t) = 2\text{Re} \left[\frac{G(p_1)}{H'(p_1)} e^{p_1 t} \right] + \frac{G(p_3)}{H'(p_3)} e^{p_3 t} = 2\text{Re} \left[5,525 e^{-j6,20^\circ} \cdot e^{j314 t} \right] + \frac{-25256,98}{25773,90} e^{-252 t} =$$

$$= 11,05 \cdot \sin(314t + 83,7^\circ) - 0,98 e^{-252 t}, \text{ A}.$$

При II начин на получаване на операторния образ $\dot{I}_{1m}(p)$ полиномът $H(p)$ на образа $\dot{I}_{1,1m}(p)$ има два корена ($p_1 = j314 \text{ s}^{-1}$ и $p_2 = -252 \text{ s}^{-1}$). Съгласно теоремата на разлагане за комплексната амплитуда $\dot{I}_{1,1m}$ се записва:

$$\dot{I}_{1,1m} = \frac{G(p_1)}{H'(p_1)} e^{p_1 t} + \frac{G(p_2)}{H'(p_2)} e^{p_2 t} = 11,05 e^{j83,7^\circ} e^{j314 t} + 11,05 \cdot e^{j263,75^\circ} \cdot e^{-252 t},$$

откъдето за съставката $i_{1,1}(t)$ се получава:

$$i_{1,1}(t) = I_m \left[\dot{I}_{1,1m} \right] = 11,05 \cdot \sin(314t + 83,7^\circ) - 10,98 \cdot e^{-252 t}, \text{ A}.$$

За определяне на съставката $i_{1,2}(t)$ се използва таблицата на съответствието:

$$\dot{I}_{1,2m}(p) = \frac{1,59}{40 + 0,159p} \cdot \dot{I}_{1,2}(t) = 10 e^{-252 t}, \text{ A}.$$

За тока $i_1(t)$ се записва:

$$i_1(t) = i_{1,1}(t) + i_{1,2}(t) = 11,05 \cdot \sin(314t + 83,7^\circ) - 0,98 e^{-252 t}, \text{ A}.$$

Зад.7.11. Да се определят законите на изменение на токовете $i_R(t)$, $i_C(t)$ и напрежението на кондензатора $u_C(t)$ след отваряне на ключа к във верига (фиг.7.13.) с параметри: $R = 20 \text{ k}\Omega$ и $C = 0,5 \text{ }\mu\text{F}$, ако в нея действа:

а) източник на постоянен ток $i_k = J_k = 1 \text{ mA}$;

б) източник на синусоидален ток $i_k(t) = \sqrt{2} \sin(100t - 45^\circ)$, mA.

Решение:

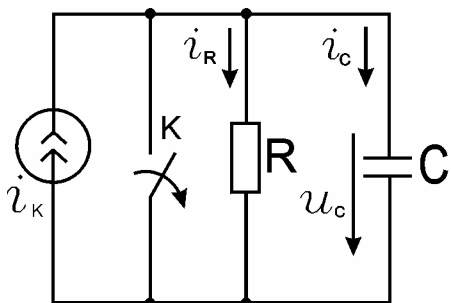
A/ Класически метод

При използване на класическия метод е целесъобразно първо да се определи напрежението $u_C(t)$, а след това чрез него да се изразят токовете $i_R(t)$ и $i_C(t)$.

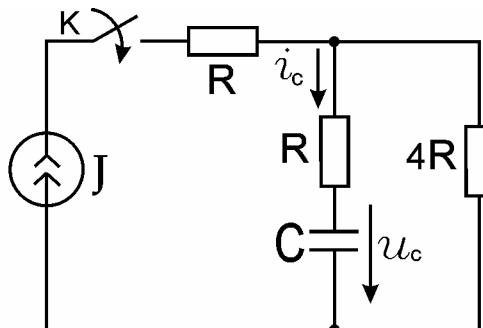
1. Определяне на установената съставка u'_C :

а) $i_R = J_K = 1 \text{ mA}$; $u'_C = J_K R = 20 \text{ V}$;

б) $i_K(t) = \sqrt{2} \sin(100t - 45^\circ)$, mA .



фиг.7.13.



Фиг.7.14

Тъй като $\dot{U}'_{Cm} = \dot{I}_{km} \frac{R}{R + 1/j\omega C} \cdot \frac{1}{j\omega C} = 20 \cdot e^{-j90^\circ}$, V, то:

$u'_C(t) = 20 \sin(100t - 90^\circ)$, V.

При $t = 0+$ то $u'_C(0+) = -20 \text{ V}$.

2. Определяне на началното условие:

$u_C(0+) = u_C(0-) = 0 \text{ V}$.

3. Определяне на времеконстантата на веригата и корена на характеристичното уравнение:

Тъй като $\tau = CR_e = CR = 0,01 \text{ s}$, то $\alpha = -1/\tau = -100 \text{ s}^{-1}$.

Следователно, за $u_C(t)$, $i_R(t)$ и $i_C(t)$ може да се запише:

а) $u_C(t) = u'_C + [u_C(0+) - u'_C(0+)]e^{\alpha t} = 20(1 - e^{-100t})$, V;

$i_R(t) = \frac{u_C(t)}{R} = (1 - e^{-100t})$, mA и $i_C(t) = C \frac{du_C}{dt} = e^{-100t}$, mA .

б) $u_C(t) = 20 \sin(100t - 90^\circ) + 20e^{-100t}$, V;

$i_R(t) = 1 \cdot \sin(100t - 90^\circ) + 1 \cdot e^{-100t}$, mA и $i_C(t) = 1 \cdot \sin 100t - 1 \cdot e^{-100t}$, mA .

Б/ Операторен метод

1. Определяне на независимото начално условие:

$u_C(0+) = u_C(0-) = 0 \text{ V}$.

2. Съставяне на еквивалентната операторна схема

Тъй като началното условие е нулево, то операторната схема е същата, както схемата на веригата след комутация (фиг.7.13).

3. Определяне на операторния образ на търсената величина

а) $i_R = I_K = 1 \text{ mA}$;

$U_C(p) = I_K(p) \frac{R}{R + 1/pC} \cdot \frac{1}{pC} = \frac{2000}{p(p + 100)}$;

б) $i_K = \sqrt{2} \sin(100t - 45^\circ)$, mA; $\dot{I}_{km}(p) = \frac{\dot{I}_{km}}{p - j\omega} = \frac{\sqrt{2} \cdot 10^{-3} e^{-j45^\circ}}{p - j100}$;

$$\dot{U}_{Cm}(p) = \dot{I}_{km}(p) \frac{R}{R + 1/pC} \cdot \frac{1}{pC} = \frac{\sqrt{2} \cdot 20 \cdot e^{-j45^\circ}}{(p - j100)(1 + 0,01p)} = \frac{G(p)}{H(p)}$$

4. Определяне на оригинала на получения образ:

а) $i_R = I_K = 1 \text{ mA}$, а $u_C(t)$ се определя чрез таблицата на съответствието:

$$U_C(p) = \frac{2000}{p(p+100)} \Rightarrow u_C(t) = 20(1 - e^{-100t}), \text{ V};$$

б) $i_R = \sqrt{2} \cdot \sin(100t - 45^\circ)$, mA, а $u_C(t)$ се определя чрез теоремата на разлагането. Тъй като полиномът $H(p)$ има два корена ($p_1 = j\omega = j100 \text{ s}^{-1}$ и $p_2 = -1/RC = -100 \text{ s}^{-1}$), то:

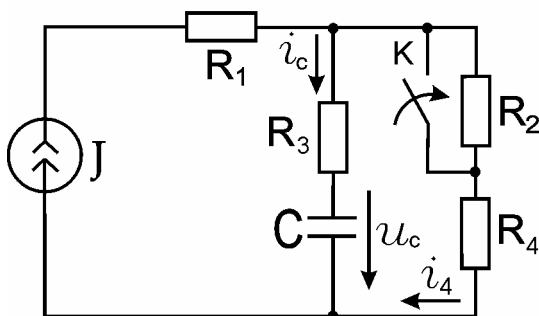
$$\dot{U}_{Cm} = \frac{G(p_1)}{H'(p_1)} e^{j100t} + \frac{G(p_2)}{H'(p_2)} e^{-100t} = 20 \cdot e^{-j90^\circ} \cdot e^{j100t} + 20 \cdot e^{j90^\circ} \cdot e^{-100t}, \text{ V},$$

откъдето $u_C(t) = I_m \left[\dot{U}_{Cm} \right] = 20 \cdot \sin(100t - 90^\circ) + 20e^{-100t}, \text{ V}.$

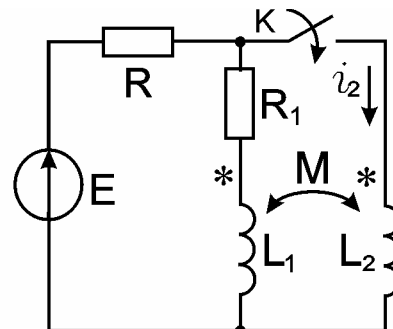
Зад.7.12. Да се определи стойността на напрежението $u_C(t)$ на кондензатора 23 ms след затваряне на ключа к във верига (фиг.7.14) с параметри: $R = 5 \Omega$ и $C = 0,5 \mu\text{F}$, ако в нея действа източник на постоянен ток $J = 1 \text{ A}$.

Упътване: $u_C(t) = 20 \left(1 - e^{-8 \cdot 10^4 t} \right), \text{ V}.$

Отговор: $u_C(t = 23 \text{ ms}) = 0,037, \text{ V}.$



фиг.7.15



фиг.7.16

Зад.7.13. Да се определят законите на изменение на тока $i_4(t)$ и напрежението $u_C(t)$ на кондензатора след затваряне на ключа к във веригата с параметри: $R_1 = 5 \Omega$; $R_2 = 15 \Omega$; $R_3 = 10 \Omega$ и $C = 1 \mu\text{F}$ (фиг.7.15.), ако в нея действа източник на постоянен ток $J = 1 \text{ A}$.

Отговори:

$$i_4(t) = 1 + e^{-66667t}, \text{ A} \quad \text{и} \quad u_C(t) = 10 + 15 \cdot e^{-66667t}, \text{ V}.$$

Зад.7.14. Да се определи законът на изменение на тока $i_2(t)$ след затваряне на ключа к във верига (фиг.7.16) с параметри: $R = 100 \Omega$; $R_1 = 200 \Omega$; $L_1 = L_2 = 0,3 \text{ H}$ и $M = 0,1 \text{ H}$, ако в нея действа източник на постоянно напрежение $E = 30 \text{ V}$.

Упътване:

По законите на Кирхоф се записва системата уравнения на веригата след комутация, след което се преминава към операторната им форма, откъдето се намира операторният образ $I_2(p)$:

$$I_2(p) = 75 / p(p + 250).$$

Отговор:

$$i_2(t) = 0,3 \cdot (1 - e^{-250t}), \text{ A.}$$

Зад.7.15. Да се определи законът на изменение на тока $i(t)$ след отваряне на ключа к във верига (фиг.7.17) с параметри: $R_1 = R = 30 \Omega$; $R_2 = 50 \Omega$; $L = 0,2 \text{ H}$ и $C = 166,7 \mu\text{F}$, ако в нея действа източник на постоянно напрежение $E = 300 \text{ V}$.

Решение:

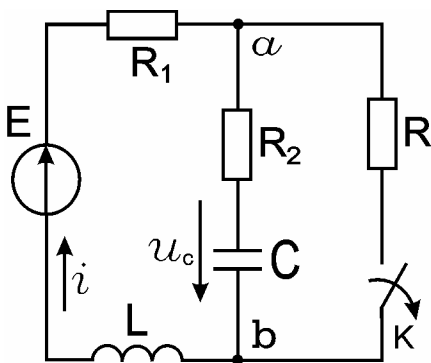
А/ Класически метод

1. Определяне на установената съставка: $i'(t) = 0 \text{ A}$.

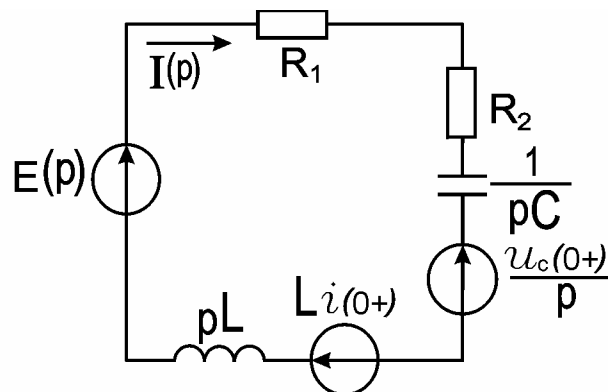
2. Определяне на корените на характеристичното уравнение

а) чрез привеждане на системата интегро-диференциални уравнения, записани по законите на Кирхоф за веригата след комутацията, към едно уравнение спрямо даден ток (напрежение) и производните му, в което символът d/dt се заменя с α , d^2/dt^2 с α^2 и т.н., а дясната част се приравнява на нула;

б) чрез приравняване на нула на детерминантата от коефициентите пред неизвестните величини в системата интегро-диференциални уравнения, записани по законите на Кирхоф за веригата след комутацията (за свободния режим на веригата), в която символът d/dt се заменя с α , а символът $\int_0^t \dots dt$ - с $1/\alpha$;



фиг.1.17



фиг.1.18

в) чрез приравняване на нула на операторното входно съпротивление на пасивната верига след комутация спрямо два нейни извода, получени при прекъсване на даден клон, след заместване на p с α (например, при прекъсване в т. а се записва: $Z_{\text{вх}}(p) = R_1 + R_2 + pL + 1/pC$).

Получава се следното характеристично уравнение:

$$0,2\alpha^2 + 80\alpha + 5998,8 = 0,$$

чиито корени са: $\alpha_1 = -100 \text{ s}^{-1}$ и $\alpha_2 = -300 \text{ s}^{-1}$.

3. Определяне на вида на свободната съставка

Тъй като корените са реални и различни, то: $i''(t) = A_1 \cdot e^{\alpha_1 t} + A_2 \cdot e^{\alpha_2 t}$

4. Определяне на интеграционните константи

$$\begin{cases} i(0+) = A_1 + A_2 \\ \left. \frac{di(t)}{dt} \right|_{t=0+} = -100A_1 - 300A_2, \end{cases}$$

където: $i(0+) = i_L(0+) = i_L(0-) = \frac{E}{R_1 + R} = 5, \text{ A}$; $u_C(0+) = u_C(0-) = i_L(0-)R = 150, \text{ V}$;

$$\left. \frac{di(t)}{dt} \right|_{t=0+} = \frac{E - (R_1 + R_2) i(0+) - u_C(0+)}{L} = -1250, \text{ A}\cdot\text{s}^{-1}.$$

За интеграционните константи се получава: $A_1 = 1,25, \text{ A}$ и $A_2 = 3,75, \text{ A}$.

Следователно: $i(t) = 1,25 \cdot e^{-100t} + 3,75 \cdot e^{-300t}, \text{ A}$.

Б/ Операторен метод

1. Определяне на независимите начални условия

$i(0+) = i_L(0+) = i_L(0-) = E/(R_1 + R) = 5, \text{ A}$ и $u_C(0+) = u_C(0-) = i_L(0-)R = 150, \text{ V}$.

2. Съставяне на операторната заместваща схема

Операторната заместваща схема е представена на фиг.7.18.

3. Определяне на операторния образ на търсената величина

$$I(p) = \frac{pLi(0+) + E - u_C(0+)}{p^2L + p(R_1 + R_2) + 1/pC} = \frac{150 + p}{0,2p^2 + 80p + 5998,8} = \frac{G(p)}{H(p)}.$$

4. Определяне на оригинала на получения образ

$$i(t) = \frac{G(p_1)}{H'(p_1)} \cdot e^{p_1 t} + \frac{G(p_2)}{H'(p_2)} \cdot e^{p_2 t} = 1,25 \cdot e^{-100t} + 3,75 \cdot e^{-300t}, \text{ A}.$$

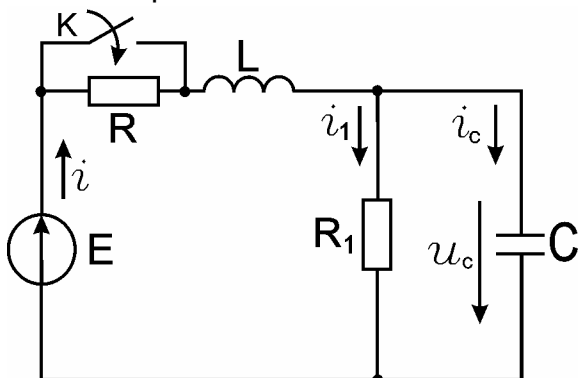
Зад.7.16. Да се определят законите на изменение на токовете $i(t)$, $i_1(t)$, $i_C(t)$ и напрежението $u_C(t)$ на кондензатора след затваряне на ключа K във верига (фиг.7.19) с параметри: $R = R_1 = 10 \Omega$; $L = 0,5 \text{ H}$ и $C = 100 \mu\text{F}$, ако в нея действа източник на постоянно напрежение $E = 20 \text{ V}$.

Отговори:

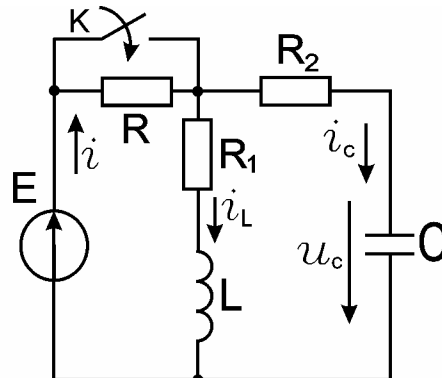
$$i(t) = 2 - 1,00156 \cdot e^{-20t} + 0,00044 \cdot e^{-980t}, \text{ A}; \quad i_1(t) = 2 - 1,022 \cdot e^{-20t} + 0,022 \cdot e^{-980t}, \text{ A};$$

$$i_C(t) = 0,02044 \cdot e^{-20t} - 0,02156 \cdot e^{-980t}, \text{ A} \quad \text{и} \quad u_C(t) = 20 - 10,22 \cdot e^{-20t} + 0,22 \cdot e^{-980t}, \text{ V}.$$

Зад.7.17. Да се определят законите на изменение на токовете $i(t)$, $i_L(t)$, $i_C(t)$ и напрежението $u_C(t)$ на кондензатора след затваряне на ключа K във верига (фиг.7.20) с параметри: $R = R_1 = R_2 = 50 \Omega$; $L = 0,25 \text{ H}$ и $C = 500 \mu\text{F}$, ако в нея действа източник на постоянно напрежение $E = 25 \text{ V}$.



фиг.7.19.



фиг.7.20

Отговори:

$$i(t) = 0,5 + 0,25 \cdot e^{-40t} - 0,25 \cdot e^{-200t}, \text{ A}; \quad i_L(t) = 0,5 - 0,25 \cdot e^{-200t}, \text{ A};$$

$$i_C(t) = 0,25 \cdot e^{-40t}, \text{ A} \quad \text{и} \quad u_C(t) = 25 - 12,5 \cdot e^{-40t}, \text{ V}.$$

Зад.7.18. Да се определят законите на изменение на тока $i_1(t)$ и напрежението $u_C(t)$ на кондензатора след затваряне на ключа k във верига (фиг.7.21) с параметри: $R = 200 \Omega$; $L = 2 \text{ mH}$ и $C = 1 \mu\text{F}$, ако в нея действат два източника на постоянно напрежение $E_1 = 100 \text{ V}$ и $E_2 = 40 \text{ V}$.

Отговори:

$$i_1(t) = 0,25 - 0,169 \cdot e^{-10600t} + 0,019 \cdot e^{-94400t}, \text{ A}; \quad u_C(t) = 50 + 30,2 \cdot e^{-10600t} - 0,2 \cdot e^{-94400t}, \text{ V}.$$

Зад.7.19. Да се определят законите на изменение на тока $i_L(t)$ и напрежението $u_C(t)$ на кондензатора след отваряне на ключа k във верига (фиг.7.22) с параметри: $R = 6 \Omega$; $L = 0,5 \text{ H}$ и $C = 0,18 \text{ F}$, ако в нея действат източник на: а) постоянно напрежение $E = 24 \text{ V}$; б) постоянен ток $J = 4 \text{ A}$.

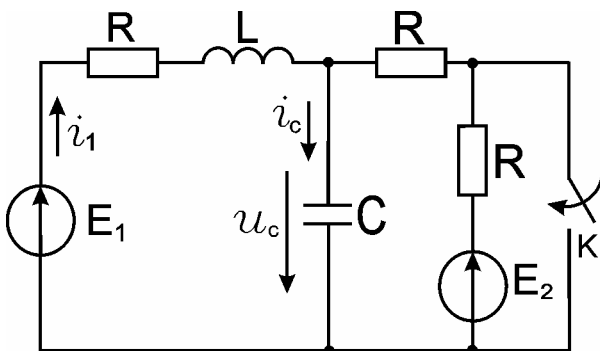
Отговори: а) и б):

$$i_L(t) = -4,4 \cdot e^{-t} + 0,4 \cdot e^{-11t}, \text{ A} \quad \text{и} \quad u_C(t) = 24,178 \cdot e^{-t} - 0,178 \cdot e^{-11t}, \text{ V}.$$

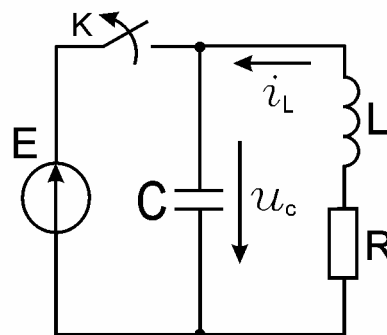
Зад.7.20. Да се определят законите на изменение на токовете $i_L(t)$ и $i_C(t)$ след отваряне на ключа k във верига (фиг.7.23) с параметри: $R = R_1 = R_2 = 10 \Omega$; $L = 0,5 \text{ H}$ и $C = 100 \mu\text{F}$, ако в нея действат източник на постоянно напрежение $E = 100 \text{ V}$.

Отговори:

$$i_L(t) = 5 - 1,75 \cdot e^{-41t} + 0,073 \cdot e^{-979t}, \text{ A}; \quad i_C(t) = -0,075 \cdot e^{-41t} + 3,41 \cdot e^{-979t}, \text{ V}.$$



Фиг.7.21



фиг.7.22

Зад.7.21. Да се определят законите на изменение на токовете $i_1(t)$, $i_2(t)$ и $i_3(t)$ след затваряне на ключа k във верига (фиг.7.24) с параметри: $R_1 = 160 \Omega$; $R_3 = 90 \Omega$; $L_1 = 100 \text{ mH}$ и $L_2 = 36 \text{ mH}$, ако в нея действат източник на постоянно напрежение $U = 48 \text{ V}$.

Отговори:

$$i_1(t) = 0,3 - 0,24 \cdot e^{-1000t} - 0,06 \cdot e^{-4000t}, \text{ A};$$

$$i_2(t) = 0,3 - 0,4 \cdot e^{-1000t} + 0,1 \cdot e^{-4000t}, \text{ A} \quad \text{и} \quad i_3(t) = 0,16(e^{-1000t} - e^{-4000t}), \text{ A}.$$

Зад.7.22. Да се определят законите на изменение на токовете $i_1(t)$, $i_2(t)$ и $i_3(t)$ след затваряне на ключа k във верига (фиг.7.25) с параметри: $R_1 = 400 \Omega$; $R_2 = 800 \Omega$; $L = 0,2 \text{ H}$ и $C = 2,5 \mu\text{F}$, ако в нея действат източник на постоянно напрежение $E = 60 \text{ V}$, а кондензаторът C е бил предварително зареден до напрежение $U_0 = 20 \text{ V}$.

Отговори:

$$i_1(t) = 0,05 + 0,1 \cdot e^{-2000 t} - 0,05 \cdot e^{-3000 t}, \text{ A};$$

$$i_2(t) = 0,05 - 0,1 \cdot e^{-2000 t} + 0,1 \cdot e^{-3000 t}, \text{ A} \text{ и } i_3(t) = 0,2 \cdot e^{-2000 t} - 0,15 \cdot e^{-3000 t}, \text{ A}.$$

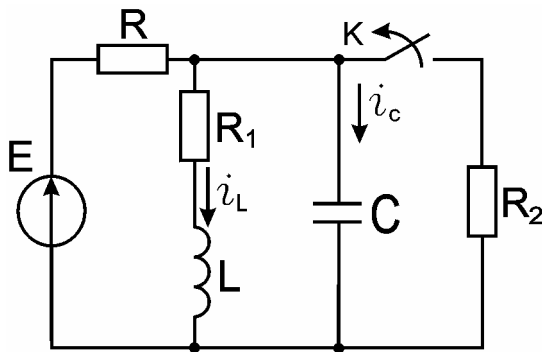
Зад.7.23. Да се определи законът на изменение на тока $i_1(t)$ след затваряне на ключа K във верига (фиг.7.26) с параметри: $R = 100 \Omega$; $L = 4 \text{ H}$ и $C = 25 \mu\text{F}$, ако тя се включва към източник на постоянно напрежение $U = 200 \text{ V}$.

Решение:

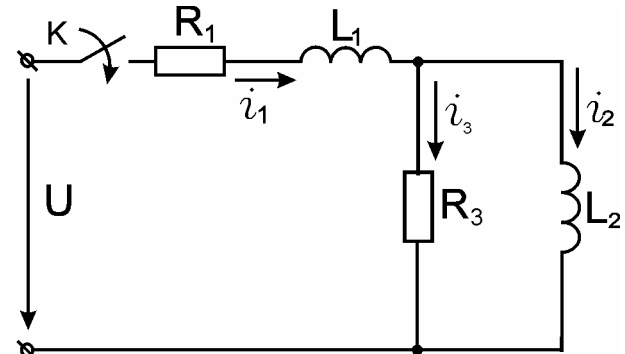
Класически метод

1. Определяне на установената съставка

$$i_1 = 0 \text{ A}.$$



Фиг.7.23



фиг.7.24

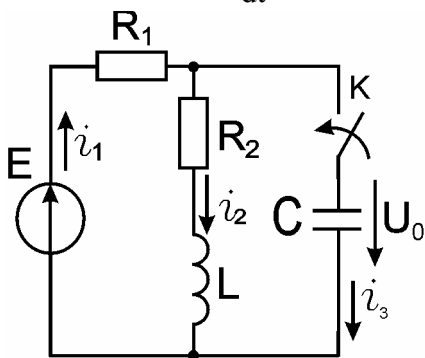
2. Определяне корените на характеристичното уравнение

Извършва се по начина, описан в т.2б на зад.7.15. За целта се записва системата интегро-диференциални уравнения за веригата след комутацията :

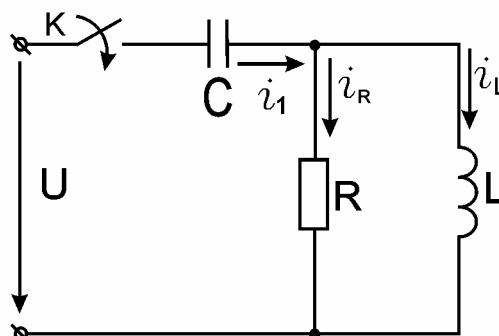
$$(1) \quad i_1(t) = i_R(t) + i_L(t);$$

$$(2) \quad \frac{1}{C} \int_0^t i_1(t) dt + u_C(0+) + R i_R(t) = U;$$

$$(3) \quad R \cdot i_R(t) - L \frac{di_L(t)}{dt} = 0.$$



фиг.7.25



фиг.7.26

Съответната детерминанта има вида:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1/C\alpha & R & 0 \\ 0 & R & -L\alpha \end{vmatrix} = 0,$$

откъдето се получава характеристичното уравнение: $\alpha^2 + 400\alpha + 10^5 = 0$,

чиито корени са: $\alpha_{1,2} = (-200 \pm j100\sqrt{6}) s^{-1}$.

3. Определяне вида на свободната съставка
Тъй като корените са комплексно спрегнати, то:

$$i_1''(t) = A_1 \cdot e^{-200t} \cdot \sin(100\sqrt{6} \cdot t + A_2).$$

4. Определяне на интеграционните константи

$$\begin{cases} i_1(0+) = A_1 \cdot \sin A_2; \\ \left. \frac{di_1(t)}{dt} \right|_{t=0+} = -200 \cdot A_1 \cdot \sin A_2 + A_1 \cdot 100 \cdot \sqrt{6} \cdot \cos A_2, \end{cases}$$

където $i_1(0+)$ и $\left. \frac{di_1(t)}{dt} \right|_{t=0+}$ се определят от системата интегро-диференциални уравнения, записана за момента $t = 0+$, като се имат предвид независимите начални условия: $i_L(0+) = i_L(0-) = 0$ А и $u_C(0+) = u_C(0-) = 0$ V.

а) определяне на $i_1(0+)$

За целта в системата уравнения на веригата за следкомутационната схема се полага $t = 0+$, т.е.:

$$(1) \quad i_1(0+) = i_R(0+) + i_L(0+) \rightarrow i_1(0+) = i_R(0+);$$

$$(2) \quad u_C(0+) + R i_R(0+) = U \rightarrow i_R(0+) = U/R = 2 \text{ А};$$

$$(3) \quad R \cdot i_R(0+) - L \left. \frac{di_L(t)}{dt} \right|_{t=0+} = 0 \rightarrow \left. \frac{di_L(t)}{dt} \right|_{t=0+} = \left(\frac{R}{L} \right) \cdot i_R(0+) = 50, \text{ А} \cdot \text{s}^{-1}.$$

б) определяне на $\left. \frac{di_1(t)}{dt} \right|_{t=0+}$

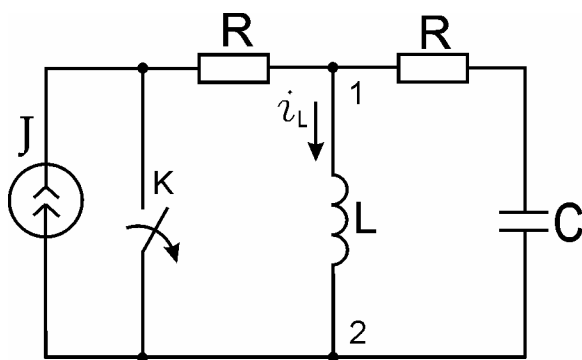
За целта уравнения (1) и (2) се диференцират и се полага $t = 0+$, т.е.:

$$\begin{cases} \left. \frac{di_1(t)}{dt} \right|_{t=0+} = \left. \frac{di_R(t)}{dt} \right|_{t=0+} + \left. \frac{di_L(t)}{dt} \right|_{t=0+}; \\ \frac{1}{C} \cdot i_1(0+) + R \left. \frac{di_1(t)}{dt} \right|_{t=0+} = 0, \end{cases}$$

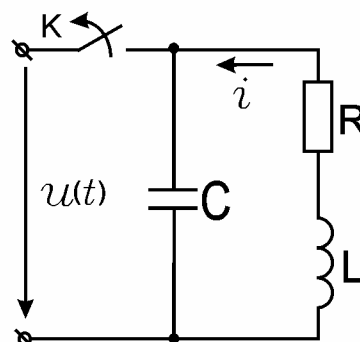
откъдето се получава: $\left. \frac{di_1(t)}{dt} \right|_{t=0+} = -750, \text{ А} \cdot \text{s}^{-1}$.

За интеграционните константи се получава: $A_1 = -2,46$ А и $A_2 = -54,46^\circ$.

Следователно: $i_1(t) = -2,46 \cdot e^{-200t} \sin(100 \cdot \sqrt{6} \cdot t - 54,46^\circ)$, А



Фиг.7.27



фиг.7.28

Зад.7.24. Да се определи законът на изменение на тока $i_L(t)$ след отваряне на ключа к във верига (фиг.7.27) с параметри: $R = 0,5 \Omega$; $L = 1$ H и $C = 4$ F, ако в нея действа източник на постоянен ток $J = 4$ А.

Решение:

Операторен метод

1. Определяне на независимите начални условия:

$$i_L(0+) = i_L(0-) = 0 \text{ A} \quad \text{и} \quad u_C(0+) = u_C(0-) = 0 \text{ V}.$$

2. Съставяне на операторната заместваща схема

Тъй като началните условия са нулеви, то структурата на операторната заместваща схема е същата, както на изходната схема.

1. Определяне операторния образ на търсената величина

За целта по метода с възлови потенциали се определя $\varphi_1(p)$, откъдето за тока $I_L(p)$ се записва:

$$I_L(p) = \frac{\varphi_1(p)}{pL} = \frac{8p+4}{p(4p^2+2p+1)} = \frac{G(p)}{pH_1(p)}.$$

2. Определяне на оригинала $i_L(t)$

Тъй като корените на полинома $pH_1(p) = 0$ са $p_1 = 0$ и $p_{2,3} = (-0,25 \pm j0,25\sqrt{3}) s^{-1}$, съгласно теоремата на разлагане, се записва:

$$\begin{aligned} i_L(t) &= \frac{G(0)}{H_1(0)} + 2R e^{\left[\frac{G(p_2)}{p_2 H_1'(p_2)} e^{p_2 t} \right]} = \frac{4}{1} + 2R e^{\left[\frac{-4}{\sqrt{3}} e^{j30^\circ} \cdot e^{j0,25\sqrt{3}t} \cdot e^{-0,25t} \right]} = \\ &= 4 + 4,62 e^{-0,25t} \cdot \sin(0,25\sqrt{3}t - 60^\circ), \text{ A} \end{aligned}$$

Зад.7.25. Да се определи законът на изменение на тока $i(t)$ след отваряне на ключа к във верига (фиг.7.28) с параметри: $R = 50 \Omega$; $L = 0,319 \text{ H}$ и $C = 30 \mu\text{F}$, ако комутацията става в момент, когато напрежението на източника на синусоидално напрежение достига максималната си стойност $\sqrt{2} \cdot 6,6 \text{ kV}$, а честотата е $f = 50 \text{ Hz}$.

Упътване:

Токът през бобината преди комутация има вида:

$$i(t) = 83,5 \sin(314t + 26^\circ 35'), \text{ A}.$$

Отговор:

$$i(t) = 91,79 e^{-78,4t} \cdot \sin(314t + 23,94^\circ), \text{ A}.$$

ВТОРА ЧАСТ

1. ТРИФАЗНИ ВЕРИГИ

ОБЩИ ПОЛОЖЕНИЯ

АНАЛИЗ НА ТРИФАЗНИ ВЕРИГИ ПРИ СИМЕТРИЧНИ РЕЖИМИ

Симетрични режими в трифазните вериги възникват при еднакви собствени и взаимни параметри на елементите на фазите и при симетричен източник. Поради симетрията пресмятането се извършва както при сложни вериги, но само за една фаза (обикновено за първа фаза).

При съединение звезда-звезда (Y-Y) за тока \dot{I}_A на първа фаза се записва:

$$\dot{I}_A = \dot{E}_A / (Z_0 + Z_{\text{пр}} + Z), \quad (1.1)$$

където \dot{E}_A и Z_0 са съответно е.д.н. и вътрешното съпротивление на първа фаза на захранващия генератор;

$Z_{\text{пр}}$ - съпротивлението на съединителния проводник на фазата;

Z - съпротивлението на товара.

При известен ток \dot{I}_A на първа фаза, чрез законите на Ом и Кирхоф, се определят фазните напрежения на генератора и товара за тази фаза.

Чрез тока и напреженията на първа фаза се записват съответните величини за другите две фази. Например, при симетрична система е.д.н. с права последователност за тока \dot{I}_B се записва:

$$\dot{I}_B = \dot{I}_A \cdot e^{-j 2\pi/3}. \quad (1.2)$$

При съединение триъгълник - триъгълник ($\Delta-\Delta$) или при смесените съединения ($\Delta\text{-Y}$) или ($\text{Y}-\Delta$) изчислението също се извършва само за една фаза като се използват законите на Ом и Кирхоф.

При симетрични режими мощността в трифазната верига е равна на утроената мощност в първа фаза. Това е валидно както за активната мощност P , така и за реактивната мощност Q и пълната мощност S :

$$P = 3 U_{\text{ф}} I_{\text{ф}} \cos \varphi = \sqrt{3} U_{\text{л}} I_{\text{л}} \cos \varphi; \quad (1.3)$$

$$Q = 3 U_{\text{ф}} I_{\text{ф}} \sin \varphi = \sqrt{3} U_{\text{л}} I_{\text{л}} \sin \varphi; \quad (1.4)$$

$$S = 3 U_{\text{ф}} I_{\text{ф}} = \sqrt{3} U_{\text{л}} I_{\text{л}}. \quad (1.5)$$

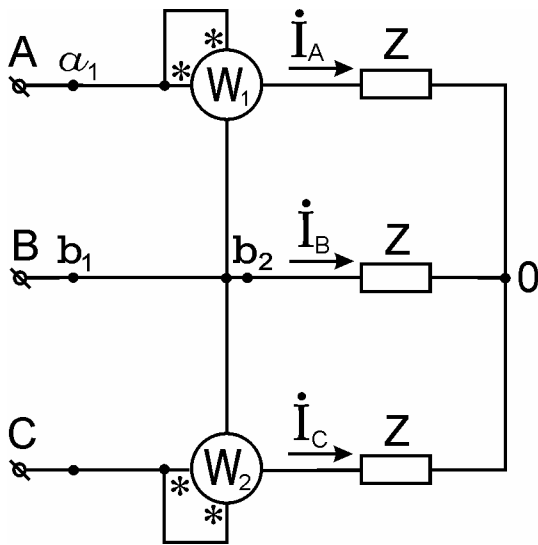
АНАЛИЗ НА ТРИФАЗНИ ВЕРИГИ ПРИ НЕСИМЕТРИЧНИ РЕЖИМИ

При несиметричните режими трифазните вериги се пресмятат като сложни вериги. За целта могат да бъдат използвани всички методи за анализ на сложни вериги.

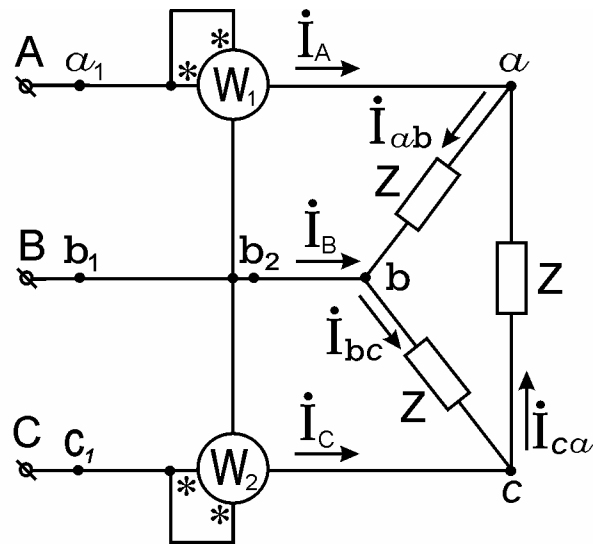
В случай на съединение (Y-Y) е целесъобразно използването на метода с възлови потенциали. Този метод е подходящ и при съединението ($\text{Y}-\Delta$), като предварително Δ на консуматора се преобразува в еквивалентна Y .

Зад.1.1. На входа на трифазен симетричен консуматор, съединен в звезда (фиг.1.1), с комплексно фазно съпротивление $Z = 15 + j15, \Omega$ е подадена симетрична система фазни напрежения с ефективна стойност $U_{\text{ф}} = 220 \text{ V}$. Да се определят

комплексните фазни токове и напрежения на консуматора, както и показанията на ватметрите.



Фиг.1.1



Фиг.1.2

Решение:

Приема се, че напрежението на фаза А има нулева начална фаза, т.е.

$$\dot{U}_{A0} = U_{\Phi} = 220 \text{ V}; \quad \dot{U}_{B0} = a^2 \cdot U_{\Phi} = 220 \cdot e^{-j120^\circ} \text{ V}; \quad \dot{U}_{C0} = a \cdot U_{\Phi} = 220 \cdot e^{j120^\circ} \text{ V}.$$

Тъй като фазните токове образуват симетрична система, необходимо е да се

изчисли само \dot{I}_A :

$$\dot{I}_A = \dot{U}_{A0} / Z = 220 / 15 + j15 = 220 / 21,21 \cdot e^{j45^\circ} = 10,37 \cdot e^{-j45^\circ} \text{ A}.$$

Следователно:

$$\dot{I}_B = a^2 \dot{I}_A = 10,37 \cdot e^{j195^\circ} \text{ A} \text{ и } \dot{I}_C = a \dot{I}_A = 10,37 \cdot e^{j75^\circ} \text{ A}.$$

Показанията на ватметрите се определят от изразите:

$$P_1 = \text{Re}[\dot{U}_{AB} \cdot \dot{I}_A^*] \quad \text{и} \quad P_2 = \text{Re}[\dot{U}_{CB} \cdot \dot{I}_C^*],$$

където $\dot{U}_{AB} = \dot{U}_{A0} - \dot{U}_{B0} = 381,05 \cdot e^{j30^\circ} \text{ V};$

$$\dot{U}_{CB} = \dot{U}_{C0} - \dot{U}_{B0} = 381,05 \cdot e^{j90^\circ} \text{ V}.$$

Следователно:

$$P_1 = \text{Re}[381,05 \cdot e^{j30^\circ} \cdot 10,37 \cdot e^{j45^\circ}] = 1022,72 \text{ W}; \quad P_2 = \text{Re}[381,05 \cdot e^{j90^\circ} \cdot 10,37 \cdot e^{-j75^\circ}] = 3816,84 \text{ W}.$$

Зад.1.2. Да се реши задача 1.1, ако веригата (фиг.1.1) е прекъсната в: а) точка a_1 ; б) точка b_1 ; в) точка b_2 .

Решение:

а) при прекъсване в точка a_1 :

Тъй като съпротивлението на фаза А е безкрайно голямо, токът $\dot{I}_A = 0 \text{ A}$, а $\dot{I}_B = -\dot{I}_C = \dot{U}_{BC} / 2Z = 381,05 \cdot e^{-j90^\circ} / 42,42 \cdot e^{j45^\circ} = 8,981 \cdot e^{-j135^\circ} \text{ A}.$

Фазното напрежение на фаза А на консуматора $\dot{U}_{A0} = 0 \text{ V}$, а $\dot{U}_{B0} = -\dot{U}_{C0} = \dot{U}_{BC} / 2 = -j190,53 = 190,53 \cdot e^{-j90^\circ} \text{ V}.$

Показанието на първия ватметър е равно на нула, а на втория се определя от израза:

$$P_2 = \operatorname{Re}[\dot{U}_{CB} \cdot \dot{I}_C^*] = \operatorname{Re}[381,05 \cdot e^{j90^\circ} \cdot 8,981 \cdot e^{-j45^\circ}] = 2420 \text{ W}.$$

б) при прекъсване в точка b_1 :

$$\text{Тъй като фаза В е прекъсната, то } \dot{I}_B = 0 \text{ A, а } \dot{I}_A = -\dot{I}_C = \dot{U}_{AC} / 2Z = 381,05 \cdot e^{-j30^\circ} / 42,42 \cdot e^{j45^\circ} = 8,981 \cdot e^{-j75^\circ}, \text{ A}.$$

Фазните напрежения са:

$$\dot{U}_{B0} = 0 \text{ V}; \dot{U}_{A0} = -\dot{U}_{C0} = \dot{U}_{AC} / 2 = 381,05 \cdot e^{-j30^\circ} / 2 = 190,53 \cdot e^{-j30^\circ}, \text{ V}.$$

Показанията на ватметрите са:

$$P_1 = \operatorname{Re}[\dot{U}_{A0} \cdot \dot{I}_A^*] = \operatorname{Re}[190,53 \cdot e^{-j30^\circ} \cdot 8,981 \cdot e^{j75^\circ}] = 1210 \text{ W};$$

$$P_2 = \operatorname{Re}[\dot{U}_{C0} \cdot \dot{I}_C^*] = \operatorname{Re}[190,53 \cdot e^{-j210^\circ} \cdot 8,981 \cdot e^{j255^\circ}] = 1210 \text{ W}.$$

в) при прекъсване в точка b_2 :

В сравнение с резултатите от точка б) се променят само показанията на ватметрите:

$$P_1 = \operatorname{Re}[\dot{U}_{AB} \cdot \dot{I}_A^*] = \operatorname{Re}[381,05 \cdot e^{j30^\circ} \cdot 8,981 \cdot e^{j75^\circ}] = -885,7 \text{ W};$$

$$P_2 = \operatorname{Re}[\dot{U}_{CB} \cdot \dot{I}_C^*] = \operatorname{Re}[381,05 \cdot e^{j90^\circ} \cdot 8,981 \cdot e^{-j105^\circ}] = 3306 \text{ W}.$$

Зад.1.3. Трифазен симетричен консуматор с комплексно фазно съпротивление $Z = 10 + j10, \Omega$ е съединен в триъгълник и е включен към източник на симетрична система линейни напрежения с ефективна стойност $U_{\text{л}} = 220 \text{ V}$ (фиг.1.2). Да се определят комплексните фазни и линейни токове и показанията на ватметрите.

Решение:

От условието на задачата следва, че:

$$\dot{U}_{AB} = \dot{U}_{ab} = 220 \text{ V}; \dot{U}_{BC} = \dot{U}_{bc} = 220 \cdot e^{-j120^\circ}, \text{ V и } \dot{U}_{CA} = \dot{U}_{ca} = 220 \cdot e^{j120^\circ}, \text{ V}.$$

Тъй като комплексните фазови токове \dot{I}_{ab} , \dot{I}_{bc} и \dot{I}_{ca} образуват симетрична система, необходимо е да се определи само \dot{I}_{ab} :

$$\dot{I}_{ab} = \dot{U}_{ab} / Z = 220 / (10 + j10) = 15,56 \cdot e^{-j45^\circ} = 11 - j11, \text{ A}.$$

Следователно:

$$\dot{I}_{bc} = 15,56 \cdot e^{-j165^\circ} = -15 - j4,03, \text{ A и } \dot{I}_{ca} = 15,56 \cdot e^{j75^\circ} = 4,03 + j15, \text{ A}.$$

Комплексните линейни токове \dot{I}_A , \dot{I}_B и \dot{I}_C също образуват симетрична система и затова е необходимо да се определи само \dot{I}_A . Той се изразява от I закон на Кирхоф, записан за възел а:

$$\dot{I}_A = \dot{I}_{ab} - \dot{I}_{ca} = 6,97 - j26 = 26,948 \cdot e^{-j75^\circ}, \text{ A}.$$

Следователно:

$$\dot{I}_B = 26,948 \cdot e^{-j195^\circ} = -26 + j6,97, \text{ A и } \dot{I}_C = 26,948 \cdot e^{j45^\circ} = 19 + j19, \text{ A}.$$

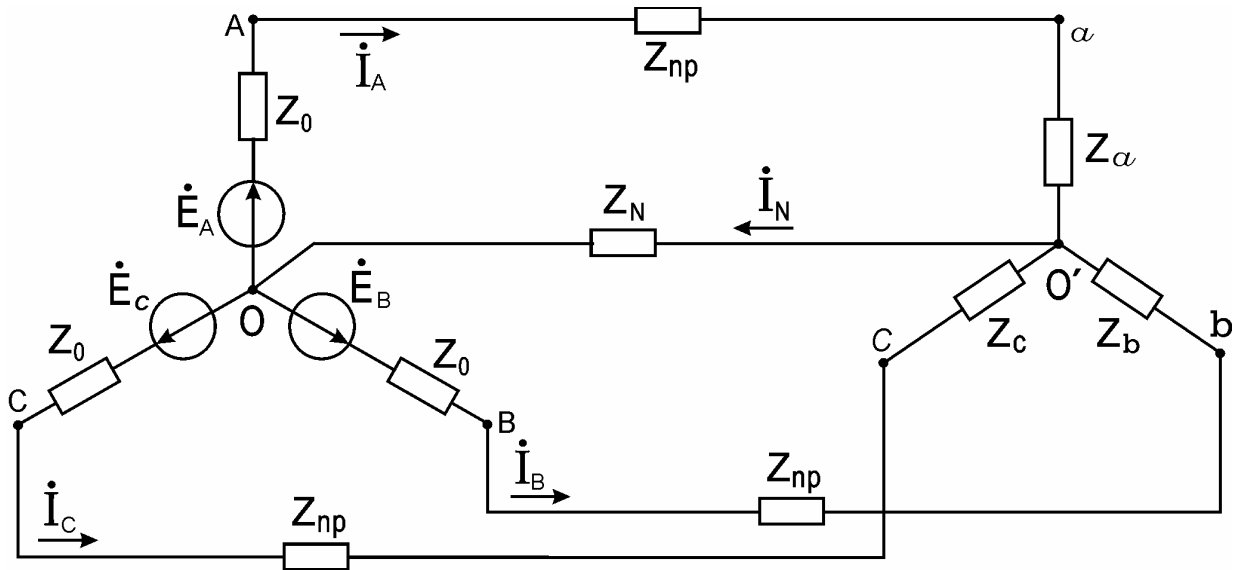
Показанията на ватметрите се определят от изразите:

$$P_1 = \operatorname{Re}[\dot{U}_{AB} \cdot \dot{I}_A^*] = \operatorname{Re}[220 \cdot 26,948 \cdot e^{j75^\circ}] = 1534,42 \text{ W и } P_2 = \operatorname{Re}[\dot{U}_{CB} \cdot \dot{I}_C^*] = 5726,549 \text{ W}.$$

Зад.1.4. Да се реши задача 1.3, ако веригата (фиг.1.2) е прекъсната в точка a_1 .

Отговори: $\dot{I}_{ab} = \dot{I}_{ca} = 7,5 + j2,02 = 7,77 \cdot e^{j15^\circ}$, A; $\dot{I}_{bc} = -15 - j4,04 = 15,53 \cdot e^{j195^\circ}$, A; $\dot{I}_A = 0$ A; $\dot{I}_C = -\dot{I}_B = 22,5 + j6,05 = 23,3 \cdot e^{j15^\circ}$, A; $P_1 = 0$ W и $P_2 = 3630$ W.

Зад.1.5. Към симетричен трифазен генератор с фазно е.д.н. $E = 230$ V и с вътрешно съпротивление $Z_0 = 0,3 + j0,9$, Ω (фиг.1.3) е включен несиметричен товар, съединен в звезда, с нулев проводник със съпротивление $Z_N = 0,5$ Ω . Съпротивленията на товара са: $Z_a = 2 + j4$, Ω ; $Z_b = 4 - j8$, Ω ; $Z_c = 5$ Ω , а $Z_{np} = 0,4 + j0,3$, Ω . Да се определят комплексните токове и напрежения на всяка фаза на товара и генератора.



Фиг.1.3.

Упътване:

Напрежението между звездните точки на генератора и товара е:

$$\begin{aligned} \dot{U}_{o'o} &= (\dot{E}_A \cdot Y_A + \dot{E}_B \cdot Y_B + \dot{E}_C \cdot Y_C) / (Y_A + Y_B + Y_C + Y_N) = 8,03 - j9,38 = \\ &= 12,4 e^{-j49,42^\circ}, \text{ V.} \end{aligned}$$

Отговори:

$$\dot{I}_A = 18,9 - j33 = 37,9 \cdot e^{-j60,17^\circ}, \text{ A}; \dot{I}_B = 10,4 - j25,2 = 27,4 \cdot e^{-j67,67^\circ}, \text{ A};$$

$$\dot{I}_C = -13,3 + j39,4 = 41,6 \cdot e^{j108,58^\circ}, \text{ A}; \dot{I}_N = 16 - j18,8 = 24,8 \cdot e^{-j49,42^\circ}, \text{ A};$$

$$\dot{U}_{ao'} = 170 \cdot e^{j3,25^\circ} = 169,73 + j9,64, \text{ V}; \dot{U}_{bo'} = 230 \cdot e^{-j134,33^\circ} = -160,72 - j164,53, \text{ V};$$

$$\dot{U}_{co'} = 230 \cdot e^{j108,58^\circ} = -73,28 + j218,01, \text{ V}; \dot{U}_{A0} = 195 \cdot e^{-j2,08^\circ} = 194,87 - j7,08, \text{ V};$$

$$\dot{U}_{B0} = 243 \cdot e^{-j125^\circ} = -139,38 - j199,05, \text{ V} \text{ и } \dot{U}_{C0} = 213 \cdot e^{j110,75^\circ} = -75,46 + j199,18, \text{ V.}$$

Зад.1.6. Да се реши задача 1.5 (фиг.1.3), ако звездните точки на генератора и товара не са съединени с нулев проводник.

Упътване:

Напрежението между звездните точки на генератора и товара е:

$$\dot{U}_{o'o} = (\dot{E}_A \cdot Y_A + \dot{E}_B \cdot Y_B + \dot{E}_C \cdot Y_C) / (Y_A + Y_B + Y_C) = 87,6 \cdot e^{-j36,25^\circ} = 70,8 - j 51,8, \text{ V.}$$

Отговори:

$$\dot{I}_A = 20,4 - j20,1 = 28,6 \cdot e^{-j44,67^\circ}, \text{ A}; \quad \dot{I}_B = 1,9 - j 28,6 = 28,66 \cdot e^{-j86,25^\circ}, \text{ A};$$

$$\dot{I}_C = -22,3 + j 47,7 = 53,6 \cdot e^{j114,67^\circ}, \text{ A}; \quad \dot{U}_{ao'} = 128 \cdot e^{j18,75^\circ} = 121,21 + j 41,14, \text{ V};$$

$$\dot{U}_{bo'} = 256 \cdot e^{-j140,67^\circ} = -220,96 - j129,27, \text{ V}; \quad \dot{U}_{co'} = 268 \cdot e^{j114,67^\circ} = -111,86 + j243,54, \text{ V};$$

$$\dot{U}_{A0} = 206 \cdot e^{-j3,42^\circ} = 205,63 - j12,29, \text{ V}; \quad \dot{U}_{B0} = 239 \cdot e^{-j125,33^\circ} = -138,21 - j194,98, \text{ V};$$

$$\dot{U}_{C0} = 215 \cdot e^{j107,42^\circ} = -64,37 + j 205,14, \text{ V.}$$

Зад.1.7. Да се провери балансът на мощностите с данните от зад.1.1.

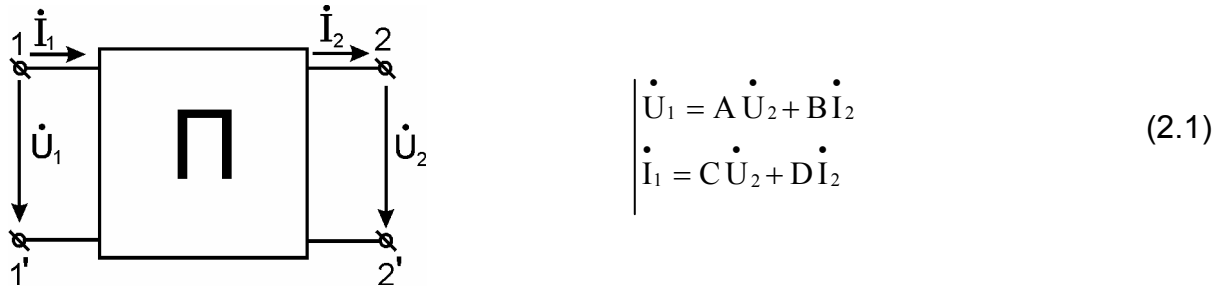
Отговори: $P = 4839 \text{ W}$ и $Q = 4839 \text{ VAr}$.

2. ЧЕТИРИПОЛЮСНИЦИ

ОБЩИ ПОЛОЖЕНИЯ

Един пасивен четириполусник (ПЧ) е определен, ако са известни параметрите му. При това е достатъчно да се знаят параметрите му в една от системите му уравнения.

Най-често се използва системата уравнения с А - параметри. Тя дава връзката между входните (\dot{U}_1, \dot{I}_1) и изходните (\dot{U}_2, \dot{I}_2) режимни параметри (фиг.2.0.1) и има вида:

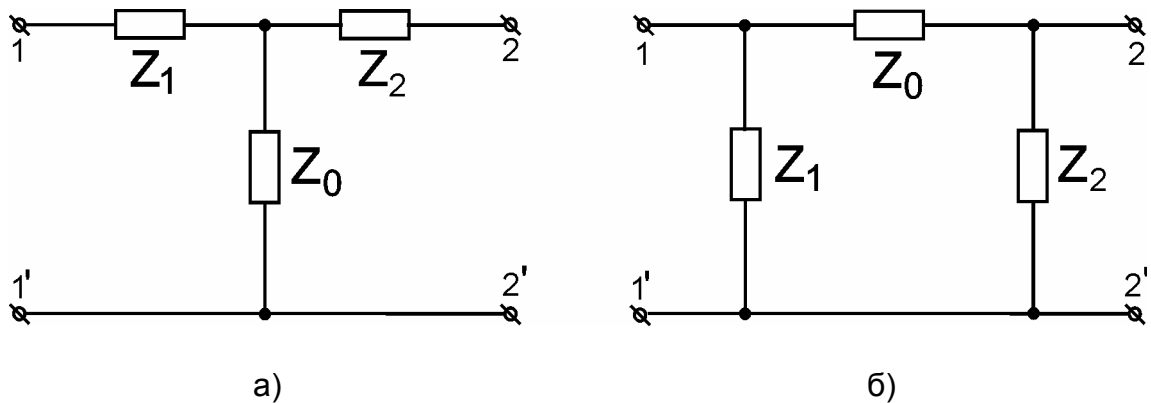


фиг.2.0.1

А - параметрите могат да бъдат изчислени чрез входните Z_{10}, Z_{1K} и изходните Z_{20}, Z_{2K} съпротивления при празен ход и късо съединение по формулите:

$$C = 1/(\pm\sqrt{Z_{20}(Z_{10} - Z_{1K})}); \quad A = CZ_{10}; \quad D = CZ_{20}; \quad B = DZ_{1K}. \quad (2.2)$$

А - параметрите могат да бъдат определени и чрез елементите на еквивалентните Т - и Π - заместващи схеми на ПЧ (фиг.2.0.2).



фиг.2.0.2

За А - параметрите на Т - схемата се записва:

$$A = 1 + \frac{Z_1}{Z_0}; \quad B = Z_1 + Z_2 + \frac{Z_1 Z_2}{Z_0}; \quad C = \frac{1}{Z_0}; \quad D = 1 + \frac{Z_2}{Z_0}, \quad (2.3)$$

а за Π - схемата:

$$A = 1 + \frac{Z_0}{Z_2}; \quad B = Z_0; \quad C = \frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} + \frac{Z_0}{Z_1 Z_2}; \quad D = 1 + \frac{Z_0}{Z_1}. \quad (2.4)$$

Режимът на източника, захранващ ПЧ, може да бъде определен чрез входните съпротивления Z_{BX_1} и Z_{BX_2} при право, съответно, обратно захранване на ПЧ. Съпротивлението Z_{BX_1} (Z_{BX_2}) може да бъде пресметнато чрез А - параметрите на ПЧ и товарното му съпротивление Z_{T_2} (Z_{T_1}) по формулите:

$$Z_{BX_1} = \dot{U}_1 / \dot{I}_1 = (AZ_{T_2} + B)/(CZ_{T_2} + D) ; \quad (2.5)$$

$$Z_{BX_2} = \dot{U}_2 / \dot{I}_2 = (DZ_{T_1} + B)/(CZ_{T_1} + A). \quad (2.6)$$

При режим на съгласуван товар (при право захранване $Z_{T_2} = Z_{BX_2}$, а при обратно : $Z_{T_1} = Z_{BX_1}$) се въвеждат така наречените характеристични параметри: характеристични съпротивления Z_{C_1} (при право захранване) и Z_{C_2} (при обратно захранване) и константа на предаване $g = \alpha + j\beta$.

Характеристичните параметри Z_{C_1} , Z_{C_2} и g могат да бъдат изразени чрез A - параметрите:

$$Z_{C_1} = \sqrt{\frac{AB}{CD}} ; Z_{C_2} = \sqrt{\frac{DB}{CA}} ; g = \ln(\sqrt{AD} + \sqrt{BC}) \quad (2.7)$$

и чрез входните Z_{10} , Z_{1K} и изходните Z_{20} , Z_{2K} съпротивления на празен ход и късо съединение:

$$Z_{C_1} = \sqrt{Z_{10}Z_{1K}} ; Z_{C_2} = \sqrt{Z_{20}Z_{2K}} ; \text{th}g = \sqrt{\frac{Z_{1K}}{Z_{10}}} = \sqrt{\frac{Z_{2K}}{Z_{20}}} . \quad (2.8)$$

Съответно, A - параметрите могат да бъдат изразени чрез характеристичните параметри Z_{C_1} , Z_{C_2} и g :

$$A = \sqrt{Z_{C_1}/Z_{C_2}} . \text{ch}g ; B = \sqrt{Z_{C_1}Z_{C_2}} . \text{sh}g ; C = \text{sh}g / \sqrt{Z_{C_1}Z_{C_2}} ; D = \sqrt{Z_{C_2}/Z_{C_1}} . \text{ch}g . \quad (2.9)$$

Всеки сложен четириполюсник може да бъде представен като съединение на елементарни четириполюсници.

Ако съединението е верижно, матрицата \underline{A} се определя чрез матриците \underline{A}_i на отделните четириполюсници по формулата:

$$\underline{A} = \prod_{i=1}^n \underline{A}_i . \quad (2.10)$$

Редът на матриците \underline{A}_i в (2.9) съответства на реда на четириполюсниците в съединението.

При последователно (паралелно) съединение на четириполюсници матрицата $\underline{Z}(\underline{Y})$ на съединението се определя чрез матриците $\underline{Z}_i(\underline{Y}_i)$ на четириполюсниците по формулите:

$$\underline{Z} = \sum_{i=1}^n \underline{Z}_i , \quad (2.11)$$

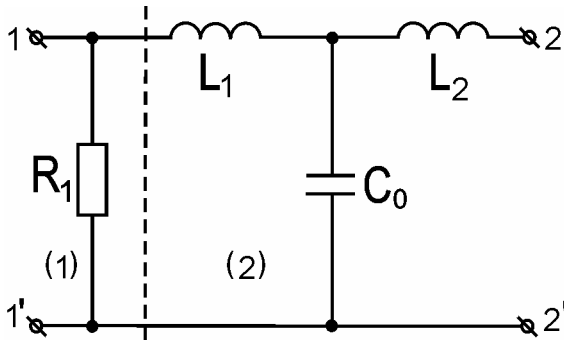
$$\underline{Y} = \sum_{i=1}^n \underline{Y}_i . \quad (2.12)$$

При хибридни съединения (последователно-паралелно и паралелно-последователно) се сумират хибридните матрици \underline{G}_i и \underline{H}_i на четириполюсниците.

За пасивен четириполюсник се дефинират предавателни коефициенти като отношение на изходна към входна величина. Например, комплексните коефициенти по напрежение \dot{K}_U и по ток \dot{K}_I се определят по формулите:

$$\dot{K}_U = \dot{U}_2 / \dot{U}_1 ; \quad (2.13)$$

$$\dot{K}_I = \dot{I}_2 / \dot{I}_1 . \quad (2.14)$$



фиг.2.1

Зад.2.1. С помощта на матричния метод да се определят А - параметрите на четириполусника, показан на фиг.2.1, ако $R_1 = 100 \Omega$; $\omega L_1 = \omega L_2 = 2,5 \Omega$ и $1/\omega C_0 = 5 \Omega$.

Решение:

Четириполусникът от фиг.2.1 може да бъде представен като каскадно съединение на два четириполусника.

За първия четириполусник $Z_1 = 0$; $Z_2 = 0$ и $Z_0 = R_1$. Съгласно формули (2.3) за А - параметрите му се получава:

$A_1 = 1$; $B_1 = 0 \Omega$; $C_1 = 0,01 \text{ S}$ и $D_1 = 1$, като съответната матрица е:

$$\underline{A}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0,01 & 1 \end{bmatrix}.$$

За втория четириполусник $Z_1 = j\omega L_1$; $Z_2 = j\omega L_2$ и $Z_0 = 1/j\omega C_0$. За А - параметрите му се получава:

$A_2 = 0,5$; $B_2 = j3,75 \Omega$; $C_2 = j0,2 \text{ S}$ и $D_2 = 0,5$.
Съответната матрица е:

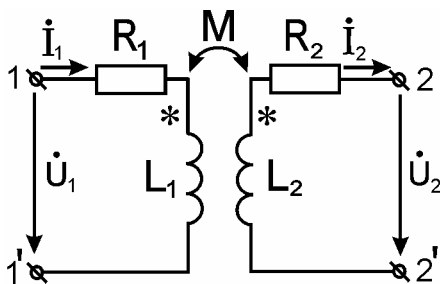
$$\underline{A}_2 = \begin{bmatrix} 0,5 & j3,75 \\ j0,2 & 0,5 \end{bmatrix}.$$

Тъй като двата четириполусника са свързани каскадно, то матрицата на съставния четириполусник ще бъде:

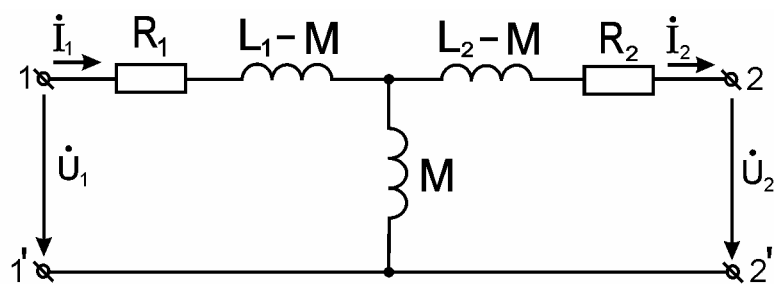
$$\underline{A} = \underline{A}_1 \underline{A}_2 = \begin{bmatrix} 0,5 & j3,75 \\ 0,005 + j0,2 & 0,5 + j0,0375 \end{bmatrix}$$

или: $A = 0,5$; $B = j3,75 \Omega$; $C = 0,005 + j0,2 \text{ S}$ и $D = 0,5 + j0,0375$.

Зад.2.2. Параметрите на въздушен трансформатор (фиг.2.2) са: $R_1 = 2 \Omega$; $L_1 = 0,5 \text{ mH}$; $R_2 = 3 \Omega$ и $L_2 = 0,72 \text{ mH}$. Коефициентът на връзка между намотките на трансформатора е $k = 0,5$. Да се определят А - параметрите на четириполусника, еквивалентен на трансформатора при честота $f = 10 \text{ kHz}$.



фиг.2.2



фиг.2.3

Решение:

Съгласно формула (4.1) за взаимната индуктивност се получава: $M = 0,3 \text{ мН}$.

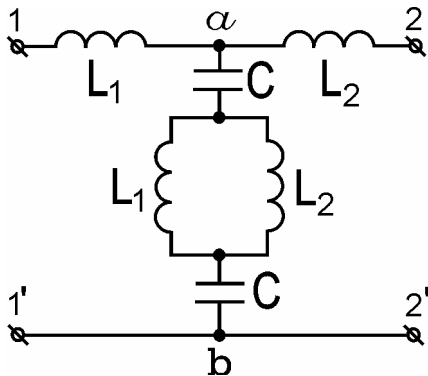
Еквивалентната заместваща схема на трансформатора е дадена на фиг.2.3, за която:

$$Z_1 = R_1 + j\omega(L_1 - M) = 2 + j12,56 \Omega; Z_2 = R_2 + j\omega(L_2 - M) = 3 + j26,4 \Omega;$$

$$Z_0 = j\omega M = j18,85 \Omega.$$

За А-параметрите на еквивалентния четириполюсник, съгласно (2.3), се получава: $A = 1,66 - j0,106$; $B = 9,8 + j56,17 \Omega$; $C = -j0,053 \text{ S}$; $D = 2,4 - j0,159$.

Зад.2.3. Да се намерят характеристичните параметри на четириполюсника, показан на фиг.2.4, ако: $\omega L_1 = 2 \Omega$; $\omega L_2 = 4 \Omega$ и $1/\omega C = 1 \Omega$.



Решение:

Съпротивленията на ПЧ са: Z_{ab} се записва:

$$Z_1 = j\omega L_1 = j2, \Omega;$$

$$Z_2 = j\omega L_2 = j4, \Omega;$$

$$Z_0 = Z_{ab} = 1/j\omega C + 1/j\omega C + j\omega L_1 \cdot j\omega L_2 / j(\omega L_1 + \omega L_2) = -j2/3, \Omega.$$

фиг.2.4

1. Определяне чрез А - параметрите на четириполюсника

Съгласно формули (2.3), за А - параметрите му се получава:

$$A = -2; B = -j6, \Omega; C = -j3/2, \text{ S} \text{ и } D = -5.$$

Тогава съгласно формули (2.7):

$$Z_{C_1} = j1,26, \Omega; Z_{C_2} = j3,16, \Omega;$$

$$g = \alpha + j\beta = 1,82 \text{ или: } \alpha = 1,82 \text{ Np}; \beta = 0 \text{ rad}.$$

2. Определяне чрез параметрите на празен ход и късо съединение:

$$Z_{10} = j\omega L_1 + Z_{ab} = j4/3, \Omega; Z_{1K} = j\omega L_1 + j\omega L_2 \cdot Z_{ab} / (j\omega L_2 + Z_{ab}) = j6/5, \Omega;$$

$$Z_{20} = j\omega L_2 + Z_{ab} = j10/3, \Omega \text{ и } Z_{2K} = j\omega L_2 + j\omega L_1 \cdot Z_{ab} / (j\omega L_1 + Z_{ab}) = j3, \Omega.$$

За характеристичните параметри, съгласно формули (2.8), се намира:

$$Z_{C_1} = j1,26, \Omega; Z_{C_2} = j3,16, \Omega \text{ и } \text{th } g = 0,95.$$

От $\text{th } g$ се определя g по следния начин:

$$\text{th } g = (e^g - e^{-g}) / (e^g + e^{-g}) \cdot e^g / e^g = (e^{2g} - 1) / (e^{2g} + 1),$$

откъдето: $e^{2g} = (1 + \text{th } g) / (1 - \text{th } g) = 39$; $2g = \ln 39 = 3,66$; $g = 1,83$; $\alpha = 1,83 \text{ Np}$; $\beta = 0 \text{ rad}$.

Зад.2.4. Да се определят характеристичните параметри на четириполюсника, показан на фиг.2.5, ако $R_1 = 100 \Omega$ и $X_2 = X_3 = 100 \Omega$.

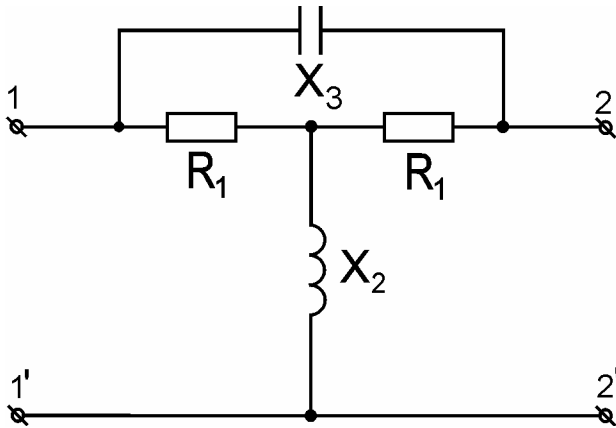
Отговори:

$$Z_{C_1} = Z_{C_2} = 100 \Omega; g = 0,3465 - j0,785; \alpha = 0,3465 \text{ Np} \text{ и } \beta = -0,785 \text{ rad}.$$

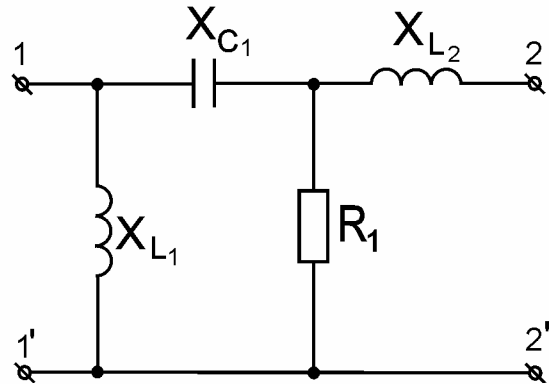
Зад.2.5. Да се определят характеристичните параметри на четириполюсника, даден на фиг.2.6, ако: $X_{L1} = 200 \Omega$; $X_{C1} = 200 \Omega$; $R_1 = 400 \Omega$ и $X_{L2} = 100 \Omega$.

Отговори:

$$Z_{C1} = 224 \Omega; Z_{C2} = 100 \cdot e^{j26^\circ 30'} \Omega; g = 0,244 - j0,785; \alpha = 0,244 \text{ Np} \text{ и } \beta = -0,785 \text{ rad}.$$



фиг.2.5



фиг.2.6

Зад.2.6. Характеристичните параметри на четириполюсник са: $Z_{C1} = 224 \Omega$; $Z_{C2} = 100 \cdot e^{j26^\circ 30'} \Omega$ и $g = 0,244 - j0,785$. Да се определят A - параметрите му.

Решение:

A - параметрите се изразяват чрез характеристичните параметри Z_{C1}, Z_{C2} и g съгласно формули (2.9). За целта се пресмятат $sh g$ и $ch g$ по формулите:

$$\begin{aligned} sh g &= sh(\alpha + j\beta) = sh \alpha \cdot \cos \beta + jch \alpha \cdot \sin \beta = 0,75 \cdot e^{-j76^\circ 45'}, \\ ch g &= ch(\alpha + j\beta) = ch \alpha \cdot \cos \beta - jsh \alpha \cdot \sin \beta = 0,75 \cdot e^{-j19^\circ 15'}. \end{aligned}$$

За A - параметрите се получава:

$$A = 1,12 \cdot e^{-j26^\circ 30'}; B = 112 \cdot e^{-j69^\circ 30'} \Omega; C = -j0,005 \text{ S} \text{ и } D = 0,5.$$

Зад.2.7. A - параметрите на четириполюсник са: $A = 5 - j2$; $B = 220 - j48 \Omega$ и $C = 0,04 - j0,02 \text{ S}$. Да се определи при какъв чисто реактивен товар напрежението и токът на входа ще съвпадат по фаза.

Решение:

От условието $AD - BC = 1$ се определя параметърът D:

$$D = (BC + 1)/A = 1,96 - j0,48.$$

При $Z_{T2} = jX_{T2}$, за Z_{BX1} , съгласно формула (2.5), се записва:

$$Z_{BX1} = \dot{U}_1 / \dot{I}_1 = (A jX_{T2} + B) / (C jX_{T2} + D) = R_{BX1} + jX_{BX1}.$$

\dot{U}_1 и \dot{I}_1 ще съвпадат по фаза, ако: $X_{BX1} = 0$.

Оттук се получава уравнението:

$$0,02 X_T^2 + X_T + 11,52 = 0.$$

Корените на уравнението са: $X_{T2,1} = -18 \Omega$ и $X_{T2,2} = -32 \Omega$.

Зад.2.8. А - параметрите на четириполусник са: $A = 1,5$; $B = 16 + j6 \Omega$ и $D = 1,2 + j0,2$. Да се определи какво чисто реактивно съпротивление трябва да се включи към входа на четириполусника, за да съвпадат по фаза напрежението \dot{U}_2 и токът \dot{I}_2 на неговия изход.

Отговори:

$$C = 0,005 S; X_{T1,1} = -10 \Omega \text{ и } X_{T1,2} = -90 \Omega.$$

Зад.2.9. А - параметрите на четириполусник са: $A = 1 - j0,5$; $C = 0,05 S$ и $D = 1,3 + j0,2$. Да се определи при какво чисто активно съпротивление, включено на входа на четириполусника, напрежението \dot{U}_2 и токът \dot{I}_2 на неговия изход ще съвпадат по фаза.

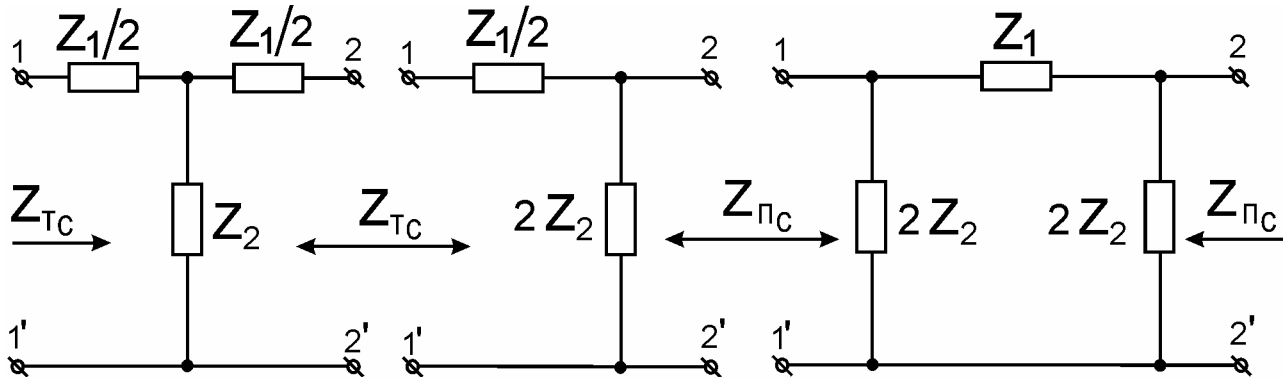
Отговори:

$$B = 8 - j 9, \Omega \text{ и } R_T = 10 \Omega.$$

3. РЕАКТИВНИ ЕЛЕКТРИЧЕСКИ ФИЛТРИ

ОБЩИ ПОЛОЖЕНИЯ

Електрическите схеми на Т - и П - образните звена и на Г-образното полузвено на реактивните електрически филтри (РЕФ) са показани на фиг.3.0.1.



Фиг.3.0.1

Характеристичните съпротивления $Z_{ТС}$ и $Z_{ПС}$ се определят по формулите:

$$Z_{ТС} = \sqrt{Z_1 Z_2 (1 + Z_1 / 4Z_2)}; Z_{ПС} = \sqrt{Z_1 Z_2 / (1 + Z_1 / 4Z_2)}, \quad (3.1)$$

а константата на предаване g - по формулата:

$$g = \operatorname{arch}(1 + Z_1 / 2Z_2) = 2 \operatorname{arsh} \sqrt{Z_1 / 4Z_2}. \quad (3.2)$$

Типът и граничните честоти на РЕФ могат да бъдат определени по един от следните два начина:

1. Чрез честотните характеристики на съпротивления на празен ход Z_{10} и на късо съединение $Z_{1К}$.

За лентата на пропускане на РЕФ коефициентът на затихване $\alpha = 0$, а за константата на предаване g се записва:

$$\operatorname{thg} = \operatorname{th}(\alpha + j\beta) = j \operatorname{tg}\beta = \sqrt{Z_{1К} / Z_{10}} = \sqrt{-(X_{1К} / X_{10})}, \quad (3.3)$$

където β е коефициентът на фазата.

Така определянето на типа и граничните честоти на РЕФ се свежда до намиране на честотните диапазони, за които съпротивления $X_{1К}$ и X_{10} имат различен характер.

2. Чрез честотните характеристики на съпротивления Z_1 и $4Z_2$.

За лентата на пропускане е в сила неравенството:

$$-1 \leq Z_1 / 4Z_2 \leq 0. \quad (3.4)$$

Граничните честоти на РЕФ се определят от следните равенства:

$$Z_1 = -4Z_2 \text{ или } X_1 = 4X_2 \text{ и } Z_1 / 4Z_2 = 0. \quad (3.5)$$

Последното равенство се изпълнява, ако $Z_1 = 0$ или $4Z_2 = \infty$.

За лентата на задържане, за която е в сила неравенството:

$$-\infty \leq Z_1 / 4Z_2 \leq -1, \quad (3.6)$$

се записва:

$$\beta = \pm \pi \text{ и } \alpha = 2 \operatorname{arch} \sqrt{|Z_1 / 4Z_2|}, \quad (3.7)$$

а за лентата на задържане, за която е в сила неравенството $0 \leq Z_1/4Z_2 \leq \infty$, се записва:

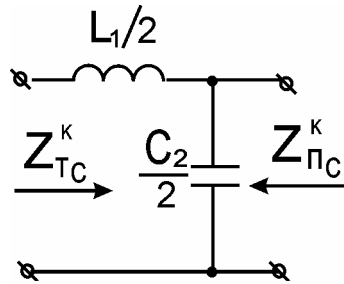
$$\beta = 0 \quad \text{и} \quad \alpha = 2 \operatorname{arsh} \sqrt{|Z_1/4Z_2|}. \quad (3.8)$$

ФИЛТРИ ТИП К

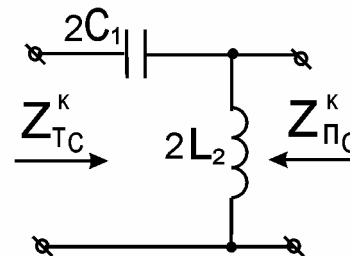
За филтрите тип к е изпълнено условието:

$$Z_1 Z_2 = \kappa = (R_0^K)^2, \quad (3.9)$$

където R_0^K е номиналното характеристично съпротивление на филтъра.



фиг.3.0.2



фиг. 3.0.3

Електрическата схема на Г-образното полузвено на РЕФ за ниски честоти (НЧ) тип к е показана на фиг.3.0.2.

Номиналното характеристично съпротивление R_0^K се определя по формулата:

$$R_0^K = \sqrt{L_1/C_2}, \quad (3.10)$$

а граничната честота ω_c - по формулата:

$$\omega_c = 2/\sqrt{L_1 C_2}. \quad (3.11)$$

За характеристичните съпротивления Z_{TC}^K и Z_{PC}^K се записва:

$$Z_{TC}^K = R_0^K \sqrt{1-\Omega^2}; \quad Z_{PC}^K = R_0^K / \sqrt{1-\Omega^2}, \quad (3.12)$$

където $\Omega = \omega/\omega_c = f/f_c$ е нормираната честота.

За лентата на пропускане $\beta = \operatorname{var}$ и се определя по формулата:

$$\beta = 2 \operatorname{arcsin} \Omega, \quad (3.13)$$

а за лентата на задържане $\beta = \pi$, а $\alpha = \operatorname{var}$ и се определя по формулата:

$$\alpha = 2 \operatorname{arch} \Omega. \quad (3.14)$$

Електрическата схема на Г-образното полузвено на РЕФ за високи честоти (ВЧ) тип к е показана на фиг.3.0.3.

Номиналното характеристично съпротивление R_0^K се определя по формулата:

$$R_0^K = \sqrt{L_2/C_1}, \quad (3.15)$$

а граничната честота ω_c - по формулата:

$$\omega_c = 1/2\sqrt{L_2 C_1}. \quad (3.16)$$

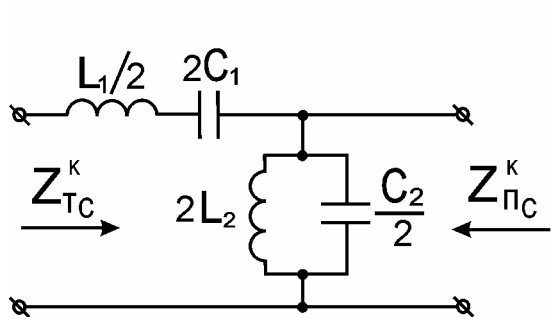
Формулите за характеристичните съпротивления Z_{TC}^K и Z_{PC}^K и за коефициента на затихване α на РЕФ тип к са аналогични на съответните формули на РЕФ за НЧ тип к като нормираната честота се определя от израза:

$$\Omega = \omega_c / \omega = f_c / f . \quad (3.17)$$

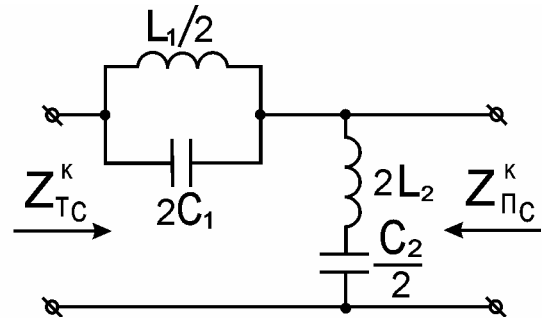
За лентата на задържане на РЕФ за ВЧ тип к $\beta = -\pi$, а за лентата на пропускане $\beta = \text{var}$ и се определя по формулата:

$$\beta = -2 \arcsin \Omega . \quad (3.18)$$

Електрическата схема на Г-образното полузвено на лентов РЕФ тип к е показана на фиг.3.0.4.



фиг.3.0.4



фиг.3.0.5

Номиналното характеристично съпротивление R_0^k се определя по формулата:

$$R_0^k = \sqrt{L_1/C_2} = \sqrt{L_2/C_1} , \quad (3.19)$$

а граничните му честоти ω_{C_1} и ω_{C_2} по формулата:

$$\omega_{C_{1,2}} = \sqrt{1/16L_1C_2 + 1/L_1C_1} \mp 1/\sqrt{16L_1C_2} . \quad (3.20)$$

Формулите за характеристичните съпротивления Z_{TC}^k и Z_{PC}^k и за коефициента на фазата β на лентовия РЕФ тип к са аналогични на РЕФ за НЧ тип к, като нормираната честота се определя от израза:

$$\Omega = (\omega/\omega_0 - \omega_0/\omega) / (\omega_{C_2}/\omega_0 - \omega_0/\omega_{C_2}) , \quad (3.21)$$

където $\omega_0 = \sqrt{\omega_{C_1} \cdot \omega_{C_2}}$.

За лентата на задържане на лентовия РЕФ тип к $\beta = \mp\pi$, а $\alpha = \text{var}$ и се определя по формулата:

$$\alpha = 2 \operatorname{arch} |\Omega| . \quad (3.22)$$

Електрическата схема на Г-образното полузвено на заграждащ РЕФ тип к е показана на фиг.3.0.5.

Номиналното характеристично съпротивление се определя по формула, аналогична на (3.19), а граничните честоти ω_{C_1} и ω_{C_2} - по формулата:

$$\omega_{C_{1,2}} = \sqrt{1/16L_2C_1 + 1/L_1C_1} \mp 1/\sqrt{16L_2C_1} . \quad (3.23)$$

Формулите за характеристичните съпротивления Z_{TC}^k и Z_{PC}^k и за коефициента на фазата β на заграждащия РЕФ тип к са аналогични на съответните формули на РЕФ за ВЧ тип к, като нормираната честота Ω се определя от израза:

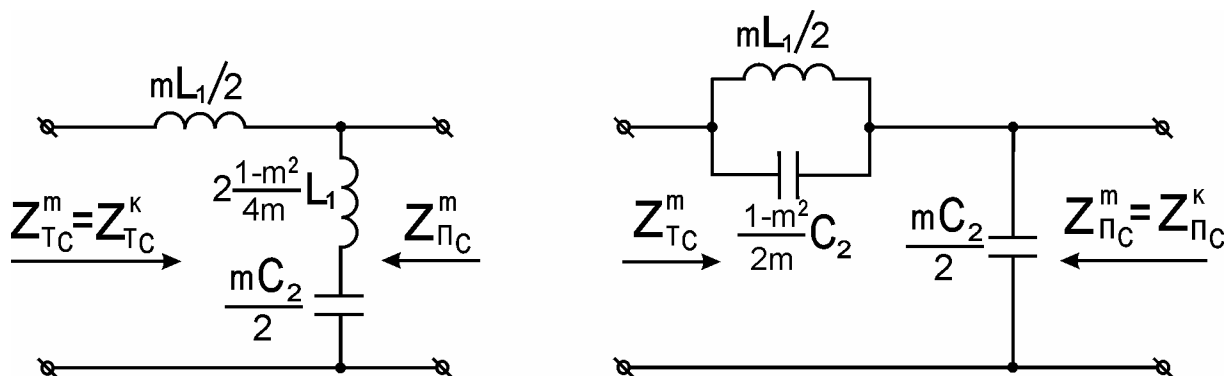
$$\Omega = (\omega_{C_2}/\omega_0 - \omega_0/\omega_{C_2}) / (\omega/\omega_0 - \omega_0/\omega) , \quad (3.24)$$

където ω_0 се пресмята аналогично както при (3.21).

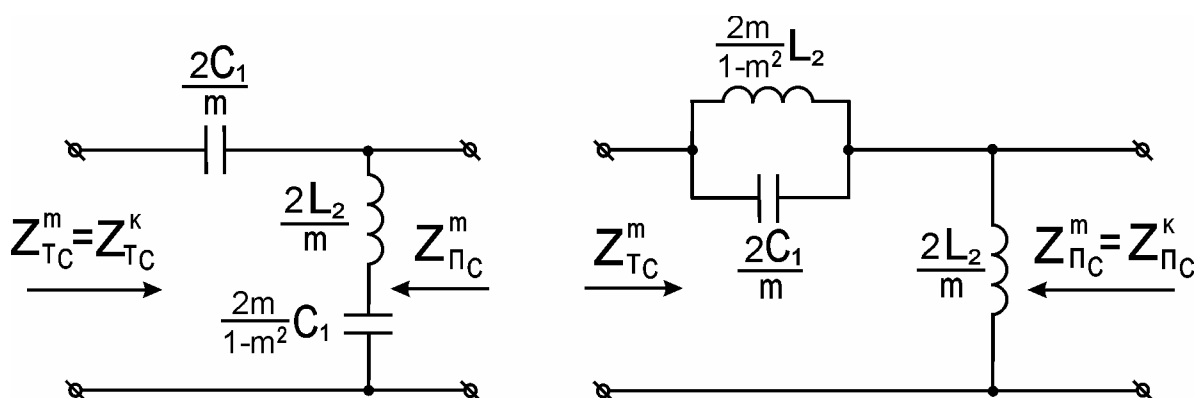
За лентата на задържане на заграждащия РЕФ тип к $\beta = \pm\pi$, а $\alpha = \text{var}$ и се определя по формула, аналогична на (3.22).

ФИЛТРИ ЗА НИСКИ И ВИСОКИ ЧЕСТОТИ ТИП m

Електрическите схеми на Г-образното полузвено на последователния и паралелния производен РЕФ за НЧ тип m са показани на фиг.3.0.6, а съответните схеми на РЕФ за ВЧ тип m – на фиг.3.0.7.



фиг.3.0.6



фиг.3.0.7

Характеристичните съпротивления $Z_{ПC}^m$ на последователно-производните и Z_{TC}^m на паралелно-производните РЕФ тип m се определят по формулите:

$$Z_{ПC}^m = Z_{ПC}^K [1 + (1 - m^2)\Omega^2]; \quad (3.25)$$

$$Z_{TC}^m = Z_{TC}^K / [1 + (1 - m^2)\Omega^2], \quad (3.26)$$

където: $Z_{ПC}^K$ и Z_{TC}^K са характеристичните съпротивления на прототипа (РЕФ тип k);

Ω - нормираната честота.

Коефициентът на затихване α за лентата на задържане на РЕФ тип m се определя по формулите:

$$\operatorname{ch} \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\left| \frac{Z_1^m}{4Z_2^m} \right|} = m\Omega / \sqrt{|1 - (1 - m^2)\Omega^2|}; \quad (3.27)$$

$$\operatorname{sh} \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\left| \frac{Z_1^m}{4Z_2^m} \right|} = m\Omega / \sqrt{|1 - (1 - m^2)\Omega^2|}.$$

Изразът с $\text{ch}(\alpha/2)$ се използва при $(1-m^2)\Omega^2 < 1$, което съответства на различен характер на съпротивленията Z_1^m и Z_2^m , а изразът със $\text{sh}(\alpha/2)$ - при $(1-m^2)\Omega^2 > 1$, съответстващо на еднакъв характер на Z_1^m и Z_2^m .

Коефициентът на фазата $\beta = \text{var}$ за лентата на пропускане на РЕФ тип m и се определя по формула, аналогична на (3.27), а за лентата на задържане при ω_∞ , β се изменя със скок от π до 0 при РЕФ за НЧ тип m, и от 0 до $-\pi$ при РЕФ за ВЧ тип m.

Честотата ω_∞ при РЕФ за НЧ тип m се определя по формулата:

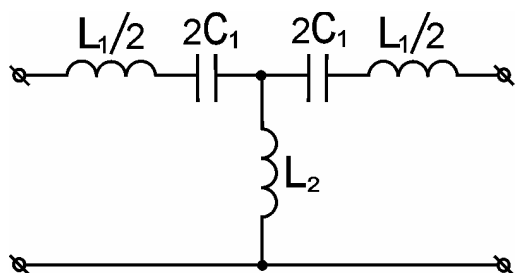
$$\omega_\infty = \omega_c / \sqrt{1-m^2}, \quad (3.28)$$

а при РЕФ за ВЧ тип m – по формулата:

$$\omega_\infty = \omega_c \sqrt{1-m^2}, \quad (3.29)$$

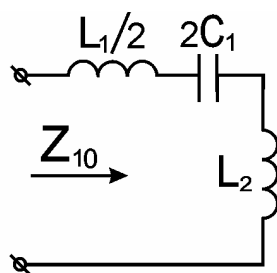
където ω_c е граничната честота на филтъра тип k (прототипа).

Зад.3.1. На фиг.3.1 е показана схемата на T-образно звено на симетричен верижен филтър. Дадено е: $L_1 = 10 \text{ mH}$; $C_1 = 0,5 \mu\text{F}$ и $L_2 = 5 \text{ mH}$. Да се определят типът и граничните честоти на филтъра. Задачата да се реши чрез анализиране на честотните характеристики на съпротивленията на празен ход Z_{10} и на късо съединение Z_{1K} на филтъра.

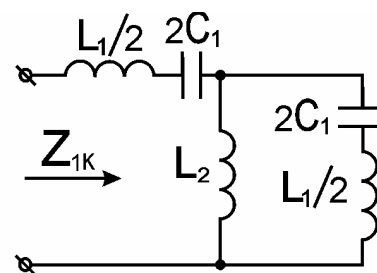


а)

фиг. 3.1



б)



фиг.3.2

Решение:

Съпротивленията Z_{10} и Z_{1K} се определят от схемите, показани на фиг.3.2. За схемата от фиг.3.2а се записва:

$$Z_{10} = Z_1/2 + Z_2 = j(\omega L_1/2 - 1/\omega 2C_1 + \omega L_2) = j X_{10}.$$

От условието $X_{10} = 0$ за честотата ω_H на напрежителния резонанс се получава:

$$\omega_H = 1/\sqrt{(L_1/2 + L_2)2C_1} = 10^4 \cdot \text{s}^{-1}.$$

За схемата от фиг.3.2б се записва:

$$Z_{1K} = Z_1/2 + (Z_1/2)Z_2 / (Z_1/2 + Z_2) = j(\omega L_1/2 - 1/\omega 2C_1) + \frac{j(\omega L_1/2 - 1/\omega 2C_1)j\omega L_2}{j(\omega L_1/2 - 1/\omega 2C_1 + \omega L_2)}.$$

След преобразуване за Z_{1K} се достига до израза:

$$Z_{1K} = j \frac{\omega^2 \cdot (L_1 L_2 + L_1^2/4) - (L_1/2 + L_2)/C_1 + 1/\omega^2 \cdot 4C_1^2}{\omega \cdot (L_1/2 + L_2) - 1/\omega \cdot 2C_1} = j X_{1K}.$$

От условието за напрежителен резонанс $X_{1K} = 0$ се записва:

$$\omega^2(L_1 L_2 + L_1^2/4) - (L_1/2 + L_2)/C_1 + 1/\omega^2 4C_1^2 = 0.$$

За намиране на честотите ω_{H_1} и ω_{H_2} на напрежителния резонанс се достига до биквадратното уравнение:

$$\omega^4(L_1L_2 + L_1^2/4) - \omega^2(L_1/2 + L_2)/C_1 + 1/4C_1^2 = 0.$$

Полага се $\omega^2 = p$ и се записва:

$$p^2 - [(L_1/2 + L_2)/C_1(L_1L_2 + L_1^2/4)]p - 1/4C_1^2(L_1L_2 + L_1^2/4) = 0.$$

След заместване с числени стойности се достига до уравнението:

$$p^2 - (8/3) \cdot 10^8 \cdot p + (4/3) \cdot 10^{16} = 0.$$

Корените му са $p_1 = 2 \cdot 10^8$ и $p_2 = (2/3) \cdot 10^8$, откъдето за честотите се получава:

$$\omega_{H_1} = 0,82 \cdot 10^4 \text{ s}^{-1} \text{ и } \omega_{H_2} = 1,41 \cdot 10^4 \text{ s}^{-1}.$$

За определяне на честотата ω_T на токовия резонанс за паралелно съединените L_2 и $2C_1$, $L_1/2$ (фиг.3.2б) се записва:

$$Y_{ab} = 1/j\omega L_2 + 1/(1/j\omega 2C_1 + j\omega L_1/2).$$

След преобразуване за Y_{ab} се достига до израза:

$$Y_{ab} = -j \frac{\omega L_1/2 + \omega L_2 - 1/\omega 2C_1}{\omega L_2 (\omega L_1/2 - 1/\omega 2C_1)} = -jB_{ab}.$$

От условието за токов резонанс $B_{ab} = 0$ се записва:

$$\omega L_1/2 + \omega L_2 - 1/\omega 2C_1 = 0,$$

откъдето за честотата ω_T се получава:

$$\omega_T = 1/\sqrt{(L_1/2 + L_2)2C_1} = 10^4 \text{ s}^{-1}.$$

На фиг.3.3а е показан видът на честотните характеристики $X_{10} = f(\omega)$ и $X_{1K} = f(\omega)$. От кривите на фигурата може да се установи, че за честотния диапазон $\omega = \omega_{H_1} \dots \omega_{H_2}$ съпротивленията X_{10} и X_{1K} имат различен характер. Това означава, че този диапазон определя лентата на пропускане на филтъра, т.е. типът му е лентов.

За илюстрация на фиг.3.3б е показана честотната характеристика на коефициента на затихване, т.е. $\alpha = f(\omega)$.

Зад.3.2. На фиг.3.4 е показана схемата на П-образно звено на симетричен верижен филтър. Дадено е: $L_1 = 10 \text{ mH}$; $L_2 = 1,5 \text{ mH}$ и $C_1 = 1 \text{ }\mu\text{F}$. Да се определят типът и граничните честоти на филтъра. Задачата да се реши чрез анализиране на честотните характеристики на съпротивленията Z_1 и $4Z_2$. Да се съставят уравненията на коефициента на затихване α и на характеристичното съпротивление $Z_{ПС}$ и да се построят кривите на съответните честотни характеристики.

Решение:

Записват се изразите за съпротивленията Z_1 и $4Z_2$:

$$Z_1 = j\omega L_1 + 1/j\omega C_1 = L_1(\omega_1^2 - \omega^2)/j\omega \text{ и } 4Z_2 = 4j\omega L_2,$$

където $\omega_1 = 1/\sqrt{L_1 C_1} = 10^4 \text{ s}^{-1}$.

Граничните честоти се намират от неравенството: $-1 \leq Z_1/4Z_2 \leq 0$.

От условието $Z_1 = -4Z_2$ се записва:

$$L_1(\omega_1^2 - \omega^2)/j\omega = -j\omega 4L_2,$$

откъдето за граничната честота ω_a се получава:

$$\omega_a = 1/\sqrt{C_1(L_1 + 4L_2)} = 0,79 \cdot 10^4 \text{ s}^{-1}.$$

От условието $Z_1/4Z_2 = 0$ се записва $Z_1 = 0$, откъдето за граничната честота ω_b се намира $\omega_b = \omega_1$.

Видът на честотните характеристики на съпротивленията $Z_1 = jX_1$ и $4Z_2 = j4X_2$ е показан на фиг.3.5.

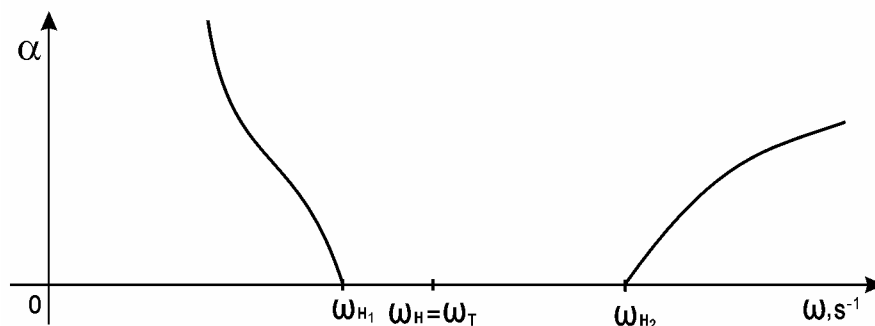
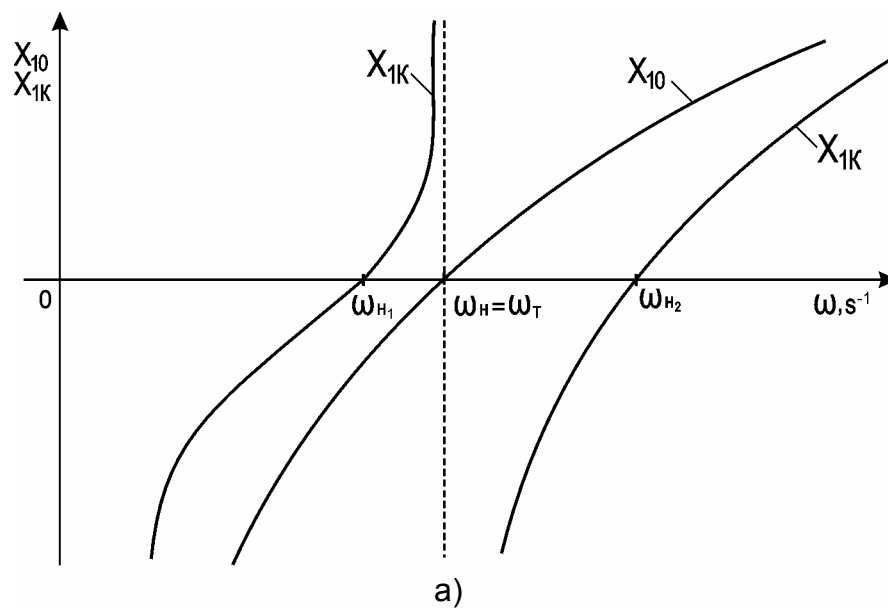
От кривите на фигурата може да се установи, че за честотния диапазон $\omega = \omega_a \dots \omega_b$ е изпълнено неравенството (3.4). Този диапазон определя лентата на пропускане на филтъра, т.е типът му е лентов.

Коефициентът на затихване α се определя по формулите:

$$\operatorname{ch} \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\left| \frac{Z_1}{4Z_2} \right|} = \sqrt{\left| \frac{L_1}{4L_2} \left[1 - \left(\frac{\omega_1}{\omega} \right)^2 \right] \right|};$$

$$\operatorname{sh} \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\left| \frac{Z_1}{4Z_2} \right|} = \sqrt{\left| \frac{L_1}{4L_2} \left[1 - \left(\frac{\omega_1}{\omega} \right)^2 \right] \right|}.$$

Пресмятането на α се извършва чрез ch за диапазона $\omega = 0 \dots \omega_a$ (за този диапазон X_1 и X_2 имат различен характер), а чрез sh - за диапазона $\omega = \omega_b \dots \infty$ (за този диапазон X_1 и X_2 имат еднакъв характер). Видът на кривата $\alpha = f(\omega)$ е показан на фиг.3.6.

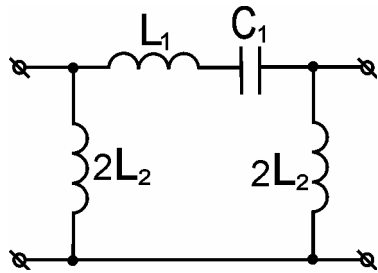


б)
фиг.3.3

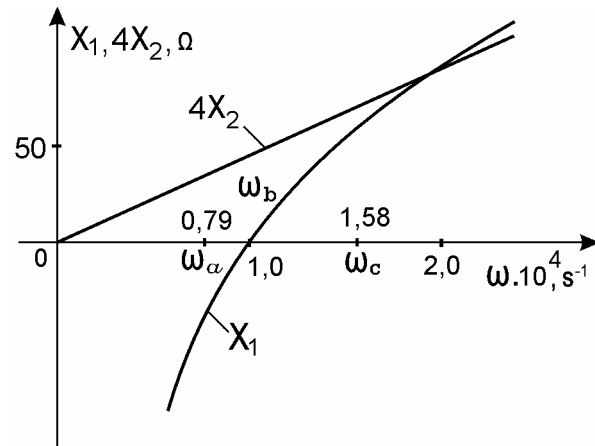
Характеристичното съпротивление $Z_{\Gamma C}$ се определя по формулата :

$$Z_{\text{ПС}} = \sqrt{\frac{Z_1 Z_2}{1 + Z_1/4Z_2}} = \sqrt{\frac{L_1 L_2 (\omega_1^2 - \omega^2)}{1 + L_1 [1 - (\omega_1/\omega)^2]/4L_2}}$$

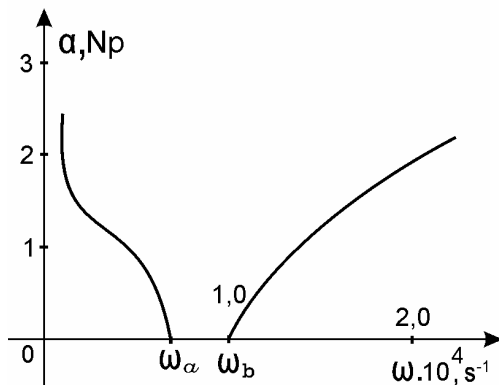
Видът на честотната характеристика на $Z_{\text{ПС}}$ е показан на фиг.3.7. За лентата на пропускане $Z_{\text{ПС}}$ има активен характер, а в лентата на задържане - индуктивен характер.



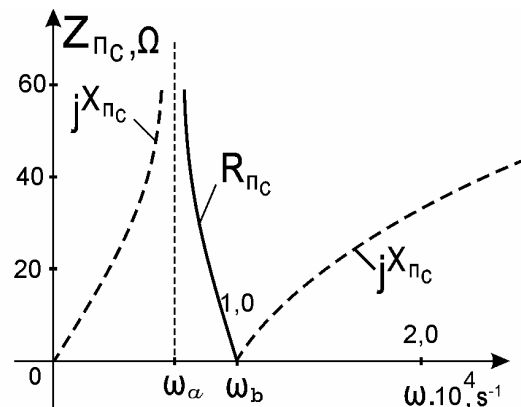
фиг.3.4



фиг.3.5



фиг.3.6



фиг.3.7

Зад.3.3. На фиг.3.8 е показана схемата на П-образно звено на симетричен верижен филтър. Дадено е: $L_1 = 10 \text{ mH}$; $L_2 = 1,5 \text{ mH}$ и $C_2 = 2,67 \text{ }\mu\text{F}$. Да се определи типът и граничните честоти на филтъра. Задачата да се реши чрез анализирание на честотните характеристики на съпротивления Z_1 и $4Z_2$. Да се съставят уравненията за коефициента на затихване α и на характеристичното съпротивление $Z_{\text{ПС}}$ и да се построят кривите на съответните честотни характеристики.

Решение:

Записват се изразите за съпротивленията Z_1 и $4Z_2$. Изразът за Z_1 е: $Z_1 = j\omega L_1$.

За получаване на израза за $4Z_2$ е удобно записването на израза за $2Z_2$:

$$2Z_2 = \frac{2 j\omega L_2 / (j\omega C_2 / 2)}{2 j\omega L_2 + 1/(j\omega C_2 / 2)} = \frac{2 j\omega}{C_2 (\omega_2^2 - \omega^2)},$$

където $\omega_2 = 1/\sqrt{L_2 C_2} = 1,58 \cdot 10^4 \cdot \text{s}^{-1}$.

За $4Z_2$ се получава:

$$4Z_2 = \frac{4j\omega}{C_2(\omega_2^2 - \omega^2)}.$$

Граничните честоти се намират от неравенството: $-1 \leq Z_1/4Z_2 \leq 0$.

От условието $Z_1 = -4Z_2$ се записва :

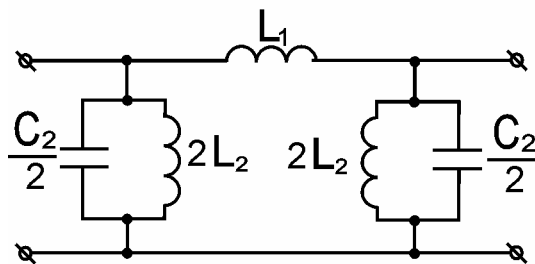
$$j\omega L_1 = -4j\omega / C_2(\omega_2^2 - \omega^2),$$

откъдето за граничната честота ω_b се получава :

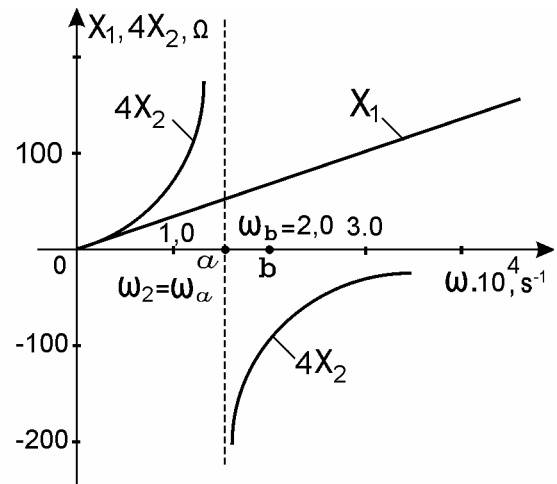
$$\omega_b = \sqrt{(L_1 + 4L_2)/L_1 L_2 C_2} = 2 \cdot 10^4 \cdot \text{s}^{-1}.$$

От условието $Z_1/4Z_2 = 0$ се записва $Z_2 = \infty$,

откъдето за граничната честота ω_a се намира $\omega_a = \omega_2$.



фиг.3.8



фиг. 3.9

Видът на честотните характеристики на съпротивления Z_1 и $4Z_2$ е показан на фиг.3.9.

От кривите на фигурата може да се установи, че за честотния диапазон $\omega = \omega_a \dots \omega_b$ е изпълнено неравенството (3.4). Този диапазон определя лентата на пропускане на филтъра, т.е. типът му е лентов.

Коефициентът на затихване α се определя по формулите:

$$\text{ch} \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{Z_1}{4Z_2}} = \sqrt{\frac{L_1}{4L_2} \left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_2} \right)^2 \right]};$$

$$\text{sh} \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{Z_1}{4Z_2}} = \sqrt{\frac{L_1}{4L_2} \left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_2} \right)^2 \right]}.$$

Пресмятането на α се извършва чрез ch за диапазона $\omega = \omega_b \dots \infty$ (за този диапазон X_1 и X_2 имат различен характер), а чрез sh - за диапазона $\omega = 0 \dots \omega_a$ (за този диапазон X_1 и X_2 имат еднакъв характер). Видът на кривата $\alpha = f(\omega)$ е показан на фиг.3.10.

Характеристичното съпротивление $Z_{\text{ПС}}$ се определя по формулата :

$$Z_{\text{ПС}} = \sqrt{\frac{Z_1 Z_2}{1 + Z_1/4Z_2}} = \sqrt{\frac{\omega^2 L_1 L_2 [1 - (\omega/\omega_2)^2]}{1 + L_1 [1 - (\omega/\omega_2)^2] / L_2}}.$$

Видът на честотната характеристика на $Z_{\text{ПС}}$ е показан на фиг.3.11. За лентата на задържане $\omega = 0 \dots \omega_{\alpha}$ $Z_{\text{ПС}}$ има индуктивен характер, за лентата на задържане $\omega = \omega_{\beta} \dots \infty$ - капацитивен характер, а за лентата на пропускане - активен характер.

Зад.3.4. Да се определят елементите на Γ - образното звено на филтър за ниски честоти тип к (фиг.3.12), ако номиналното характеристично съпротивление е $R_0 = 600 \Omega$, а граничната честота е $f_c = 3200 \text{ Hz}$. Да се пресметне коефициентът на затихване α , като се изрази в неperi, децибели и с просто число, равно на отношението на амплитудите на входа и изхода, приемайки, че при тази честота филтърът е натоварен с характеристичното си съпротивление. Да се пресметнат и построят честотните характеристики на коефициентите на затихване α и на фазата β и на характеристичното съпротивление $Z_{\text{ТС}}$.

Решение:

Въз основа на формули (3.10) и (3.11) при зададени R_0 и ω_c за параметрите на елементите на филтъра се записва : $L_1/2 = R_0 / \omega_c = R_0 / 2\pi f_c = 30 \text{ mH}$; $C_2 = 2/R_0 \cdot \omega_c = 1/\pi f_c R_0 \approx 166 \text{ nF}$.

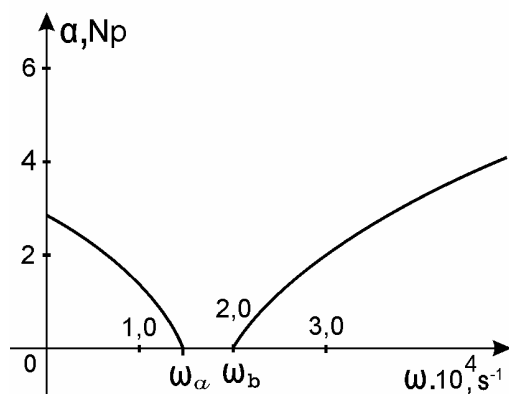
При $f = 2 f_c = 6400 \text{ Hz}$ за коефициента на затихване α се получава:

$\alpha = 2 \text{ arch}(f/f_c) = 2 \text{ arch } 2 = 2,64, \text{Nr}$. Като се има предвид, че $1 \text{ Nr} = 8,69 \text{ dB}$, за α в децибели се записва: $\alpha = 23 \text{ dB}$. За отношението U_1/U_2 се получава:

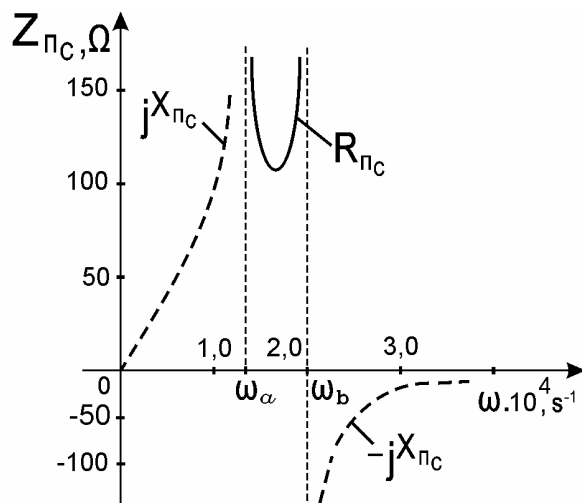
$$U_1/U_2 = e^{\alpha} = e^{2,64} = 14.$$

Честотните характеристики на величините $Z_{\text{ТС}}$, β и α се пресмятат по формули (3.12)... (3.14).

Видът на кривите $\alpha = f(\omega)$, $\beta = f(\omega)$ и $Z_{\text{ТС}} = f(\omega)$ е показан на фиг.3.13.



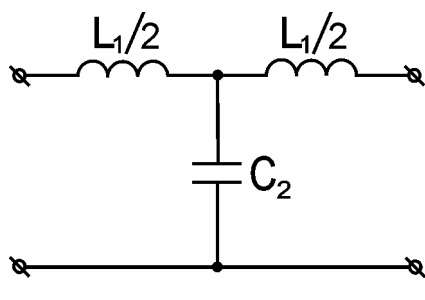
фиг.3.10



фиг.3.11

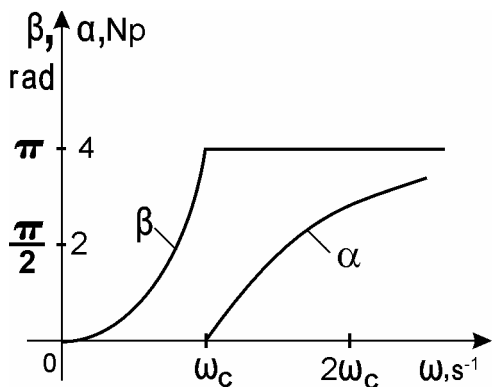
Зад.3.5. Да се определят елементите на Γ -образното звено на филтър за ниски честоти тип к (фиг.3.14), ако номиналното му характеристично съпротивление е $R_0 = 600 \Omega$, а граничната честота е $f_c = 3200 \text{ Hz}$.

Отговори: $L_1 \approx 60 \text{ mH}$ и $C_2/2 \approx 83 \text{ nF}$.

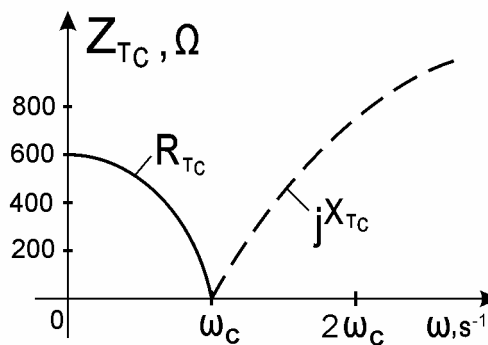


фиг.3.12

Зад.3.6. Да се определят елементите на Т-образното звено на филтър за високи честоти тип к (фиг.3.15), ако номиналното характеристично съпротивление е $R_0 = 600 \Omega$, а граничната му честота е $f_c = 3200 \text{ Hz}$. Да се пресметнат и построят честотните характеристики на коефициентите на затихване α и на фазата β и на характеристичното съпротивление Z_{TC} .



а)



б)

фиг.3.13

Решение:

Въз основа на формули (3.15) и (3.16) при зададени R_0 и ω_c за параметрите на елементите на филтъра се записва:

$$2C_1 = 1/R_0 \cdot \omega_c = 1/2\pi \cdot f_c R_0 \approx 83 \text{ nF} \text{ и } L_2 = R_0/2\omega_c = R_0/4\pi \cdot f_c = 15 \text{ mH}.$$

Честотните характеристики на Z_{TC} и α се пресмятат по формули (3.12), съответно (3.13) (следва да се има предвид, че нормираната честота Ω се определя по формула (3.17)), а на β - по формула (3.18).

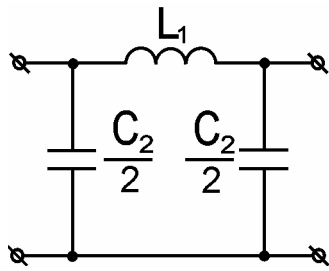
Видът на кривите $\alpha = f(\omega)$, $\beta = f(\omega)$ и $Z_{TC} = f(\omega)$ е показан на фиг.3.16.

Зад.3.7. Да се определят номиналното характеристично съпротивление R_0 и граничната честота f_c на П-образно звено на филтър за високи честоти тип к (фиг.3.17), ако параметрите на елементите му са: $C_1 = 41,5 \text{ nF}$ и $2L_2 = 30 \text{ mH}$. Да се пресметне коефициентът на затихване α при честота $f = 0,5 f_c$, като се изрази в неperi, децибели и чрез просто число, равно на отношението на амплитудите на входа и изхода, приеимайки, че при тази честота филтърът е натоварен с характеристичното си съпротивление.

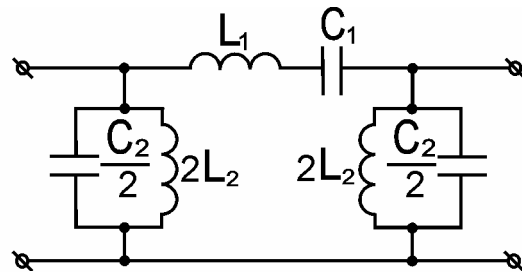
Отговори:

$$R_0 = 600 \Omega ; f_c = 3200 \text{ Hz} ; \alpha_{Np} = 2,64 \text{ Np} ; \alpha_{dB} = 23 \text{ dB} \text{ и } U_1/U_2 = 14.$$

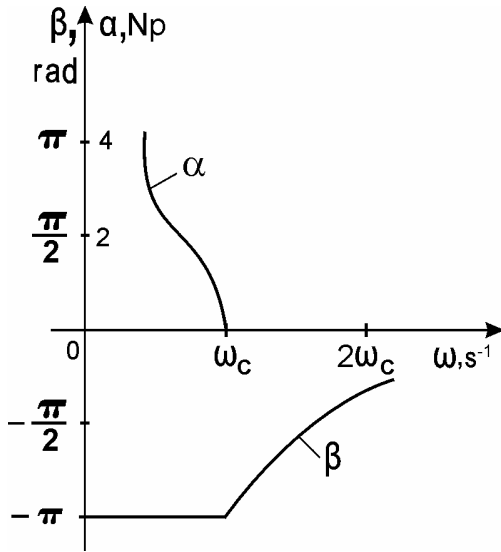
Зад.3.8. Граничните честоти на П-образно звено на лентов филтър тип к (фиг.3.18а) са: $f_{c1} = 12 \text{ kHz}$ и $f_{c2} = 15,2 \text{ kHz}$, а номиналното характеристично съпротивление $R_0 = 600 \Omega$. Да се определят параметрите на елементите на филтъра. Да се пресметнат и построят честотните характеристики на затихването α , на фазата β и на характеристичното съпротивление Z_{TC} .



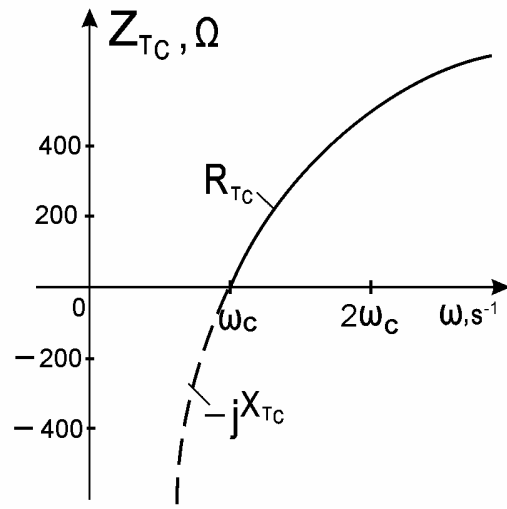
фиг.3.14



фиг.3.15

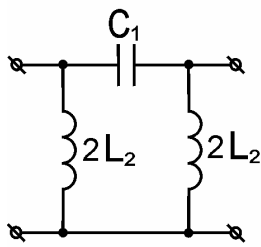


а)

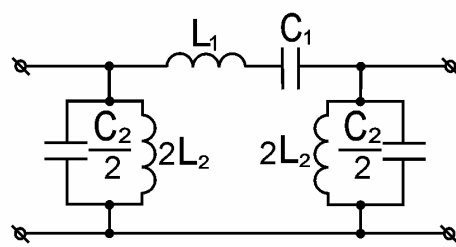


б)

фиг.3.16

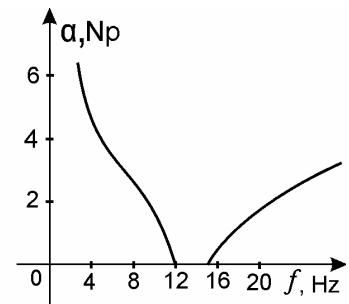


фиг.3.17



а)

фиг.3.18



б)

Решение:

Параметрите на елементите на филтъра се пресмятат по формулите :

$$L_1 = R_0/\pi.(f_{c_2} - f_{c_1}) = 60 \text{ mH}; C_1 = (f_{c_2} - f_{c_1})/4\pi.R_0f_{c_1}f_{c_2} = 2,33 \text{ nF};$$

$$2L_2 = R_0(f_{c_2} - f_{c_1})/2\pi.f_{c_1}f_{c_2} = 1,68 \text{ mH}; C_2/2 = 1/2\pi.(f_{c_2} - f_{c_1})R_0 = 83 \text{ nF}.$$

Честотните характеристики на $Z_{\text{пс}}$, β и α се пресмятат по съответните формули (3.12) ... (3.14), като се има предвид, че нормираната честота Ω се определя по формулата (3.21). Видът на кривата $\alpha = f(\omega)$ е показан на фиг.3.18б, а видът на кривите $\beta = f(\omega)$ и $Z_{\text{пс}} = f(\omega)$ - на фиг.3.19.

Зад. 3.9. Параметрите на елементите на Т-образно звено на лентов филтър тип к (фиг.3.20) са: $L_1/2 = 30 \text{ mH}$; $2C_1 = 4,66 \text{ nF}$; $L_2 = 0,84 \text{ mH}$ и $C_2 = 166 \text{ nF}$. Да се определят номиналното характеристично съпротивление R_0 и граничните честоти f_{c_1} и f_{c_2} и се пресметне коефициентът на затихване α при $f = 21 \text{ kHz}$.

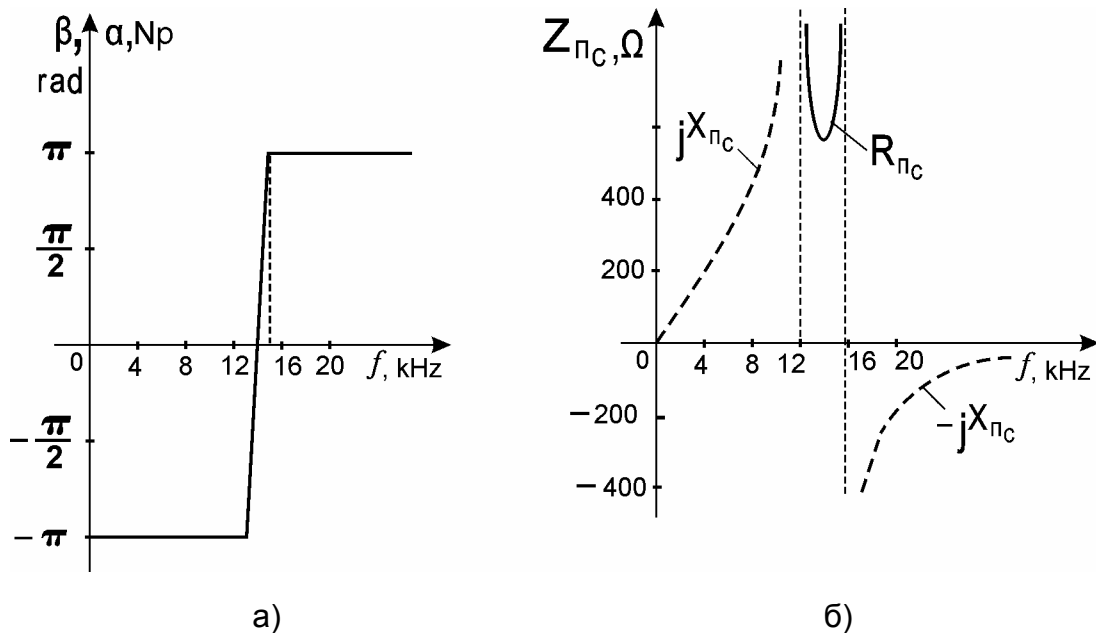
Решение:

Въз основа на формули (3.19) и (3.20) при зададени L_1 , C_1 , L_2 и C_2 се записва:

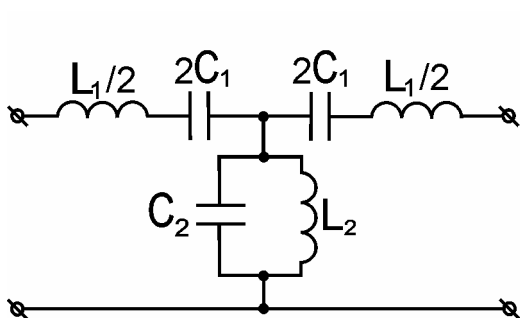
$$R_0 = \sqrt{L_1/C_2} = \sqrt{L_2/C_1} = 600 \Omega; f_{c_1} = \left[\sqrt{1/L_1 C_2 + 1/L_1 C_1} - 1/\sqrt{L_1 C_2} \right] / 2\pi = 12 \text{ kHz};$$

$$f_{c_2} = \left[\sqrt{1/L_1 C_2 + 1/L_1 C_1} + 1/\sqrt{L_1 C_2} \right] / 2\pi = 15,2 \text{ kHz}.$$

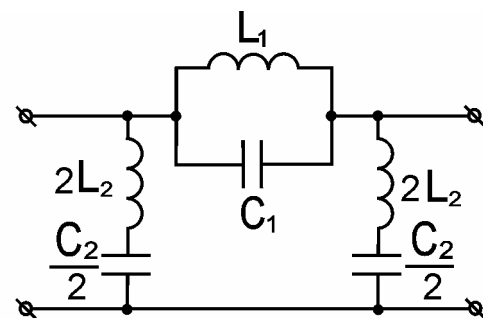
Коефициентът на затихване α се пресмята по формула (3.22), като се има предвид, че нормираната честота Ω се определя по формула (3.21). От пресмятанятия се получава: $\alpha = 2 \operatorname{arch} 3,42 = 3,8 \text{ Np}$.



фиг.3.19



фиг.3.20



фиг.3.21

Зад.3.10. Граничните честоти на П-образно звено на заграждащ филтър тип к (фиг.3.21) са: $f_{c_1} = 20$ kHz и $f_{c_2} = 23$ kHz, а номиналното му характеристично съпротивление е $R_0 = 600 \Omega$. Да се определят параметрите на елементите на филтъра и се пресметне коефициентът на затихване α при честота $f = 21$ kHz.

Решение:

Параметрите на елементите на филтъра се пресмятат по формулите:

$$L_1 = R_0(f_{c_2} - f_{c_1}) / \pi f_{c_1} f_{c_2} = 1,24 \text{ mH}; \quad C_1 = 1/4\pi(f_{c_2} - f_{c_1})R_0 = 44,3 \text{ nF};$$

$$2L_2 = R_0/2\pi(f_{c_2} - f_{c_1}) = 31,8 \text{ mH}; \quad C_2/2 = (f_{c_2} - f_{c_1})/2\pi f_{c_1} f_{c_2} R_0 = 1,78 \text{ nF}.$$

Коефициентът на затихване α се пресмята по формула (3.22), като се има предвид, че нормираната честота Ω се определя по формула (3.24). От пресмятанията се получава: $\alpha = 2\text{arch}3,31 = 3,73$ Np.

Зад. 3.11. На фиг. 3. 22 е показана схемата на П-образно звено на последователно-производен филтър за ниски честоти тип m. Да се определят параметрите на елементите на филтъра, ако номиналното характеристично съпротивление $R_0 = 600 \Omega$, граничната честота $f_c = 3200$ Hz и коефициентът $m = 0,542$. Да се пресметнат и построят честотните характеристики на затихване α и на фазата β и на характеристичното съпротивление $Z_{\text{ПС}}^m$.

Решение:

Определят се параметрите на елементите на филтъра тип к (прототипа) по формулите:

$$L_1 = R_0 / \pi f_c = 60 \text{ mH} \quad \text{и} \quad C_2 = 1/\pi f_c R_0 \approx 166 \text{ nF}.$$

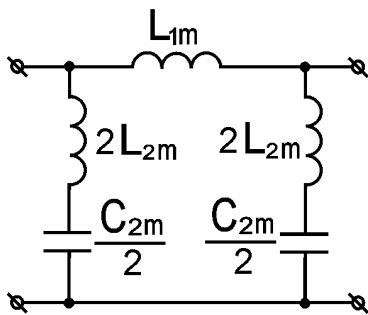
Пресмятат се параметрите на елементите на филтъра тип m:

$$L_{1m} = mL_1 = 32,5 \text{ mH}; \quad 2L_{2m} = 2(1 - m^2)L_1/4m = 39 \text{ mH} \quad \text{и} \quad C_{2m}/2 = mC_2/2 = 45 \text{ nF}.$$

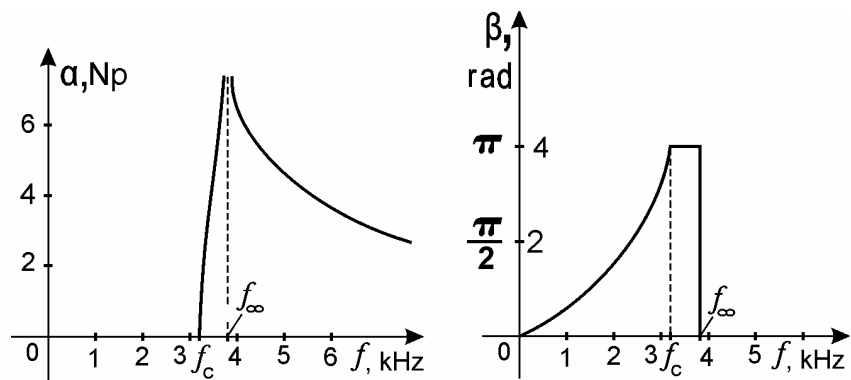
Определя се честотата f_∞ по формула (3.28):

$$f_\infty = f_c / \sqrt{1 - m^2} = 3,81 \text{ kHz}.$$

Коефициентът на затихване α се пресмята по формули (3.27). Пресмятането чрез sh се извършва за диапазона $f = f_c \dots f_\infty$, а чрез sh - за диапазона $f = f_\infty \dots \infty$. Видът на честотната характеристика на α е показан на фиг.3.23а.



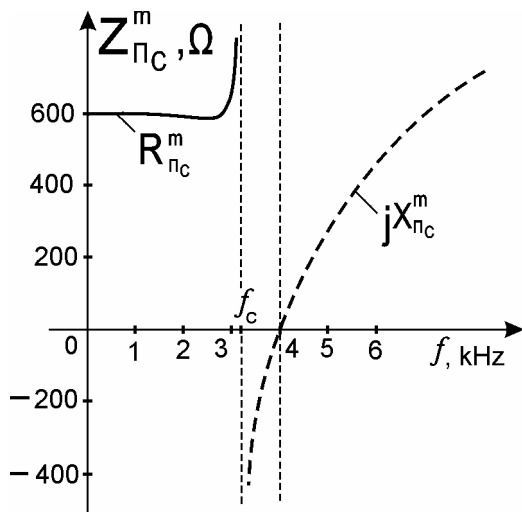
фиг.3.22



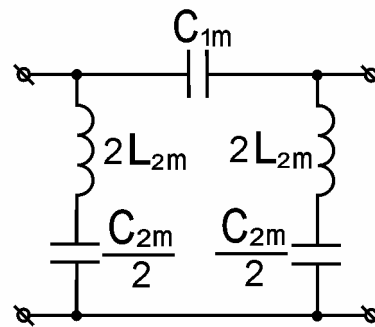
фиг.3.23

Коефициентът на фазата β се пресмята също по формула (3.27), но за лентата на пропускане. За лентата на задържане $\beta = \text{const}$, като за диапазона $f = f_c \dots f_\infty$ коефициентът на фазата $\beta = \pi$, а за диапазона $f = f_\infty \dots \infty$: $\beta = 0$, т.е при $f = f_\infty$ се изменя със скок от π до 0. Видът на честотната характеристика на β е показан на фиг.3.23б.

Характеристичното съпротивление $Z_{\Pi C}^m$ се пресмята по формула (3.25). Видът на честотната характеристика на $Z_{\Pi C}^m$ е показан на фиг. 3.24. За лентата на пропускане ($f = 0 \dots f_c$) $Z_{\Pi C}^m$ има активен характер, а за лентата на задържане - реактивен характер, като за диапазона $f = f_c \dots f_\infty$ характерът му е капацитивен, а за диапазона $f = f_\infty \dots \infty$ - индуктивен.



фиг.3.24



фиг.3.25

Зад.3.12. На фиг.3.25 е показана схемата на Π -образно звено на последователно произведен филтър за високи честоти тип m . Да се определят параметрите на елементите на филтъра, ако номиналното характеристично съпротивление $R_0 = 600 \Omega$, граничната честота $f_c = 3200 \text{ Hz}$, а коефициентът $m = 0,59$.

Решение:

Определят се параметрите на филтъра тип k (прототипа) по формулите:

$$C_1 = 1/4\pi.f_c.R_0 = 41,5 \text{ nF} \text{ и } L_2 = R_0/4\pi.f_c = 15 \text{ mH} .$$

Пресмятат се параметрите на елементите на филтъра тип m :

$$C_{1m} = C_1/m = 70,3 \text{ nF} ; 2L_{2m} = 2L_2/m = 50,8 \text{ mH} \text{ и } C_{2m}/2 = 2mC_1/(1 - m^2) = 50,6 \text{ nF} .$$

4. ВЕРИГИ С РАЗПРЕДЕЛЕНИ ПАРАМЕТРИ

ОБЩИ ПОЛОЖЕНИЯ

Параметри на еднородна двупроводна линия

Първични параметри

Те се дефинират за единица дължина от линията:

R_0 - активно съпротивление, Ω/m ;

L_0 - индуктивност, H/m ;

G_0 - активна проводимост, S/m

C_0 - капацитет, F/m .

Вторични параметри

Те се дефинират по аналогия на характеристичните параметри на пасивен четириполусник:

Z_C - вълново или характеристично съпротивление, Ω ;

$\gamma = \alpha + j\beta$ - коефициент на разпространение на вълната, $1/m$;

α - коефициент на затихване на вълната, Nep/m ;

β - коефициент на фазата на вълната, rad/m .

Вторичните параметри се изразяват чрез първичните:

$$Z_C = \sqrt{(R_0 + j\omega L_0)/(G_0 + j\omega C_0)}; \quad (4.1)$$

$$\gamma = \alpha + j\beta = \sqrt{(R_0 + j\omega L_0)(G_0 + j\omega C_0)}, \quad (4.2)$$

като:

$$\gamma \cdot Z_C = R_0 + j\omega L_0; \quad (4.3)$$

$$\gamma / Z_C = G_0 + j\omega C_0. \quad (4.4)$$

Основни параметри

Като такива се дефинират:

v_ϕ - фазова скорост на разпространение на вълната, m/s ;

λ - дължина на вълната, m .

Те се изразяват чрез вторичните параметри по формулите:

$$v_\phi = \omega / \beta; \quad (4.5)$$

$$\lambda = 2\pi / \beta; \quad (4.6)$$

Уравнения на еднородна двупроводна линия

При известни вторични параметри на линията и режимни параметри на входа \dot{U}_1, \dot{I}_1 , или на изхода \dot{U}_2, \dot{I}_2 , могат да бъдат определени напрежението $\dot{U}(x)$ и токът $\dot{I}(x)$ в коя да е точка x от линията.

Уравнения на еднородна двупроводна линия чрез прави и обратни вълни

Ако разстоянието x се отчита от началото на линията:

$$\begin{cases} \dot{U}(x) = \frac{1}{2}(\dot{U}_1 + \dot{I}_1 Z_C)e^{-\gamma x} + \frac{1}{2}(\dot{U}_1 - \dot{I}_1 Z_C)e^{\gamma x} = \dot{U}'(x) + \dot{U}''(x); \\ \dot{I}(x) = \frac{1}{2Z_C}(\dot{U}_1 + \dot{I}_1 Z_C)e^{-\gamma x} - \frac{1}{2Z_C}(\dot{U}_1 - \dot{I}_1 Z_C)e^{\gamma x} = \dot{I}'(x) - \dot{I}''(x). \end{cases} \quad (4.7)$$

Ако разстоянието x се отчита от края на линията:

$$\begin{cases} \dot{U}(x) = \frac{1}{2}(\dot{U}_2 + \dot{I}_2 Z_C) e^{\gamma x} + \frac{1}{2}(\dot{U}_2 - \dot{I}_2 Z_C) e^{-\gamma x} = \dot{U}'(x) + \dot{U}''(x); \\ \dot{I}(x) = \frac{1}{2Z_C}(\dot{U}_2 + \dot{I}_2 Z_C) e^{\gamma x} - \frac{1}{2Z_C}(\dot{U}_2 - \dot{I}_2 Z_C) e^{-\gamma x} = \dot{I}'(x) - \dot{I}''(x). \end{cases} \quad (4.8)$$

В системите уравнения (4.7) и (4.8) с $\dot{U}'(x)$ и $\dot{I}'(x)$ са означени правата вълна на напрежението и на тока, а с $\dot{U}''(x)$ и $\dot{I}''(x)$ - обратната вълна на напрежението и на тока.

Обратната вълна може да се разглежда като отразена права вълна от края на линията. Предвид на това се дефинират коефициенти на отражение по напрежение q_U и по ток q_I :

$$q_U = \dot{U}_2'' / \dot{U}_2' = (Z_T - Z_C) / (Z_T + Z_C); \quad (4.9)$$

$$q_I = \dot{I}_2'' / \dot{I}_2' = -q_U. \quad (4.10)$$

В (4.9) \dot{U}_2'' и \dot{U}_2' са обратната и правата вълна на напрежението в края на линията, а в (4.10) \dot{I}_2'' и \dot{I}_2' са аналогичните вълни за тока.

Уравнения на еднородна двупроводна линия чрез хиперболични функции
Ако разстоянието x се отчита от началото на линията:

$$\begin{cases} \dot{U}(x) = \dot{U}_1 \operatorname{ch} \gamma x - \dot{I}_1 Z_C \operatorname{sh} \gamma x \\ \dot{I}(x) = \dot{I}_1 \operatorname{ch} \gamma x - (\dot{U}_1 \operatorname{sh} \gamma x) / Z_C; \end{cases} \quad (4.11)$$

Ако разстоянието x се отчита от края на линията:

$$\begin{cases} \dot{U}(x) = \dot{U}_2 \operatorname{ch} \gamma x + \dot{I}_2 Z_C \operatorname{sh} \gamma x \\ \dot{I}(x) = \dot{I}_2 \operatorname{ch} \gamma x + (\dot{U}_2 \operatorname{sh} \gamma x) / Z_C. \end{cases} \quad (4.12)$$

Входно съпротивление на еднородна двупроводна линия

При зададено товарно съпротивление Z_T , дължина на линията l и вторични параметри Z_C и γ може да бъде пресметнато входното съпротивление на линията Z_{BX} , като се има предвид системата уравнения (4.11) или (4.12):

$$Z_{BX} = \dot{U}_{BX} / \dot{I}_{BX} = Z_C \frac{Z_T + Z_C \operatorname{th} \gamma l}{Z_C + Z_T \operatorname{th} \gamma l}. \quad (4.13)$$

Вторичните параметри на линията могат да бъдат определени и чрез входните съпротивления на линията при празен ход Z_0 и при късо съединение Z_K , като се има предвид формула (4.13):

$$Z_C = \sqrt{Z_0 \cdot Z_K}; \quad \operatorname{th} \gamma l = \sqrt{Z_K / Z_0} \quad (4.14)$$

и обратно:

$$Z_0 = Z_C / \operatorname{th} \gamma l; \quad Z_K = Z_C \operatorname{th} \gamma l. \quad (4.15)$$

Линия без изкривявания

Ако за еднородна двупроводна линия е изпълнено условието:

$$R_0 / L_0 = G_0 / C_0, \quad (4.16)$$

линията е неизкривяваща.

За такава линия величините Z_C , α , β и v_Φ се пресмятат по формулите:

$$Z_C = z_C = \sqrt{L_0 / C_0}; \quad \alpha = \sqrt{R_0 G_0}; \quad \beta = \omega \cdot \sqrt{L_0 C_0} \quad \text{и} \quad v_\Phi = 1 / \sqrt{L_0 C_0}. \quad (4.17)$$

Линия без загуби

В случай на линия без загуби ($R_0 = 0$ и $G_0 = 0$) вторичните ѝ параметри Z_C и γ и фазовата ѝ скорост v_Φ се пресмятат по формулите:

$$Z_C = z_C = \sqrt{L_0 / C_0}; \quad \alpha = 0; \quad \beta = \omega \cdot \sqrt{L_0 C_0} \quad \text{и} \quad v_\Phi = 1 / \sqrt{L_0 C_0}. \quad (4.18)$$

Очевидно е, че всяка линия без загуби е и линия без изкривявания, но обратното не е вярно.

Тъй като за линия без загуби $\gamma = j\beta$, то:

$$\operatorname{sh} \gamma x = j \sin \beta x; \operatorname{ch} \gamma x = \cos \beta x; \operatorname{th} \gamma x = j \operatorname{tg} \beta x; e^{\gamma x} = e^{j\beta x}.$$

При това уравнения (4.7), (4.8), (4.11), (4.12) и (4.13) добиват вида:

Уравнения чрез прави и обратни вълни

Ако разстоянието x се отчита от началото на линията:

$$\begin{cases} \dot{U}(x) = \frac{1}{2}(\dot{U}_1 + \dot{I}_1 z_c) e^{-j\beta x} + \frac{1}{2}(\dot{U}_1 - \dot{I}_1 z_c) e^{j\beta x} = \dot{U}'(x) + \dot{U}''(x); \\ \dot{I}(x) = \frac{1}{2z_c}(\dot{U}_1 + \dot{I}_1 z_c) e^{-j\beta x} - \frac{1}{2z_c}(\dot{U}_1 - \dot{I}_1 z_c) e^{j\beta x} = \dot{I}'(x) - \dot{I}''(x). \end{cases} \quad (4.19)$$

Ако разстоянието x се отчита от края на линията:

$$\begin{cases} \dot{U}(x) = \frac{1}{2}(\dot{U}_2 + \dot{I}_2 z_c) e^{j\beta x} + \frac{1}{2}(\dot{U}_2 - \dot{I}_2 z_c) e^{-j\beta x} = \dot{U}'(x) + \dot{U}''(x); \\ \dot{I}(x) = \frac{1}{2z_c}(\dot{U}_2 + \dot{I}_2 z_c) e^{j\beta x} - \frac{1}{2z_c}(\dot{U}_2 - \dot{I}_2 z_c) e^{-j\beta x} = \dot{I}'(x) - \dot{I}''(x). \end{cases} \quad (4.20)$$

Уравнения чрез тригонометрични функции

Ако разстоянието x се отчита от началото на линията:

$$\begin{cases} \dot{U}(x) = \dot{U}_1 \cos \beta x - j \dot{I}_1 z_c \sin \beta x \\ \dot{I}(x) = (-j \dot{U}_1 \sin \beta x) / z_c + \dot{I}_1 \cos \beta x. \end{cases} \quad (4.21)$$

Ако разстоянието x се отчита от края на линията:

$$\begin{cases} \dot{U}(x) = \dot{U}_2 \cos \beta x + j \dot{I}_2 z_c \sin \beta x \\ \dot{I}(x) = (j \dot{U}_2 \sin \beta x) / z_c + \dot{I}_2 \cos \beta x. \end{cases} \quad (4.22)$$

Входното съпротивление се определя по формулата :

$$Z_{\text{BX}} = z_c \frac{Z_T + j z_c \operatorname{tg} \beta l}{z_c + j Z_T \operatorname{tg} \beta l}. \quad (4.23)$$

Зад.4.1. На входа на линия с дължина $l = 12 \text{ km}$ при честота $\omega = 5000 \text{ s}^{-1}$ са измерени следните съпротивления на празен ход и късо съединение: $Z_{10} = 817 \cdot e^{-j45^\circ} \Omega$ и $Z_{1\text{K}} = 600 \cdot e^{j15^\circ} \Omega$. Да се определят вторичните параметри на линията Z_C , α , β и γ , а също така и първичните ѝ параметри R_0 , L_0 , G_0 и C_0 .

Решение:

Определят се вторичните параметри Z_C и γ чрез входните съпротивления на линията Z_{10} и $Z_{1\text{K}}$ съгласно формули(4.14):

$$\begin{aligned} Z_C &= \sqrt{817 \cdot e^{-j45^\circ} \cdot 600 \cdot e^{j15^\circ}} = 700 e^{-j15^\circ} \Omega, \\ \operatorname{th} \gamma l &= \sqrt{817 \cdot e^{-j45^\circ} / 600 \cdot e^{j15^\circ}} = 0,857 \cdot e^{j30^\circ} = 0,742 + j0428. \end{aligned}$$

Чрез $\text{th } \gamma l$ се изразява $e^{2\gamma l}$ (вж. зад.2.3): $e^{2\gamma l} = 3,59 \cdot e^{j72,72^\circ}$. Тъй като $e^{2\gamma l} = e^{2\alpha l} \cdot e^{j2\beta l}$, то: $e^{2\alpha l} = 3,59$, откъдето $\alpha = 5,33 \cdot 10^{-2}$, Nr / км; $e^{j2\beta l} = e^{j72,72^\circ}$, откъдето $\beta = 5,29 \cdot 10^{-2}$, rad / км. Следователно : $\gamma = (5,33 + j5,29) \cdot 10^{-2}$, км⁻¹.

Определят се първичните параметри чрез вторичните (формули(4.3) и (4.4)):

$$\gamma \cdot Z_C = R_0 + j\omega \cdot L_0 = 45,63 + j26,11, \Omega / \text{км};$$

$$\gamma / Z_C = G_0 + j\omega \cdot C_0 = (0,54 + j0,927) \cdot 10^{-4}, \text{ S / км}.$$

Следователно:

$$R_0 = 45,63, \Omega / \text{км}; L_0 = 52,22 \cdot 10^{-4}, \text{ H / км};$$

$$G_0 = 0,54 \cdot 10^{-4}, \text{ S/км}; C_0 = 18,54 \cdot 10^{-9}, \text{ F/км}.$$

Зад.4.2. Към вторичните изводи на линия без загуби с вълново съпротивление $Z_C = 400 \Omega$ е включен източник на синусоидално напрежение с честота $f = 10^8$ Hz. Първичните изводи са дадени накъсо. Да се определят амплитудите на напрежението и тока в точка на разстояние $x = 0,5$ m от началото на линията, ако токът в началото ѝ има амплитуда $I_{1m} = 10,2$ mA, а фазовата скорост е $v_\phi = c = 3 \cdot 10^8$ m/s .

Решение:

Коефициентът на фазата β се изчислява по формула (4.5): $\beta = 2\pi f / v_\phi = 2\pi/3$.

При режим на късо съединение $\dot{U}_1 = 0$. Тогава за комплексните амплитуди на напрежението и тока на разстояние , съгласно уравнения (4.21), се получава :

$$\dot{U}_m(x = 0,5) = -j \dot{I}_{m1} \cdot z_C \cdot \sin(0,5\beta) = -j 3,53, \text{ V}; \dot{I}_m(x = 0,5) = \dot{I}_{m1} \cdot \cos(0,5\beta) = 5,1, \text{ mA}.$$

Следователно, амплитудите на напрежението и тока са:

$$U_m(x = 0,5) = 3,53 \text{ V}; I_m(x = 0,5) = 5,1, \text{ mA}.$$

Зад.4.3. Линия без загуби с първични параметри $L_0 = 1,66 \mu\text{H/m}$ и $C_0 = 6,64 \text{ pF/m}$ се захранва от източник на синусоидално напрежение с честота $f = 10^8$ Hz. Да се определят моментните стойности на напрежението и тока при празен ход на разстояние $x = 0,5$ m от края на линията, ако напрежението в края ѝ има амплитуда $U_{2m} = 100$ mV.

Упътване :

Чрез използване на системата уравнения (4.22) при режим на празен ход за моментните стойности на напрежението и тока при $x = 0,5$ m се получава:

$$u(t, x = 0,5) = 50,2 \sin \omega t, \text{ mV}; i(t, x = 0,5) = 0,17 \cdot \sin(\omega t + 90^\circ), \text{ mA}.$$

Зад. 4.4. Линия без загуби с дължина $l = 35$ m има първични параметри $L_0 = 1,57, \mu\text{H / m}$ и $C_0 = 7,1 \text{ pF / m}$. Да се намерят изразите за моментните стойности на напрежението и тока в началото ѝ, ако тя е в режим на съгласуван товар. Напрежението на изхода е $U_2 = 10$ mV, а честотата $f = 10^8$ Hz.

Упътване :

Вторичните параметри на линията са: $z_C = 470 \Omega$ и $\beta = 2,09$ rad/m.

При режим на съгласуван товар ($Z_T = z_C$) комплексите на напрежението и тока в началото на линията се изчисляват по формули (4.20) :

$$\dot{U}_1 = 10 \cdot e^{-j128,8^\circ}, \text{ mV}; \dot{I}_1 = 30,09 \cdot e^{-j128,8^\circ}, \mu\text{A}.$$

За моментните стойности на входното напрежение и ток се получава:
 $u_1(t) = 14,14 \cdot \sin(\omega \cdot t - 128,8^\circ)$, mV; $i_1(t) = 30,09 \cdot \sin(\omega \cdot t - 128,8^\circ)$, μ A .

Зад.4.5. Линия без загуби с параметри $L_0 = 1,67 \mu\text{H} / \text{m}$ и $C_0 = 6,67 \text{ pF} / \text{m}$ и дължина $l = 5 \text{ m}$ има чисто активен товар $R_T = 2z_C$. Ефективната стойност на напрежението върху товара е $U_2 = 10 \text{ V}$, а честотата му е $f = 10^8 \text{ Hz}$. Да се определят входното съпротивление на линията и комплексните стойности на напрежението и тока в началото ѝ.

Отговори: $Z_{\text{BX}} = 331,9 e^{-j28^\circ 9'}$, Ω ; $\dot{U}_1 = 6,04 e^{j226^\circ 36'}$, V; $\dot{I}_1 = 18,2 e^{j254^\circ 45'}$, mA.

Зад.4.6. Да се намери входното съпротивление $Z_{\text{BX}_{aa'}}$, на свръхвисокочестотна линия без загуби (фиг. 4.1), натоварена с паралелно съединени резистор със съпротивление R и късосъединен шлейф (дълга линия без загуби, дадена накъсо). Дадени са: $z_C = z_{\text{CIII}} = 600 \Omega$; $R = 500 \Omega$; $l = 190 \text{ cm}$; $l_{\text{III}} = 10 \text{ cm}$ и $\lambda = \lambda_{\text{III}} = 120 \text{ cm}$.

Решение :

Входното съпротивление на късосъединения шлейф се определя по формула (4.23) при $Z_{\text{TIII}} = 0$: $Z_{\text{BXIII}} = jz_{\text{CIII}} \cdot \text{tg}(\beta_{\text{III}} l_{\text{III}}) = j346,4 \Omega$.

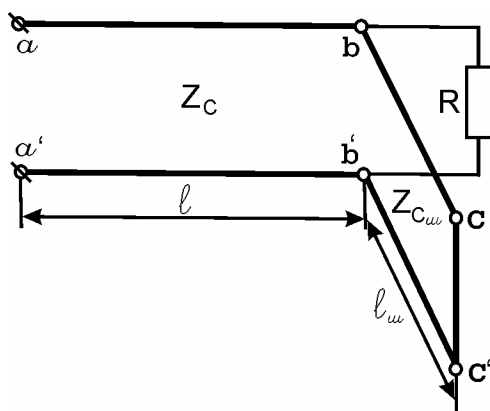
Товарът на линията е: $Z_{\text{bb}'} = (R \cdot Z_{\text{BXIII}}) / (R + Z_{\text{BXIII}}) = 285 \cdot e^{j51,46^\circ} \Omega$.

Тогава входното съпротивление на линията ще бъде:

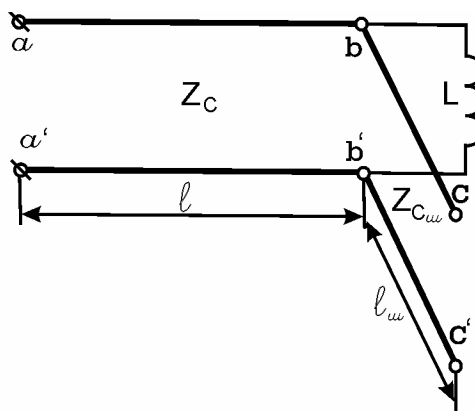
$Z_{\text{BX}_{aa'}} = z_C (Z_{\text{bb}'} + jz_C \text{tg} \beta l) / (z_C + j Z_{\text{bb}'} \text{tg} \beta l) = 721,7 \cdot e^{j61^\circ} \Omega$.

Зад.4.7. Да се намери входното съпротивление $Z_{\text{BX}_{aa'}}$, на линия без загуби (фиг.4.2), натоварена с паралелно съединени бобина със съпротивление $X_L = 500 \Omega$ и отворен шлейф (участък от дълга линия без загуби в режим на празен ход) Дадени са : $z_C = 600 \Omega$; $z_{\text{CIII}} = 600 \Omega$; $l = 190 \text{ cm}$; $l_{\text{III}} = 10 \text{ cm}$ и $\lambda = \lambda_{\text{III}} = 120 \text{ cm}$.

Отговор : $Z_{\text{BX}_{aa'}} = j17467 \Omega$.



фиг.4.1



фиг.4.2

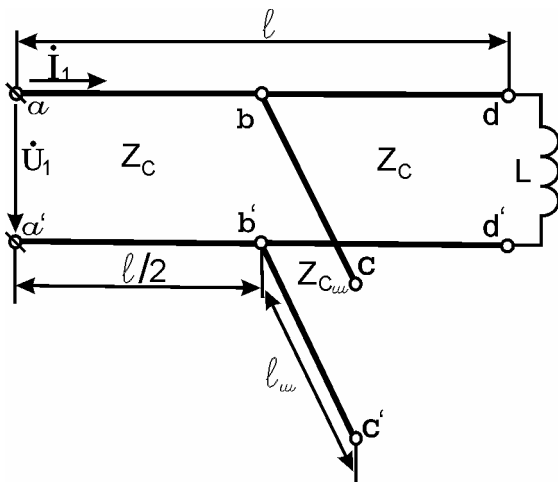
Зад.4.8. Да се намери входното съпротивление $Z_{\text{BX}_{aa'}}$, на линия без загуби (фиг.4.3) с дължина $l = 60 \text{ cm}$, натоварена с бобина със съпротивление $X_L = 150 \Omega$.

В средата на линията е включен отворен шлейф с дължина $l_{III} = 15 \text{ cm}$. Вълновите съпротивления на линията и шлейфа са равни, т.е. $z_C = z_{CIII} = 300 \Omega$, а дължината на вълната в линията и в шлейфа е $\lambda = \lambda_{III} = 120 \text{ cm}$.

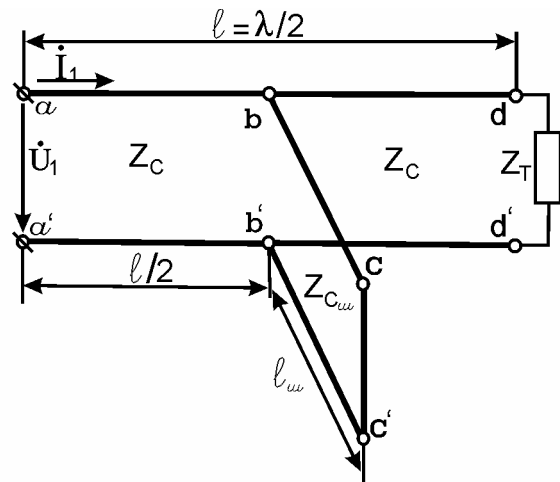
Упътване :

Задачата се решава аналогично, както зад.4.6, като отначало се определя входното съпротивление $Z_{BX_{bb'}}$ на участъка от линията с дължина $l/2$, натоварен с бобината.

За входното съпротивление $Z_{BX_{aa'}}$ се получава: $Z_{BX_{aa'}} = j 450, \Omega$.



фиг.4.3



фиг.4.4

Зад.4.9. На входа на линия без загуби (фиг. 4.4) е подадено синусоидално напрежение с ефективна стойност $U_1 = 10 \text{ V}$. Линията има вълново съпротивление $z_C = 100 \Omega$ и е в режим на съгласуван товар. В средната ѝ част е включен късосъединен шлейф с вълново съпротивление $z_{CIII} = 100 \Omega$ и дължина $l_{III} = \lambda/8$, където λ е дължината на вълната в линията и в шлейфа. Дължината на линията е $l = \lambda/2$. Да се определят входното ѝ съпротивление $Z_{BX_{aa'}}$ и токът в началото ѝ.

Отговори : $Z_{BX_{aa'}} = 100 - j100, \Omega$ и $I_1 = 71.e^{j45^\circ}, \text{ mA}$.

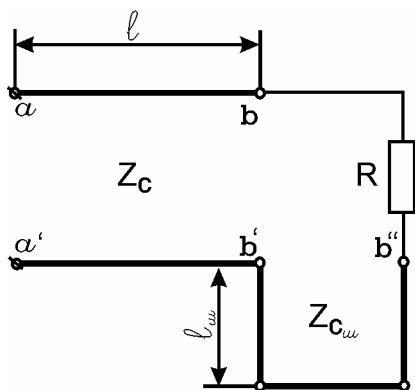
Зад.4.10. Да се определи входното съпротивление на линия без загуби (фиг.4.5), натоварена с последователно съединени резистор със съпротивление R и късосъединен шлейф. Дадени са: $z_C = z_{CIII} = 600 \Omega$; $R = 500 \Omega$; $l = 190 \text{ cm}$; $l_{III} = 10 \text{ cm}$ и $\lambda = \lambda_{III} = 120 \text{ cm}$.

Отговор : $Z_{BX_{aa'}} = 1040.e^{j18^\circ 20'}, \Omega$.

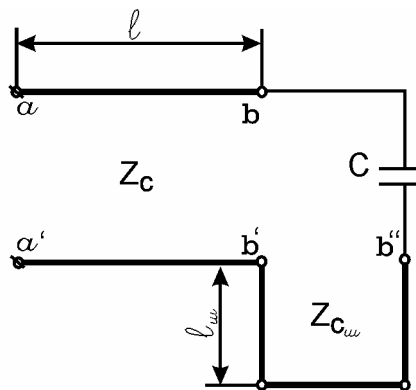
Зад.4.11. Да се определи входното съпротивление на линия без загуби (фиг.4.6), натоварена с последователно съединени кондензатор със съпротивление

$X_C = 500 \Omega$ и късосъединен шлейф. Дадено е: $z_C = z_{CIII} = 400 \Omega$; $l = 30 \text{ cm}$; $l_{III} = 20 \text{ cm}$ и $\lambda = \lambda_{III} = 240 \text{ cm}$.

Отговор: $Z_{BX_{aa'}} = j77,6, \Omega$.



фиг.4.5



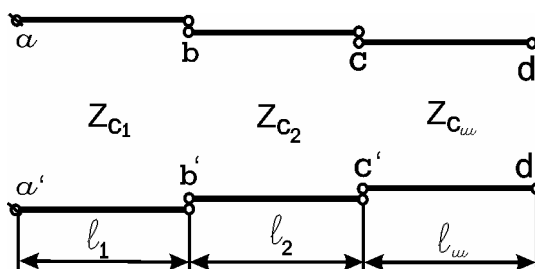
фиг.4.6

Зад.4.12. Да се определи входното съпротивление на линия без загуби (фиг.4.7), към която, посредством друга линия без загуби, е свързан отворен шлейф.. Дадено е: $z_{C1} = 200 \Omega$; $z_{C2} = 300 \Omega$; $z_{CIII} = 400 \Omega$; $l_1 = 15 \text{ cm}$; $l_2 = 30 \text{ cm}$; $l_{III} = 10 \text{ cm}$ и $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_{III} = 120 \text{ cm}$.

Упътване:

Определят се последователно $Z_{BX_{cc'}}$, $Z_{BX_{bb'}}$ и се получава:

$Z_{BX_{aa'}} = j941,22, \Omega$.



фиг.4.7

5. НЕЛИНЕЙНИ ЕЛЕКТРИЧЕСКИ ВЕРИГИ

ОБЩИ ПОЛОЖЕНИЯ

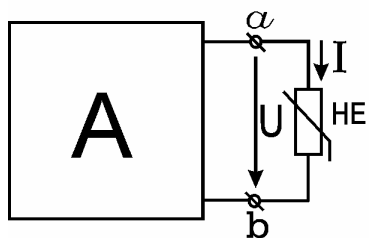
5.1. ПОСТОЯННОТОКОВИ РЕЖИМИ

При анализ на нелинейни електрически вериги се използват законите на Кирхоф. При постояннотокови режими се получават системи нелинейни алгебрични уравнения. За решаването им се прилагат аналитични, графични или графоаналитични методи в зависимост от начина на задаване на характеристиките на нелинейните елементи.

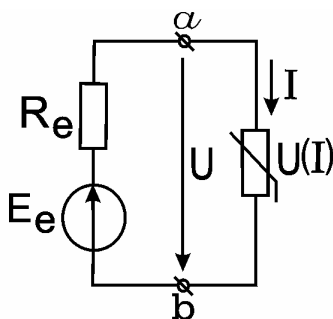
При графично решаване на системата уравнения на верига, съставена от смесено съединени участъци, се определя резултантната волт-амперна (V-A) характеристика $U(I)$ въз основа на законите на Кирхоф. При активни клонове (от последователен или паралелен тип) резултантната V-A характеристика се получава чрез транслация на V-A характеристика на пасивния елемент. Това се извършва съобразно законите на Кирхоф.

При сложни електрически вериги с един, два или повече нелинейни елементи (НЕ) се използва теорията на активните линейни двуполюсници, четириполюсници или многополюсници.

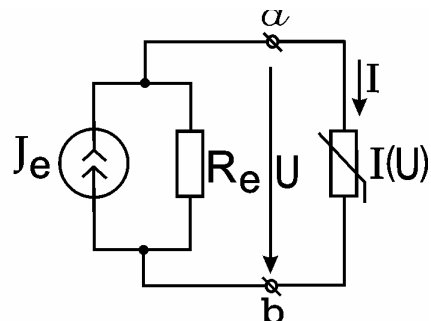
При сложна електрическа верига с един НЕ активният линеен двуполюсник (АД) (фиг.5.0.1) се заменя с еквивалентен генератор на е.д.н. с параметри E_e, R_e (фиг.5.0.2), или на ток с параметри J_e, R_e (фиг.5.0.3). Режимните параметри на НЕ (U, I) се определят въз основа на веригите от фиг.5.0.2 или фиг.5.0.3. Режимните параметри на останалите елементи се определят въз основа на изходната верига (фиг.5.0.1) чрез законите на Кирхоф.



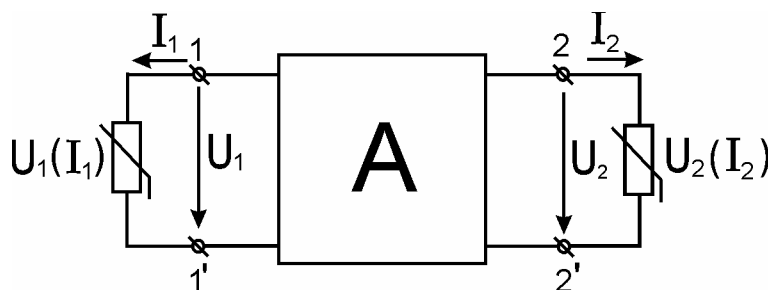
фиг.5.0.1



фиг.5.0.2



фиг.5.0.3

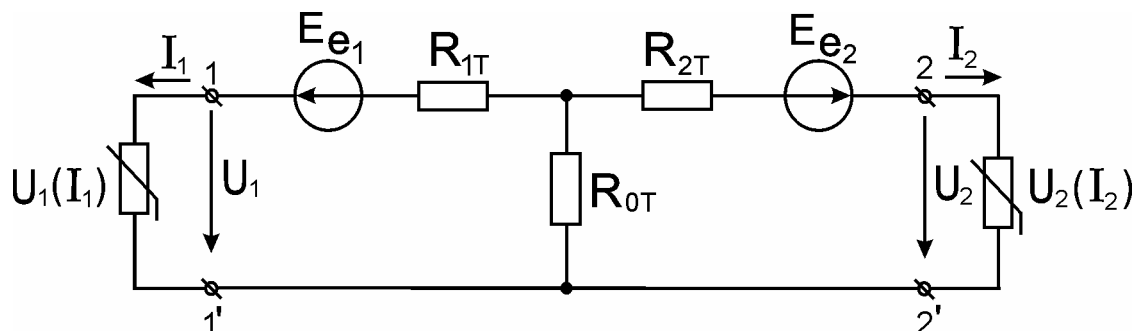


фиг.5.0.4

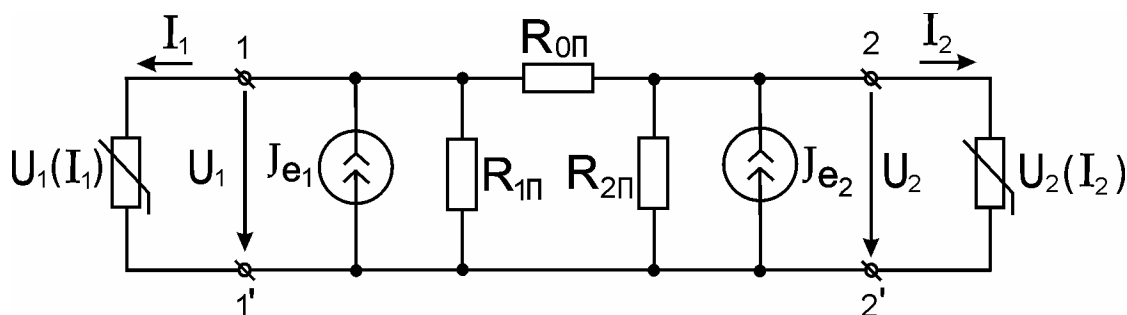
При сложна верига с два НЕ активният линеен четириполюсник (АЧ) (фиг.5.0.4) се заменя с пасивен четириполюсник (ПЧ) и с два генератора. В случай на генератори на е.д.н. ПЧ е удобно да се замени с T-еквивалентна заместваща

схема (фиг.5.0.5), а в случай на генератори на ток - с П-еквивалентна заместваща схема (фиг.5.0.6).

В първия случай се получава верига с два възела, а във втория случай - верига със смесено съединени участъци. Режимните параметри (U_1, I_1) , (U_2, I_2) на НЕ се получават от анализа на тези вериги, които се извършва въз основа на законите на Кирхоф.



фиг.5.0.5



фиг.5.0.6

5.2. ПЕРИОДИЧНИ РЕЖИМИ

По отношение на периодичните режими нелинейните елементи (НЕ) се разделят на инерционни и безинерционни, което обуславя различния характер на процесите и съответно, на методите за анализ.

При инерционните НЕ нелинейна е връзката между ефективните стойности на тока и напрежението, докато между моментните им стойности е линейна. Това позволява при анализа да се използва комплексният метод. Получената система алгебрични уравнения е нелинейна.

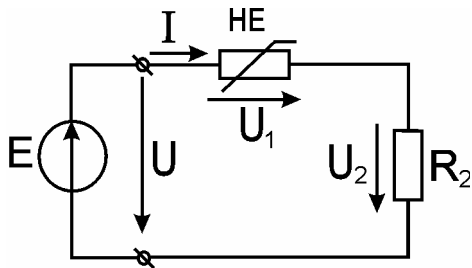
При безинерционните НЕ нелинейна е и връзката между моментните стойности на тока и напрежението. При резисторите нелинейна е зависимостта $u_R = u_R(i_R)$, при бобините $\psi_L = \psi_L(i_L)$, а при кондензаторите $q_C = q_C(u_C)$, т.е. нелинейни са техните волт-амперни (V-A) характеристики (при резисторите), вебер-амперни (Wb-A) характеристики (при бобините) и кулон-волтови (C-V) характеристики (при кондензаторите).

Това обуславя възникването на висши хармоници даже и при синусоидални захранващи източници, и затруднява анализа (неприложим е комплексният метод).

Анализът на периодичните режими във вериги с безинерционни НЕ може да бъде облекчен чрез прилагане на метода на еквивалентните синусоиди. При този метод несинусоидалните величини се заменят с еквивалентни синусоиди. Изборът на еквивалентната синусоида зависи от конкретната задача и се извършва най-често по първи хармоник или по ефективна стойност на несинусоидалната величина. След

замяната е приложим комплексният метод, но получените системи уравнения за комплексните величини са нелинейни.

Зад.5.1.1. Верига от последователно съединени нелинеен елемент с волт-амперна характеристика $I_1 = 3,1 \cdot 10^{-8} \cdot U_1^{3,5}$ и линеен резистор R_2 (фиг.5.1.1) е включена към източник на постоянно напрежение $E = 120 \text{ V}$. Да се определи съпротивлението на резистора R_2 , при което във веригата преминава ток $I = 0,22 \text{ A}$. Да се определят мощностите, изразходвани в нелинейния елемент и в линейния резистор.



Фиг.5.1.1

Решение:

От волт-амперната характеристика на нелинейния елемент се определя напрежението U_1 при зададения ток $I = 0,22 \text{ A}$:

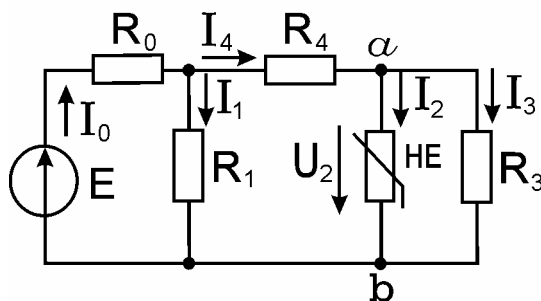
$$0,22 = 3,1 \cdot 10^{-8} \cdot U_1^{3,5}; \quad U_1^{3,5} = 7,1 \cdot 10^6; \quad 3,5 \cdot \lg U_1 = 6,851; \\ U_1 = 90,7 \text{ V};$$

За веригата по II закон на Кирхоф се записва: $U = U_1 + R_2 \cdot I$, откъдето $R_2 = (U - U_1) / I = 133 \Omega$.

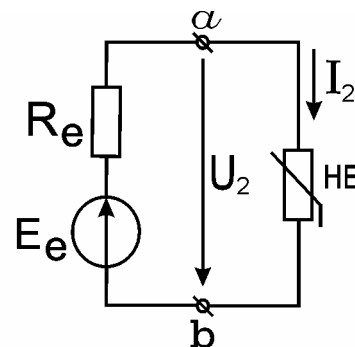
За мощностите се получава:

$$P_1 = U_1 \cdot I = 19,95 \text{ W}; \quad P_2 = R_2 \cdot I^2 = 6,45 \text{ W}.$$

Зад.5.1.2. За показаната верига (фиг.5.1.2) $E = 70 \text{ V}$; $R_0 = 5 \Omega$; $R_1 = 50 \Omega$; $R_3 = 20 \Omega$ и $R_4 = 10 \Omega$. Волт-амперната характеристика на нелинейния елемент е зададена аналитично: $U_2 = 5 \cdot I_2^2$. Да се определят токовете в клоновете на веригата.



фиг.5.1.2



фиг.5.1.3

Решение:

За определяне на тока и напрежението на нелинейния елемент се използва теорията на активните двуполусници. По отношение на клон с нелинейния елемент (между точки a и b) активният двуполусник се заменя с еквивалентен генератор на е.д.н. E_e с вътрешно съпротивление R_e .

Стойностите на E_e и R_e се определят както при линейните електрически вериги и за случая се получава:

$$E_e = U_{ab \text{ ПХ}} = 700/19 \text{ V}; \quad R_e = R_{ab \text{ ВХ}} = 160/19 \Omega.$$

От схемата от фиг.5.1.3 при намерените стойности на E_e и R_e се записва:

$$E_e = I_2 R_e + U_2 = I_2 R_e + 5 \cdot I_2^2,$$

откъдето за I_2 се получава: $I_2 = 2 \text{ A}$ (в случая за решение на горното квадратно уравнение се взема само положителният корен).

Останалите токове се определят въз основа на законите на Ом и Кирхоф за схемата от фиг.5.1.2.

Получените стойности са: $I_0 = 4 \text{ A}$; $I_1 = 1 \text{ A}$; $I_3 = 1 \text{ A}$ и $I_4 = 3 \text{ A}$.

Зад.5.1.3. За показаната верига (фиг.5.1.4) $J = 2 \text{ A}$; $G = 0,2 \text{ S}$; $E_1 = 20 \text{ V}$ и $R_1 = R_2 = 10 \text{ }\Omega$. Волт-амперната характеристика на нелинейния елемент е зададена аналитично: $U_3 = 0,7 \cdot I_3^2$. Да се определят токовете в клоновете на веригата.

Упътване:

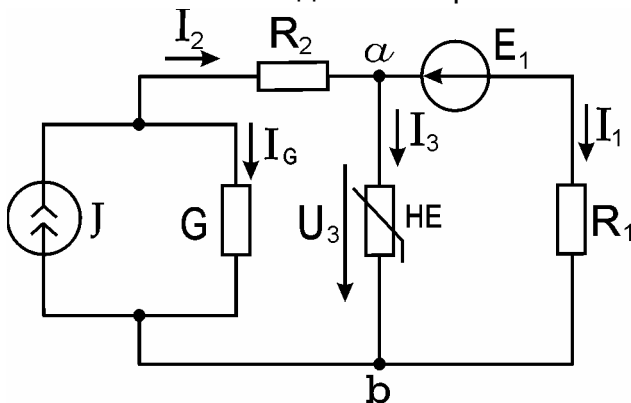
Задачата се решава аналогично, както зад.5.1.2. За параметрите на еквивалентния генератор на е.д.н. се получават стойностите: $E_e = 16 \text{ V}$ и $R_e = 6 \text{ }\Omega$.

За тока I_3 на НЕ се намира: $I_3 = 2,13 \text{ A}$, а за напрежението му: $U_3 = 3,19 \text{ V}$.

Стойностите на останалите токове са: $I_1 = -1,68 \text{ A}$; $I_2 = 0,45 \text{ A}$ и $I_0 = 1,55 \text{ A}$.

Зад.5.1.4. За показаната верига (фиг.5.1.5) $E_1 = 100 \text{ V}$; $J_5 = 1 \text{ A}$; $R_2 = 10 \text{ }\Omega$; $R_3 = 5 \text{ }\Omega$ и $R_4 = 15 \text{ }\Omega$. Волт-амперната характеристика на нелинейния елемент е зададена аналитично: $U_6 = 3,2 \cdot I_6^2$. Да се определят токовете в клоновете на веригата.

Упътване: Задачата се решава аналогично, както зад.5.1.2.



фиг.5.1.4

За параметрите на еквивалентния генератор на е.д.н. се получават стойностите: $E_e = 81,67 \text{ V}$ и $R_e = 4,17 \text{ }\Omega$.

За тока I_6 на нелинейния елемент се получава $I_6 = 4,44 \text{ A}$, а за напрежението: $U_6 = 63,15 \text{ V}$.

Стойностите на останалите токове са: $I_1 = 6,37 \text{ A}$; $I_2 = 1,93 \text{ A}$; $I_3 = 7,37 \text{ A}$ и $I_4 = 2,93 \text{ A}$.

Зад.5.1.5. За показаната верига (фиг.5.1.6) $E_1 = 12 \text{ V}$; $E_2 = 23 \text{ V}$; $R_1 = 250 \text{ }\Omega$; $R_2 = 150 \text{ }\Omega$; $R_3 = 700 \text{ }\Omega$; $R_4 = 100 \text{ }\Omega$ и $R_5 = 500 \text{ }\Omega$. Волт-амперната характеристика на нелинейния елемент $U_6 = U_6(I_6)$ е зададена таблично (табл.5.1.1). Да се определят токовете в клоновете на верига.

Таблица 5.1.1

I_6	mA	0	17,5	30	40	50	60
U_6	V	6	2,5	5	7,5	10	15

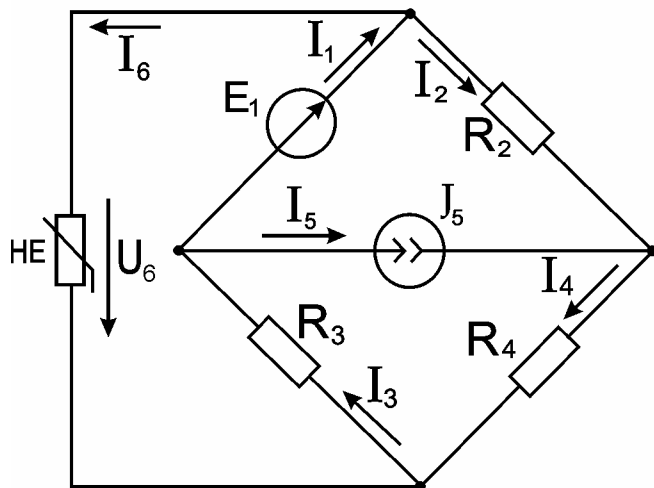
Упътване:

При решаване на задачата се използва теорията на активните двуполусници аналогично, както при зад.5.1.2.

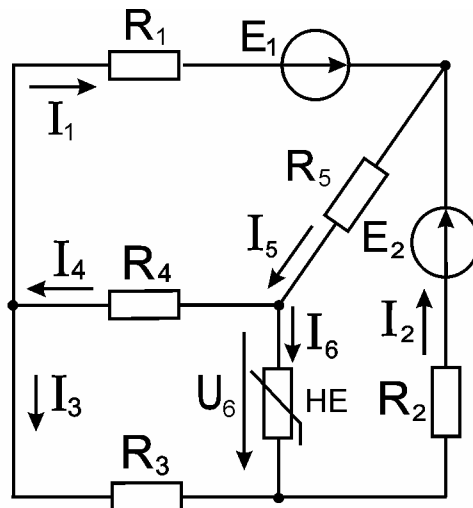
За параметрите на еквивалентния генератор на е.д.н. се получават следните стойности: $E_e = 11,73 \text{ V}$ и $R_e = 270 \text{ }\Omega$.

За определяне на режима на НЕ се строят волт-амперната характеристика $U_6 = U_6(I_6)$ и зависимостта $U_{bc} = U_{bc}(I_6) = E_e - I_6 \cdot R_e$. Пресечната им точка дава търсеното решение за режима на НЕ: $U_6 = 5 \text{ V}$ и $I_6 = 25 \text{ mA}$.

Останалите токове се намират по законите на Ом и Кирхоф и имат следните стойности: $I_1 = 10 \text{ mA}$; $I_2 = 30 \text{ mA}$; $I_3 = 5 \text{ mA}$; $I_4 = 15 \text{ mA}$ и $I_5 = 40 \text{ mA}$.



фиг.5.1.5



фиг.5.1.6

Зад.5.1.6. За показаната верига (фиг.5.1.7) $E = 12 \text{ V}$; $R_3 = 6 \Omega$; $R_4 = 12 \Omega$ и $R_5 = 2 \Omega$. Волт-амперните характеристики на HE_1 ($U_1 = U_1(I_1)$) и на HE_2 ($U_2 = U_2(I_2)$) са зададени таблично (табл.5.1.2 и 5.1.3). Да се определят токовете I_1 , I_2 и I_5 .

Таблица 5.1.2.

U_1	V	0	2	4	6	8	10	12	14
I_1	A	0	0,765	1,28	1,6	1,82	2	2,09	2,13

Таблица 5.1.3.

U_2	V	0	2	4	6	8	10	12
I_2	A	0	0,18	0,37	0,615	0,9	1,5	2,72

Решение:

При решаване на задачата се използва теорията на активните четириполусници. По отношение на клоновете с нелинейни елементи (между точки а и b и между точки с и b) активният четириполусник се заменя с пасивен четириполусник и с два източника на е.д.н., включени в тези клонове (фиг.5.1.8).

Стойностите на е.д.н. на източниците са: $E_{1e} = U_{abПХ} = 4 \text{ V}$ и $E_{2e} = U_{bcПХ} = 8 \text{ V}$, а стойността на съпротивлението R_{34} е: $R_{34} = R_3 \cdot R_4 / (R_3 + R_4) = 4 \Omega$.

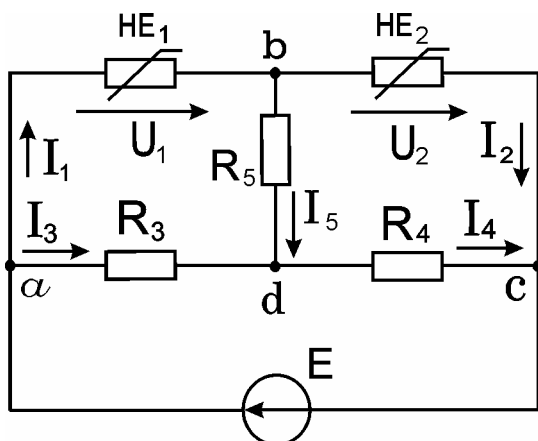
За определяне на токовете I_1 , I_2 и I_5 по законите на Кирхоф се записват уравненията: $I_1 = I_2 + I_5$; $E_{1e} = U_{ba} + U_1$ и $E_{2e} = -U_{ba} + U_2$.

За графично решаване на горните уравнения се строят зависимостите:

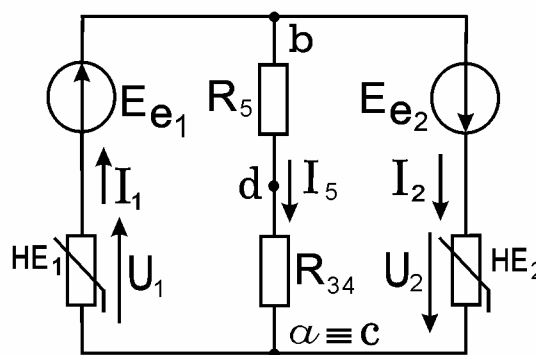
$$I_1 = f_1(U_{ba}) = f_1(E_{1e} - U_1) \quad I_2 = f_2(U_{ba}) = f_2(U_2 - E_{2e})$$

$$I_5 = f_5(U_{ba}) = U_{ba} / (R_5 + R_{34}) \quad \text{и} \quad I_2 + I_5 = I_2(U_{ba}) + I_5(U_{ba}) = f_{25}(U_{ba}).$$

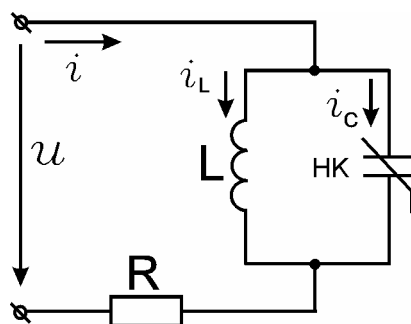
От пресечната точка на графиките $I_2 + I_5 = f_{25}(U_{ba})$ и $I_1 = f_1(U_{ba})$ се определя токът $I_1 = 1,15$ А. За тази стойност на I_1 за I_2 и I_5 се получават съответно: $I_2 = 1,05$ А и $I_5 = 0,1$ А.



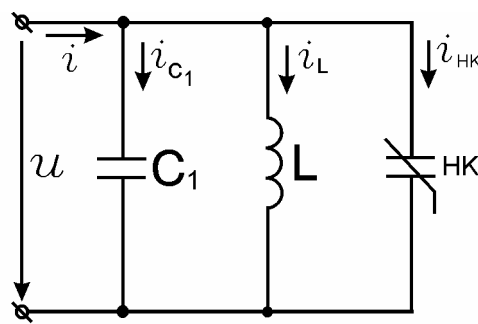
фиг.5.1.7



фиг.5.1.8



фиг.5.2.1



фиг.5.2.2

Зад. 5.2.1. За веригата, показана на фиг. 5.2.1, линейният резистор има съпротивление $R = 4 \Omega$, линейната bobина е с индуктивност L , а кулон-волтовата характеристика на нелинейния кондензатор е: $q = a_1 \cdot u + a_2 \cdot u^3$. Стойностите на коефициентите a_1 и a_2 са: $a_1 = 4,1 \cdot 10^{-7}$, C/V и $a_2 = 0,35 \cdot 10^{-11}$, C/V³. Веригата е включена към източник на синусоидално напрежение ($U = 100$ V; $f = 300$ Hz). Да се определи индуктивността L на бобината, при която токът i в неразклонената част на веригата не съдържа първи хармоник. Да се запише уравнението за напрежението върху резистора R (при пресмятането на токовете i_L и i_C да се пренебрегнат съпротивлението R и загубите в бобината и кондензатора).

Решение:

При синусоидално входно напрежение $u = U_m \cdot \sin \omega t$ и при пренебрегване на съпротивлението R , т.е. $u_C = u$, за заряда q на кондензатора се получава:

$$q = a_1 \cdot U_m \cdot \sin \omega t + a_2 \cdot U_m^3 \cdot \sin^3 \omega t = (a_1 \cdot U_m + 0,75 \cdot U_m^3 \cdot a_2) \sin \omega t - 0,25 \cdot a_2 \cdot U_m^3 \cdot \sin 3\omega t,$$

тъй като $\sin^3 \omega t = 0,75 \sin \omega t - 0,25 \sin 3\omega t$.

За тока i_C през кондензатора се записва:

$$i_C = \frac{dq}{dt} = I_{mC}^{(1)} \cdot \cos \omega t - I_{mC}^{(3)} \cdot \cos 3\omega t,$$

където $I_{mC}^{(1)} = \omega \cdot (a_1 \cdot U_m + 0,75 \cdot a_2 \cdot U_m^3)$; $I_{mC}^{(3)} = 0,75 \cdot \omega \cdot a_2 \cdot U_m^3$.

Токът през бобината i_L се определя от израза: $i_L = -I_{mL} \cdot \cos \omega t$,

където $I_{mL} = U_m / \omega L$.

За тока i на входа на веригата се записва:

$$i = i_L + i_C = (I_{mC}^{(1)} - I_{mL}) \cos \omega t - I_{mC}^{(3)} \cos 3\omega t.$$

За да отсъствува първи хармоник в тока i е необходимо:

$$I_{mC}^{(1)} - I_{mL} = 0,$$

откъдето за индуктивността L се получава:

$$L = 1 / (a_1 + 0,75 \cdot a_2 \cdot U_m^2) \omega^2 = 0,612 \text{ H}.$$

За напрежението върху резистора R се записва:

$$u_R = R I_{mC}^{(3)} \cdot \sin(3\omega t - 90^\circ) = 0,036 \cdot \sin(3\omega t - 90^\circ) \text{ V}.$$

Зад.5.2.2. За веригата, показана на фиг.5.2.2, линейният кондензатор има капацитет $C_1 = 0,0366 \mu\text{F}$, линейната бобина е с индуктивност L , а кулон-волтовата характеристика на нелинейния кондензатор е: $q = a_1 \cdot u + a_2 \cdot u^3$. Стойностите на коефициентите a_1 и a_2 са: $a_1 = 4,1 \cdot 10^{-7}$, C/V и $a_2 = 0,35 \cdot 10^{-11}$, C/V^3 . Веригата е включена към източник на синусоидално напрежение ($U = 100 \text{ V}$; $f = 300 \text{ Hz}$). Да се определи индуктивността L на бобината, при която токът i в неразклонената част на веригата не съдържа първи хармоник.

Упътване:

Изразите за токовете i_{HK} и i_L са аналогични, както в зад.5.2.1, а за тока i_{C_1} се получава: $i_{C_1} = I_{mC_1} \cdot \cos \omega t$,

където $I_{mC_1} = \omega C \cdot U_m$.

По-нататък се записва изразът за тока i на входа на веригата $i = i_{C_1} + i_L + i_{HK}$, от който за индуктивността L се получава:

$$L = 1 / (C + a_1 + 0,75 \cdot a_2 \cdot U_m^2) \omega^2 = 0,5 \text{ H}.$$

Зад.5.2.3. Бобина с феромагнитна сърцевина има $W = 100$ нав.; дължина на средната индукционна линия $l_{cp} = 0,25 \text{ m}$ и сечение на магнитопровода $S = 4 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2$. Връзката между магнитната индукция B и интензитета на магнитното поле H се дава с уравнението: $H = 0,25 \cdot 10^2 \cdot B - 1,5 \cdot 10^4 \cdot B^3 \text{ A/m}$. Към бобината е подадено синусоидално напрежение ($U_m = 1 \text{ V}$; $f = 50 \text{ Hz}$). Да се определи ефективната стойност на тока през бобината.

Решение:

При известно входно напрежение $u = u_L = U_m \cdot \sin \omega t$, като се използва зависимостта: $u_L = W \cdot S \cdot dB/dt$, се определя магнитната индукция B :

$$B = \left(\int_0^t U_m \cdot \sin \omega t \, dt \right) / W \cdot S = -7,96 \cdot 10^{-2} \cdot \cos \omega t, \text{ T}.$$

Тогава за интензитета H на магнитното поле се получава:

$$H = 0,95 \cos \omega t + 1,64 \cos 3\omega t, \text{ A/m}.$$

От закона за пълния ток се намира токът i през бобината:

$$i = H \cdot l_{cp} / W = 2,4 \cdot \cos \omega t + 4,1 \cdot \cos 3\omega t, \text{ A}.$$

За ефективната му стойност I се получава: $I = 3,66 \text{ mA}$

Зад.5.2.4. Бобина с феромагнитна сърцевина има параметри: $W = 100$ нав.; $l_{cp} = 0,25 \text{ m}$; и $S = 4 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2$. Връзката между H и B се дава с изрази:

$H = 0,8 \cdot 10^2 \cdot B + 1,3 \cdot 10^4 \cdot B^3$, A/m. Паралелно към бобината е свързан линеен кондензатор C и към веригата е подадено синусоидално напрежение ($U_m = 1$ V; $f = 50$ Hz). Да се определи капацитетът C на кондензатора, така че токът в неразклонената част на веригата да не съдържа първи хармоник.

Упътване:

Аналогично, както при зад.5.2.3, се определя токът през бобината, за който се получава:

$$i_L = (-3,4 \cdot \cos \omega t + 4,1 \cdot \cos 3\omega t) \cdot 10^{-3}, \text{ A.}$$

За тока през кондензатора се записва:

$$i_C = \omega C \cdot U_m \cdot \cos \omega t = 314 \cdot C \cdot \cos \omega t, \text{ A.}$$

Токът в неразклонената част на веригата е:

$$i = i_L + i_C = -3,4 \cdot 10^{-3} + 314 \cdot C \cdot \cos \omega t + 4,1 \cdot 10^{-3} \cdot \cos 3\omega t, \text{ A.}$$

За капацитета C се получава: $C = 3,4 \cdot 10^{-9} / 314 = 10,8 \mu\text{F}$.

Зад.5.2.5. Нелинейна бобина с $W = 100$ нав. и линеен кондензатор с капацитет $C = 10 \mu\text{F}$ са включени паралелно към източник на синусоидално напрежение $u = U_m \cdot \sin \omega t$; ($\omega = 314 \text{ s}^{-1}$). Връзката между магнитния поток Φ и токът i_L на бобината се дава с израза: $i_L = 2,5 \cdot \Phi + 2,6 \cdot 10^6 \cdot \Phi^3$, A. Да се определи амплитудата U_m на захранващото напрежение, при която токът i в неразклонената част на веригата не съдържа първи хармоник.

Решение:

Като се използва зависимостта $u(t) = W \cdot d\Phi/dt$ се изразява магнитният поток чрез входното напрежение, т.е. $\Phi = (-U_m \cdot \cos \omega t) / W \cdot \omega$.

Оттук за тока i_L се записва:

$$i_L = -\frac{2,5 U_m}{\omega W} \cos(\omega t) - \frac{2,6 \cdot 10^6 U_m^3}{\omega^3 W^3} \left(\frac{3}{4} \cos(\omega t) + \frac{1}{4} \cos(3\omega t) \right) = -I_{mL}^{(1)} \cos(\omega t) - I_{mL}^{(3)} \cos(3\omega t).$$

тъй като $\cos^3 \omega t = 0,75 \cos \omega t + 0,25 \cos 3\omega t$.

Токът през кондензатора е: $i_C = \omega C \cdot U_m \cdot \cos(\omega t) = I_{mC} \cdot \cos(\omega t)$.

Тогава токът i ще бъде: $i = i_L + i_C = (I_{mC} - I_{mL}^{(1)}) \cdot \cos(\omega t) - I_{mL}^{(3)} \cdot \cos(3\omega t)$.

От равенството $I_{mC} - I_{mL}^{(1)} = 0$ за амплитудата U_m се получава: $U_m \approx 220$ V.

Зад.5.2.6. Във веригата от последователно съединени нелинейна бобина с параметри: $W = 120$ нав.; $l_{cp} = 0,3$ m и $S = 5 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2$ и линеен кондензатор с капацитет C преминава синусоидален ток i ($I_m = 0,75$ A и $\omega = 314 \text{ s}^{-1}$). Връзката между B и H се дава с израза: $B = 0,5 \cdot 10^{-2} H - 1,3 \cdot 10^{-8} H^3$, T. Да се определи капацитетът C на кондензатора, при който входното напрежение не съдържа първи хармоник.

Решение:

От закона на пълния ток се определя: $H = W \cdot i / l_{cp} = 300 \cdot \sin \omega t$, A/m.

За B се получава: $B = 1,24 \cdot \sin \omega t + 0,088 \cdot \sin 3\omega t$, T.

За напрежението u_L се записва:

$$u_L = W \cdot S \cdot (dB/dt) = 23,36 \cdot \cos \omega t + 4,97 \cdot \cos 3\omega t, \text{ V,}$$

а за напрежението u_C на кондензатора: $u_C = - (I_m / \omega C) \cdot \cos \omega t$.

Тогава входното напрежение u е:

$$u = u_L + u_C = (23,36 - I_m / \omega C) \cdot \cos \omega t + 4,97 \cdot \cos 3\omega t, \text{ V.}$$

Оттук за капацитета C се получава: $C = I_m / (\omega \cdot 23,36) = 102,3 \mu\text{F}$.

Зад.5.2.7. Веригата от последователно съединени линеен кондензатор с капацитет $C = 4 \mu\text{F}$ и нелинейна бобина е включена към източник на синусоидално напрежение ($f = 50 \text{ Hz}$). Връзката между ефективните стойности на напрежението U_L и тока I на бобината се дава с уравнението: $U_L = 2,8 \cdot 10^2 I + 2,25 \cdot 10^4 I^3$, V. Да се определи ефективната стойност на тока, при която във веригата настъпва напрежителен резонанс. Да се определи и максимумът на ефективната стойност на входното напрежение U_{max} (при пресмятанията загубите във веригата да се пренебрегнат).

Решение:

Напрежението върху кондензатора е: $U_C = I / \omega C$.

От условието за напрежителен резонанс $U_C = U_L$ се записва:

$$I / \omega C = 2,8 \cdot 10^2 I + 2,25 \cdot 10^4 I^3,$$

откъдето за тока I се получава: $I = 0,152 \text{ A}$.

За определяне на U_{max} изразът $U = |U_L - U_C|$ се диференцира по I и производната му се приравнява на нула, откъдето за I се намира: $I = 0,087 \text{ A}$.

Тогава за U_{max} се получава: $U_{\text{max}} = 0,56 \text{ V}$.

Зад.5.2.8. Върху феромагнитна сърцевина с размери $l_{\text{cp}} = 40 \text{ cm}$; $S = 9 \text{ cm}^2$ са поставени две намотки. През първата намотка с $W = 120$ нав. преминава синусоидален ток ($I_m = 1 \text{ A}$; $\omega = 314 \text{ s}^{-1}$). Втората намотка има $W_0 = 200$ нав. и през нея преминава постоянен ток $I_0 = 1,2 \text{ A}$. Връзката между B и H за сърцевината се дава с израза: $B = \alpha H - \beta H^3$ ($\alpha = 2 \cdot 10^{-3} \text{ H / m}$; $\beta = 6 \cdot 10^{-10} \text{ H.m / A}^2$). Да се определи индуктивността L_1 на първата бобина по отношение на първите хармоници на напрежението и тока и индуктивността L_{1e} по отношение на ефективните им стойности.

Решение:

От закона за пълния ток се определя H : $H = (W i + W_0 \cdot I_0) / l_{\text{cp}}$.

След това се намира B , а чрез B - магнитният поток Φ : $\Phi = B \cdot S = S \cdot (\alpha H - \beta H^3)$.

От израза $u = W \cdot (d\Phi/dt)$ се определя напрежението върху първата намотка :

$$u = 13,4 \cdot \cos \omega t - 3,3 \cdot \sin 2\omega t - 0,41 \cdot \cos 3\omega t, \text{ V.}$$

Тогава за съответните индуктивности се получава:

$$L_1 = U_1 / \omega I_1 = 0,0427 \text{ H} \text{ и } L_{1e} = U / \omega I = 0,0438 \text{ H.}$$

Зад.5.2.9 За удвояване на честотата се използва верига, съставена от два еднакви трансформатора (фиг.5.2.3). Параметрите им са: $W_1 = 160$ нав; $W_0 = 240$ нав.; $W_2 = 400$ нав.; $l_{\text{cp}} = 40 \text{ cm}$; $S = 10 \text{ cm}^2$. Връзката между B и H се дава с уравнението: $B = \alpha H - \beta H^3$ ($\alpha = 2 \cdot 10^{-5}$, H/cm; $\beta = 1,5 \cdot 10^{-8}$, H.cm/A²). Първичните намотки (W_1) са съединени последователно и съгласувано и през тях преминава синусоидален ток i_1 ($I_{m1} = 2 \text{ A}$; $f = 50 \text{ Hz}$). Вторичните намотки (W_2) и поднамагнитващите намотки (W_0) са свързани последователно и несъгласувано. Токът в поднамагнитващите намотки е постоянен $I_0 = 2 \text{ A}$. Да се определят честотата и ефективната стойност E_2 на е.д.н e_2 във вторичните намотки в режим на празен ход.

Решение:

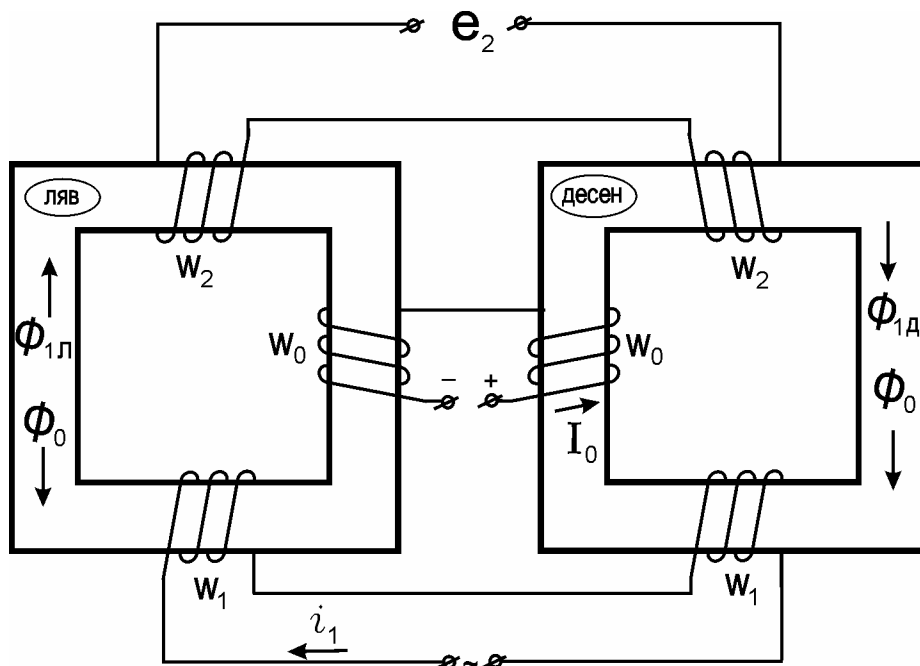
Като се има предвид начина на навиване и на свързване на намотките на двата трансформатора, то H , B и Φ се определят аналогично, както в зад.5.2.8:

$$H_{1д} = (W_1 \cdot i_1 + W_0 \cdot I_0) / l_{\text{cp}}; H_{1л} = (W_1 \cdot i_1 - W_0 \cdot I_0) / l_{\text{cp}}.$$

Е.д.н. e_2 във вторичните намотки се определя от израза:

$$e_2 = - W_2 \cdot [d (\Phi_{1д} - \Phi_{1л}) / dt] = 86,6 \cdot \sin 2\omega t, \text{ V.}$$

Тогава: $E_2 = 61,6 \text{ V}$, а $f_2 = 2f = 100 \text{ Hz}$.



Фиг.5.2.3

6. ЕЛЕКТРОМАГНИТНО ПОЛЕ

ОБЩИ ПОЛОЖЕНИЯ

6.1. Уравнения на Максвел

1. Закон за пълния ток

Дава връзката между интензитета на магнитното поле \vec{H} и пълния ток i_{Π} .
Интегралната форма на закона има вида:

$$\oint_{(l)} \vec{H} \cdot d\vec{l} = i_{\Pi} = \int_{(S)} \vec{\delta}_{\Pi} \cdot d\vec{S}. \quad (6.1)$$

където i_{Π} е пълният ток през повърхността S , ограничена от контура l , А;

$\vec{\delta}_{\Pi}$ - повърхностната му плътност, А/м².

В общия случай $\vec{\delta}_{\Pi}$ има три съставки - на проводимост $\vec{\delta}_{\text{ПРОВ}}$, на пренасяне $\vec{\delta}_{\text{ПРЕН}}$ и на разместване $\vec{\delta}_{\text{РАЗМ}}$, т.е.:

$$\vec{\delta}_{\Pi} = \vec{\delta}_{\text{ПРОВ}} + \vec{\delta}_{\text{ПРЕН}} + \vec{\delta}_{\text{РАЗМ}}. \quad (6.2)$$

Диференциалната форма на закона има вида:

$$\text{rot } \vec{H} = \vec{\delta}_{\Pi}. \quad (6.3)$$

2. Закон за електромагнитната индукция

Дава връзката между интензитета \vec{E} на непотенциално електрическо поле, обусловено от магнитно поле с индукция \vec{B} .

Интегралната форма на закона има вида :

$$e = \oint_{(l)} \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d\Phi}{dt} = -\int_{(S)} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}, \quad (6.4)$$

където e е е.д.н. от електромагнитната индукция, индуцирано в контура l , V;
 Φ - магнитният поток през повърхността S , ограничена от контура l , Wb:

$$\Phi = \int_{(S)} \vec{B} \cdot d\vec{S}. \quad (6.5)$$

Диференциалната форма на закона има вида:

$$\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}. \quad (6.6)$$

3. Обобщена теорема на Гаус

Дава връзката между електрическата индукция \vec{D} и свободния електрически заряд q .

Интегралната форма на теоремата има вида:

$$\oint_{(S)} \vec{D} \cdot d\vec{S} = q = \int_{(V)} \rho dV, \quad (6.7)$$

където ρ е обемна плътност на заряда q в обема V , ограничен от повърхността S , C/м³.

Диференциалната форма на теоремата има вида :

$$\operatorname{div} \vec{D} = \rho. \quad (6.8)$$

За потенциално електрическо поле в линейна диелектрична среда се записва уравнението на Поасон-Лаплас :

$$\Delta \varphi = \nabla^2 \varphi = -\frac{\rho}{\epsilon_0 \epsilon_r} \quad (6.9)$$

където: φ – скаларен електрически потенциал, V;

ρ - обемна плътност на електрическия заряд, C/m³;

ϵ_r - относителна диелектрична проницаемост на средата .

4. Принцип за непрекъснатост на магнитния поток

Интегралната форма на принципа има вида:

$$\oint_{(S)} \vec{B} d\vec{S} = 0, \quad (6.10)$$

а диференциалната му форма има вида :

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0. \quad (6.11)$$

5. Закон на Ом в диференциална форма

Дава връзката между интензитета \vec{E} на електрическото поле и плътността на тока на проводимост $\vec{\delta}_{\text{ПРОВ}}$ в проводяща среда.

Математичният запис на закона има вида:

$$\vec{\delta}_{\text{ПРОВ}} = \gamma \vec{E}, \quad (6.12)$$

където γ е специфичната проводимост на средата, S/m.

6. Шесто уравнение на Максвел

Дава връзката между основните вектори, описващи електрическото поле в дадена среда, и има вида:

$$\vec{D} = \epsilon_0 \epsilon_r \vec{E} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}, \quad (6.13)$$

където: ϵ_r - относителна диелектрична проницаемост на средата;

\vec{P} - вектор на електрическата поляризация, C/m².

7. Седмо уравнение на Максвел

Дава връзката между основните вектори, описващи магнитното поле в дадена среда, и има вида:

$$\vec{B} = \mu_0 \mu_r \vec{H} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{M}), \quad (6.14)$$

където: μ_r - относителна магнитна проницаемост на средата;

\vec{M} - вектор на магнитната поляризация, A/m.

6.2. Диференциални операции в декартови координати

1. Градиент

$$\operatorname{grad} \varphi = \nabla \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \vec{x}^0 + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \vec{y}^0 + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \vec{z}^0$$

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \vec{x}^0 + \frac{\partial}{\partial y} \vec{y}^0 + \frac{\partial}{\partial z} \vec{z}^0 \text{ - оператор на Хамилтон (набла вектор).}$$

2. Дивергенция

$$\operatorname{div} \vec{F} = \nabla \cdot \vec{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z},$$

където F_x, F_y, F_z са компонентите на \vec{F} .

3. Ротация

$$\operatorname{rot} \vec{F} = \nabla \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{x}^0 & \vec{y}^0 & \vec{z}^0 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}.$$

4. Лапласиан

$$\Delta = \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

6.3. Диференциални операции в криволинейни ортогонални координати

A/ Общи формули

1. Градиент

$$\operatorname{grad} \varphi = \frac{1}{L_1} \frac{\partial \varphi}{\partial u} \vec{u}^0 + \frac{1}{L_2} \frac{\partial \varphi}{\partial v} \vec{v}^0 + \frac{1}{L_3} \frac{\partial \varphi}{\partial w} \vec{w}^0$$

L_1, L_2, L_3 - коефициенти на Ламе

$$L_1 = \left[\left(\frac{\partial x}{\partial u} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}};$$

$$L_2 = \left[\left(\frac{\partial x}{\partial v} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}};$$

$$L_3 = \left[\left(\frac{\partial x}{\partial w} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial w} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial w} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}.$$

2. Дивергенция

$$\operatorname{div} \vec{F} = \frac{1}{L_1 L_2 L_3} \left[\frac{\partial}{\partial u} (L_2 L_3 F_u) + \frac{\partial}{\partial v} (L_1 L_3 F_v) + \frac{\partial}{\partial w} (L_1 L_2 F_w) \right].$$

3. Ротор

$$\operatorname{rot} \vec{F} = \frac{1}{L_1 L_2 L_3} \begin{vmatrix} L_1 \vec{u}^0 & L_2 \vec{v}^0 & L_3 \vec{w}^0 \\ \frac{\partial}{\partial u} & \frac{\partial}{\partial v} & \frac{\partial}{\partial w} \\ L_1 F_u & L_2 F_v & L_3 F_w \end{vmatrix}.$$

4. Лапласиан

$$\Delta = \nabla^2 = \frac{1}{L_1 L_2 L_3} \left[\frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{L_2 L_3}{L_1} \frac{\partial}{\partial u} \right) + \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{L_1 L_3}{L_2} \frac{\partial}{\partial v} \right) + \frac{\partial}{\partial w} \left(\frac{L_1 L_2}{L_3} \frac{\partial}{\partial w} \right) \right].$$

Б/ Коефициенти на Ламе в сферични координати

$$x = R \cdot \sin\theta \cdot \sin\alpha; y = R \cdot \sin\theta \cdot \cos\alpha; z = R \cdot \cos\theta;$$

$$L_1 = 1; L_2 = R; L_3 = R \cdot \sin\theta.$$

В/ Коефициенти на Ламе в цилиндрични координати

$$x = r \cdot \cos\alpha; y = r \cdot \sin\alpha; z = z;$$

$$L_1 = 1; L_2 = r; L_3 = 1.$$

6.4. Електромагнитни параметри

Електрическото съпротивление R се определя чрез интензитета \vec{E} на електрическото поле в проводяща среда със специфична проводимост γ по формулата:

$$R = \gamma^{-1} \left(\int_{(l)} \vec{E} \cdot d\vec{l} \right) \left(\int_{(S)} \vec{E} \cdot d\vec{S} \right)^{-1}. \quad (6.15)$$

Електрическият капацитет C се определя чрез интензитета \vec{E} на електрическото поле в диелектрична среда с относителна диелектрична проницаемост ϵ_r по формулата:

$$C = \epsilon_r \epsilon_0 \left(\int_{(S)} \vec{E} \cdot d\vec{S} \right) \left(\int_{(l)} \vec{E} \cdot d\vec{l} \right)^{-1}. \quad (6.16)$$

Въз основа на аналогията между електрическото поле на постоянен електрически ток в проводяща среда със специфична проводимост γ и електрическото поле в диелектрик с абсолютна проницаемост $\epsilon = \epsilon_0 \epsilon_r$, връзката между електрическата проводимост $G = R^{-1}$ и капацитета C се дава с израза:

$$G = \gamma C / \epsilon, \quad (6.17)$$

известен като принцип на електростатичната аналогия.

Индуктивността L на токов контур с ток i може да се определи от енергията на магнитното поле $W_M = 0,5 \cdot L \cdot i^2$ или чрез пълния магнитен поток $\Psi_L = L \cdot i$.

Ако W_M се изрази чрез векторите \vec{B} и \vec{H} на магнитното поле, за L се записва:

$$L = i^{-2} \cdot \int_{(V)} \vec{B} \cdot \vec{H} \cdot dV. \quad (6.18)$$

а при изразяване на Ψ_L с \vec{B} , за L се получава :

$$L = i^{-1} \cdot \int_{(S)} \vec{B} \cdot d\vec{S}. \quad (6.19)$$

6.5. Теорема на Пойнтинг

Теоремата се отнася за преобразуването на енергията на електромагнитното поле. Интегралният ѝ запис има вида:

$$\frac{\partial W_E}{\partial t} + \frac{\partial W_M}{\partial t} + \frac{\partial W_\theta}{\partial t} = - \oint_{(S)} \vec{\Pi} \cdot d\vec{S}, \quad (6.20)$$

където: $W_E = \int_{(V)} 0,5 \cdot \vec{E} \cdot \vec{D} \cdot dV$ е енергията на електрическото поле, J;

$W_M = \int_{(V)} 0,5 \cdot \vec{H} \cdot \vec{B} \cdot dV$ - енергията на магнитното поле, J;

W_θ - енергията на топлинните загуби, J;

$\vec{\Pi} = \vec{E} \times \vec{H}$ - векторът на Пойнтинг, W/m^2 .

Диференциалният запис на теоремата е:

$$-\text{div} \vec{\Pi} = \frac{\partial W_E}{\partial t} + \frac{\partial W_M}{\partial t} + \gamma E^2, \quad (6.21)$$

където: $w_E = 0,5 \cdot \vec{E} \cdot \vec{D}$ - обемна плътност на енергията на електрическото поле, J/m^3 ;

$w_M = 0,5 \cdot \vec{H} \cdot \vec{B}$ - обемна плътност на енергията на магнитното поле, J/m^3 ;

γ - специфична проводимост на средата, S/m .

Зад.6.1.1. По коаксиален кабел (фиг.6.1.1) преминава ток i (прав проводник е жилото, обратен проводник - обвивката). Относителната магнитна проницаемост на проводящите части и изолацията е $\mu_r = 1$. Да се определи магнитното поле на тока (кабелът да се приеме за прав и безкрайно дълъг).

Решение:

Поради осевата симетрия определянето на \vec{B} се извършва в кръгово-цилиндрична координатна система (r, α, z) . В случая \vec{B} има съставка $B_\alpha = B_\alpha(r)$.

За определяне на B_α се използват уравнения (6.1) и (6.14):

$$\oint_{(l)} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \int_{(S)} \vec{\delta}_\Pi \cdot d\vec{S}.$$

За циркулационен контур се избира магнитна линия (окръжност с радиус r и център, лежащ на оста на кабела).

Тогава:

$$\oint_{(l)} \vec{B} \cdot d\vec{l} = B_\alpha \cdot 2 \cdot \pi \cdot r,$$

$$a \quad \int_{(S)} \vec{\delta}_\Pi \cdot d\vec{S} = \int_{(S)} \vec{\delta}_{\text{ПРОВ}} \cdot d\vec{S} = \int_{(S)} \delta_{\text{ПРОВ}} \cdot dS = \sum i_k.$$

Формата на кабела определя четири области на магнитното поле:

1. $r = 0 \dots r_1$:

$$B_\alpha \cdot 2 \cdot \pi \cdot r = \mu_0 \cdot (i / \pi r_1^2) \cdot \pi \cdot r^2; \quad B_\alpha = \mu_0 \cdot i \cdot r / 2 \cdot \pi \cdot r_1^2.$$

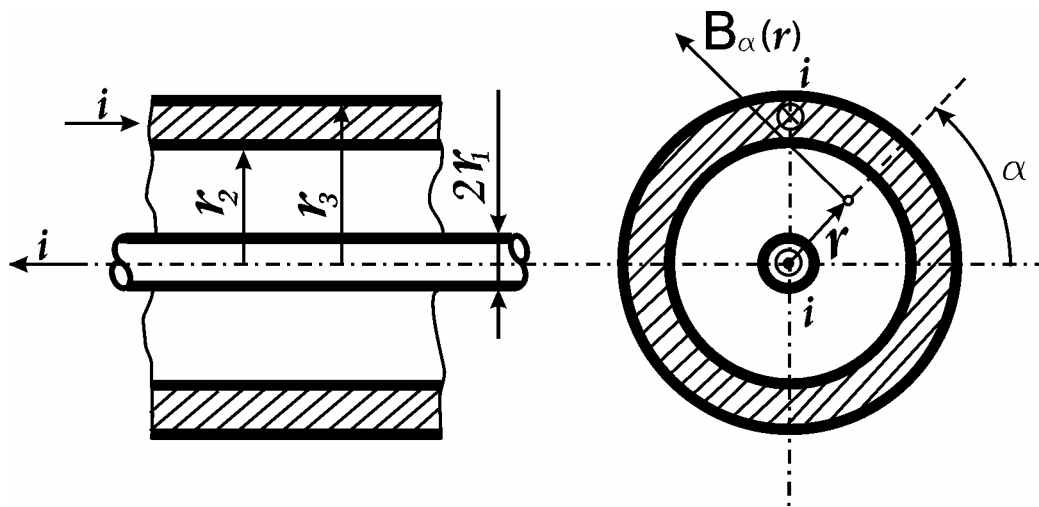
2. $r = r_1 \dots r_2$:

$$B_\alpha \cdot 2 \cdot \pi \cdot r = \mu_0 \cdot i; \quad B_\alpha = \mu_0 \cdot i / 2 \cdot \pi \cdot r.$$

3. $r = r_2 \dots r_3$:

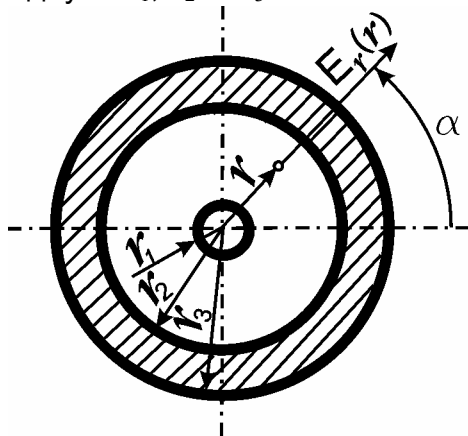
$$B_\alpha \cdot 2 \cdot \pi \cdot r = \mu_0 \cdot i \cdot [1 - \pi \cdot (r^2 - r_2^2) / \pi \cdot (r_3^2 - r_2^2)]; \quad B_\alpha = \mu_0 \cdot i \cdot (r_3^2 - r^2) / 2 \cdot \pi \cdot r \cdot (r_3^2 - r_2^2).$$

4. $r = r_3 \dots \infty$:
 $B_\alpha \cdot 2\pi \cdot r = \mu_0 \cdot (i - i) = 0$; $B_\alpha = 0$.



Фиг.6.1.1

Зад.6.1.2 Да се определи електрическото поле на коаксиален кабел (фиг.6.1.2) с радиуси r_1 , r_2 и r_3 за областта на изолацията ($r = r_1 \dots r_2$), чиято относителна диелектрична проникваемост е ϵ_r . Да се определи и капацитетът C_0 за единица дължина на кабела, ако потенциалната разлика между жилото и обвивката е U .



Фиг.6.1.2

Решение:

Поради осева симетрия интензитетът \vec{E} се определя в кръгово-цилиндрична координатна система (r, α, z) . За областта ($r = r_1 \dots r_2$) \vec{E} има съставка $E_r = E_r(r)$.

За определяне на E_r се използва теоремата на Гаус (формули (6.7) и (6.13)):

$$\oint_{(S)} \vec{E} \cdot d\vec{S} = q / \epsilon_0 \cdot \epsilon_r .$$

За интеграционна повърхност S се избира повърхност на цилиндър, съосен на кабела, с радиус r .

Тогава:

$$\oint_{(S)} \vec{E} \cdot d\vec{S} = E_r \cdot 2\pi \cdot l ;$$

$$q / \epsilon_0 \cdot \epsilon_r = \left(\int_{(V)} \rho \cdot dV \right) / \epsilon_0 \cdot \epsilon_r = l \cdot \tau / \epsilon_0 \cdot \epsilon_r ,$$

където $\tau = q/l$ е линейна плътност на електрическите заряди на жилото.

Оттук за E_r се получава :

$$E_r = \tau / \epsilon_0 \cdot \epsilon_r \cdot 2\pi \cdot r .$$

Изразява се плътността τ чрез напрежението U .

Тъй като $U = \varphi_1 - \varphi_2 = \int_{r_1}^{r_2} E_r \cdot dr = \tau \cdot \ln(r_2 / r_1) / 2 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot \epsilon_r$, то:

$$\tau = U \cdot \epsilon_0 \cdot \epsilon_r \cdot 2 \cdot \pi / \ln(r_2 / r_1)$$

Оттук за E_r се намира:

$$E_r = U / r \cdot \ln(r_2 / r_1).$$

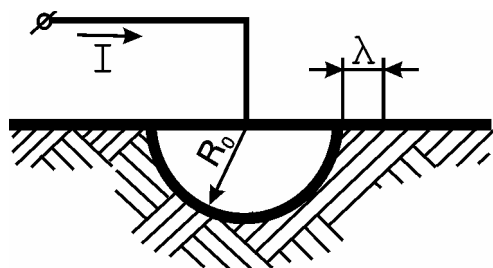
Капацитетът C_0 на коаксиалния кабел за единица дължина е:

$$C_0 = q / U \cdot l = \tau / U = 2 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot \epsilon_r / \ln(r_2 / r_1).$$

Зад.6.1.3 Да се определи индуктивността за единица дължина на коаксиален кабел (фиг.6.1.1) за областта на изолацията ($r = r_1 \dots r_2$), чиято относителна магнитна проницаемост е μ_r .

Упътване:

Определя се магнитният поток Φ през повърхност, ограничена от равнинен контур с единица дължина и ширина $r_2 - r_1$, разположен в радиалната равнина. Съгласно формула (6.5):



Фиг.6.1.3

$$\Phi = \int_{r_1}^{r_2} B_{\alpha}(r) \cdot dr.$$

Изразът за $B_{\alpha}(r)$ е даден в зад.6.1.1.

Тогава:

$$\Phi = \int_{r_1}^{r_2} \frac{\mu_0 \cdot \mu_r \cdot i}{r \cdot 2 \cdot \pi} \cdot dr = \mu_0 \cdot \mu_r \cdot i \cdot \ln(r_2 / r_1) / 2 \cdot \pi.$$

Оттук за L се записва:

$$L = \Phi / i = \mu_0 \cdot \mu_r \cdot \ln(r_2 / r_1) / 2 \cdot \pi.$$

Зад.6.1.4. Да се определи радиусът R_0 на полусферичен заземител (фиг.6.1.3), поставен в почвата, ако през него преминава ток $I = 300$ А, а максималното крачно напрежение не превишава 100 V. Дължината на крачката да се приеме $\lambda = 0,6$ m, а специфичната проводимост на почвата е $\gamma = 6 \cdot 10^{-2}$ S/m.

Решение:

Поради сферична симетрия определянето на плътността на тока на проводимостта $\vec{\delta}_{\text{ПРОВ}}$ се извършва в сферични координати (R, α, θ).

В случая $\vec{\delta}_{\text{ПРОВ}}$ има съставка $\delta_R = \delta_R(R)$, която се определя от израза:
 $\delta_R = I / 2 \cdot \pi \cdot R^2$.

От закона на Ом в диференциална форма се определя интензитетът \vec{E} на електрическото поле :

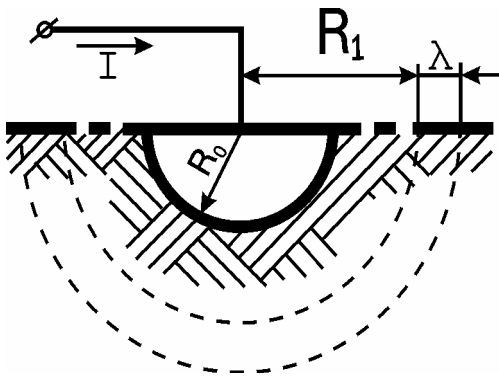
$$\vec{E} = E_R \cdot \vec{R}^0 = \delta_R \cdot \vec{R}^0 / \gamma = I \cdot \vec{R}^0 / 2 \cdot \pi \cdot R^2 \cdot \gamma.$$

Тогава за максималното крачно напрежение $U_{\text{кр.макс}}$ се записва:

$$U_{\text{кр.макс}} = \int_{R_0}^{R_0 + \lambda} E_R \cdot dR = (I / 2 \cdot \pi \cdot \gamma) \cdot \int_{R_0}^{R_0 + \lambda} \frac{dR}{R^2} = (I / 2 \cdot \pi \cdot \gamma) \cdot [1/R_0 - 1 / (R_0 + \lambda)]$$

Оттук за R_0 при $U_{\text{кр.макс}} = 100$ V се получава: $R_0 = 1,9$ m.

Зад.6.1.5. Да се определи крачното напрежение на разстояние $R_1 = 22 \text{ m}$ от полусферичен заземител (фиг.6.1.4), поставен в почвата, ако през него преминава ток $I = 1000 \text{ A}$. Специфичната проводимост на почвата е $\gamma = 10^{-2} \text{ S/m}$, а дължината на крачката е $\lambda = 1 \text{ m}$.



Фиг.6.1.4

Упътване:

Задачата се решава аналогично, както зад.6.1.4, като при определянето на напрежението $U_{кр}$ се интегрира за R в границите: $R = R_1$ и $R = R_1 + \lambda$ и за $U_{кр}$ се получава стойността: $U_{кр} = 31,9 \text{ V}$.

Зад.6.1.6. Сферичен заземител с радиус R_0 е поставен в почва със специфична проводимост γ на дълбочина, много по-голяма от R_0 , а токът през заземителя е I . Да се определи съпротивлението на изтичане $R_{изт}$ на тока в почвата.

Упътване:

Задачата се решава аналогично, както зад.6.1.4, но при определяне на плътността δ_R се има предвид сферичната форма на заземителя, т.е.:

$$\delta_R = I / 4 \cdot \pi \cdot R^2.$$

За определяне на съпротивлението $R_{изт}$ се намира напрежението U между заземителя и точка, намираща се на разстояние $R \gg R_0$, т.е.:

$$U = (I / 4 \cdot \pi \cdot \gamma) \cdot \int_{R_0}^R \frac{dR}{R^2} = I / 4 \cdot \pi \cdot R_0 \cdot \gamma.$$

Оттук за съпротивлението $R_{изт}$ се получава: $R_{изт} = U / I \approx 1 / 4 \cdot \pi \cdot R_0 \cdot \gamma$.

Зад.6.1.7. Като се използва принципът на електростатичната аналогия, да се определи проводимостта G на полусферичен заземител с радиус R_1 , поставен в хомогенна проводяща среда със специфична проводимост γ , така че повърхността му на срязване да съвпада с граничната повърхност на полупространството, заето от средата.

Решение:

Интензитетът E на електростатично поле, създавано от заряда q на уединена проводяща сфера с радиус R_1 , разположена в диелектрична среда с проницаемост ϵ , на разстояние R от центъра ѝ се дава с израза (формули (6.7) и (6.13)):

$$E = q / 4 \cdot \pi \cdot \epsilon \cdot R^2.$$

За потенциала ϕ на сферата се записва :

$$\phi = \int_{R_1}^{\infty} \vec{E} \cdot d\vec{R} = q / 4 \cdot \pi \cdot \epsilon \cdot R_1.$$

а за капацитетата ѝ C се получава: $C = 4 \cdot \pi \cdot \epsilon \cdot R_1$.

Ако поради симетрията се предположи, че капацитетът C_1 на полусферата е $C/2$, въз основа на принципа на електростатичната аналогия, за проводимостта G се намира: $G = 2 \cdot \pi \cdot \gamma \cdot R_1$.

Зад.6.1.8. Въз основа на принципа на електростатичната аналогия да се определи изолационното съпротивление $R_{\text{изол}}$ за единица дължина на коаксиален кабел с радиус на жилото r_1 и вътрешен радиус на обвивката r_2 , ако специфичната проводимост на диелектрика му е γ .

Решение:

От зад.6.1.2 за капацитета C_0 на коаксиален кабел се записва:

$$C_0 = 2\pi \cdot \epsilon_0 \cdot \epsilon_r / \ln(r_2 / r_1),$$

където ϵ_r е относителната диелектричната проницаемост на диелектрика .

Въз основа на принципа на електростатичната аналогия за $R_{\text{изол}}$ се получава:

$$R_{\text{изол}} = \ln(r_2 / r_1) / 2\pi\gamma.$$

Зад.6.2.1. По цилиндричен проводник (фиг.6.2.1) преминава постоянен ток I . Потенциалната разлика за участък от проводника с дължина l е U , а за зарядът върху повърхността му е q . Да се определи векторът на Пойнтинг в проводника и вън от него, ако сечението и диаметърът му са съответно S и $2r_0$ (при определяне на вектора на Пойнтинг за областта вън от проводника да се приеме, че зарядът е равномерно разпределен по повърхността му).

Решение:

Поради осева симетрия се използва кръгово-цилиндрична координатна система (r, α, z) .

Линиите на магнитното поле и в двете области са концентрични окръжности с центрове, лежащи на оста на проводника , т.е. $\vec{H} = H_\alpha(r) \cdot \vec{\alpha}^0$.

1. Област в проводника ($r = 0 \dots r_0$)

За тази област интензитетът \vec{E} на електрическото поле се определя от закона на Ом в диференциална форма (6.12): $\vec{E} = (\delta_z / \gamma) \cdot \vec{z}^0 = E_z \cdot \vec{z}^0$.

Съставката E_z може да се изрази и чрез зададените напрежение U и дължина l , т.е. $E_z = U / l$.

За интензитета H_α на магнитното поле се използва резултатът, получен в зад.6.1.1, и се записва: $H_\alpha = B_\alpha / \mu_0 = I r / 2\pi \cdot r_0^2$.

В такъв случай за вектора на Пойнтинг се получава:

$$\vec{\Pi} = \vec{E} \times \vec{H} = E_z \cdot \vec{z}^0 \times H_\alpha \cdot \vec{\alpha}^0 = - (U \cdot I r / 2\pi \cdot r_0^2 \cdot l) \cdot \vec{r}^0 = - \Pi_r \cdot \vec{r}^0 .$$

За частния случай $r = r_0$ (повърхността на проводника) за Π_r се записва: $\Pi_r = U \cdot I / 2\pi \cdot r_0 \cdot l$.

2. Област вън от проводника ($r = r_0 \dots \infty$)

За определяне на интензитета \vec{E} на електрическото поле за тази област се използва теоремата на Гаус:

$$\oint_{(S)} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q}{\epsilon_0} .$$

За случая: $\vec{E} = E_r(r) \cdot \vec{r}^0$.

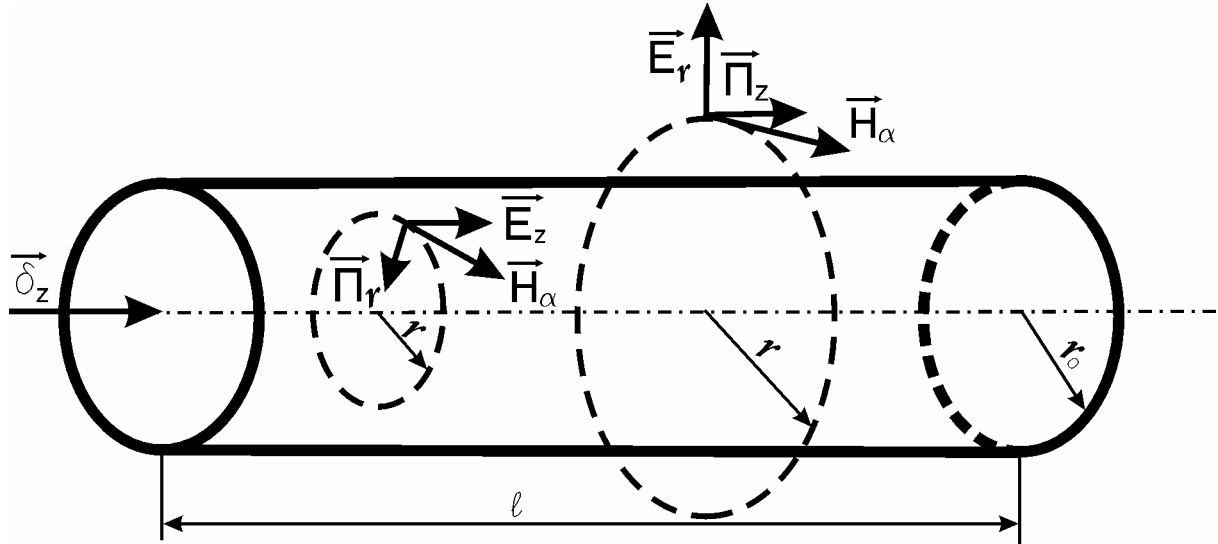
Тогава: $E_r \cdot 2\pi \cdot r \cdot l = q / \epsilon_0$,

откъдето: $E_r = q / \epsilon_0 \cdot 2\pi \cdot r \cdot l$.

За интензитета \vec{H} на магнитното поле, въз основа на резултата от зад.6.1.1, се записва: $\vec{H} = H_\alpha \cdot \vec{\alpha}^0$, където $H_\alpha = B_\alpha / \mu_0 = I / 2\pi r$.

За вектора на Пойнтинг се получава :

$$\vec{\Pi} = \vec{E} \times \vec{H} = E_r \cdot r^0 \times H_\alpha \cdot \vec{\alpha}^0 = (qI / 4\pi r^2 \cdot \epsilon_0 \cdot l) \cdot z^0 = \Pi_z \cdot z^0 .$$



Фиг.6.2.1

Зад.6.2.2. По проводник с форма на кух цилиндър (фиг.6.2.2) с радиуси r_1 и r_2 и дължина l преминава ток I по посока, паралелна на оста му, а зарядът върху повърхността му е q . Да се определи векторът на Пойнтинг в кухината, в проводника и вън от него, ако специфичната му проводимост е γ , а диелектричната проницаемост на околната среда е ϵ_0 (при определяне вектора на Пойнтинг за областта вън от проводника да се приеме, че зарядът q е равномерно разпределен по повърхността му).

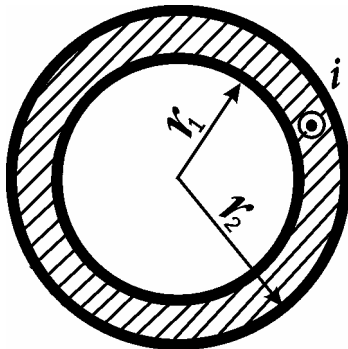
Решение:

Поради осева симетрия се използва кръгово-цилиндрична координатна система (r, α, z) .

1. Област в кухината ($r = 0 \dots r_1$)

В областта на кухината електрическо и магнитно поле отсъствуват ($E = 0$; $H = 0$). Тогава и $\Pi = 0$.

Линиите на магнитното поле за останалите две области са концентрични окръжности с центрове, лежащи на оста на проводника.



Фиг.6.2.2

2. Област в проводника ($r = r_1 \dots r_2$)

За тази област интензитетът \vec{E} на електрическото поле се определя във основа на закона на Ом в диференциална форма:

$$\vec{E} = (\delta_z / \gamma) \cdot z^0 = E_z \cdot z^0 = [I / \pi \cdot \gamma \cdot (r_2^2 - r_1^2)] \cdot z^0 .$$

Интензитетът \vec{H} на магнитното поле се намира чрез закона за пълния ток (формула 6.1).

За случая се записва:

$$\vec{H} = H_{\alpha}(r) \cdot \vec{\alpha}^0 = [I \cdot (r^2 - r_1^2) / 2 \cdot \pi \cdot r \cdot (r_2^2 - r_1^2)] \cdot \vec{\alpha}^0.$$

За вектора на Пойнтинг се получава :

$$\vec{\Pi} = E_z \cdot \vec{z}^0 \times H_{\alpha} \cdot \vec{\alpha}^0 = - \Pi_r \cdot \vec{r}^0 = - \frac{I \cdot (r^2 - r_1^2) \cdot \vec{r}^0}{2 \cdot \pi \cdot \gamma \cdot r \cdot (r_2^2 - r_1^2)}.$$

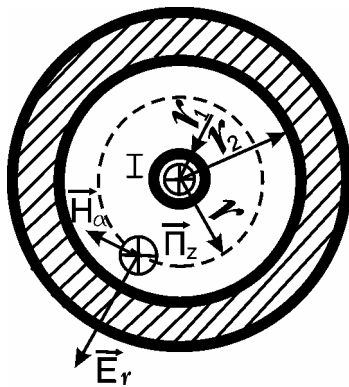
3. Област вън от проводника ($r = r_2 \dots \infty$)

За тази област векторите на \vec{E} , \vec{H} и $\vec{\Pi}$ са същите, както в зад.6.2.1. Този резултат показва, че независимо от това, дали проводникът е плътен или кух, за областта вън от него векторът $\vec{\Pi}$ е по посока, паралелна на оста му, т.е. е по посока на предаване на енергията.

Зад.6.2.3. Да се определи потокът на вектора на Пойнтинг през напречното сечение на коаксиален кабел (фиг.6.2.3) за областта на изолацията ($r = r_1 \dots r_2$), ако напрежението и токът са съответно U и I .

Упътване:

От зад.6.1.1 за \vec{H} се записва: $\vec{H} = H_{\alpha} \cdot \vec{\alpha}^0 = (I / 2 \cdot \pi \cdot r) \cdot \vec{\alpha}^0$, а от зад.6.1.2 за \vec{E} :
 $\vec{E} = E_r \cdot \vec{r}^0 = [U / r \cdot \ln(r_2 / r_1)] \cdot \vec{r}^0$.



Фиг.6.2.3

Оттук за вектора на Пойнтинг се получава:

$$\begin{aligned} \vec{\Pi} &= \vec{E} \times \vec{H} = E_r \cdot \vec{r}^0 \times H_{\alpha} \cdot \vec{\alpha}^0 = \Pi_z \cdot \vec{z}^0 = \\ &= [U \cdot I / 2 \cdot \pi \cdot r^2 \cdot \ln(r_2 / r_1)] \cdot \vec{z}^0. \end{aligned}$$

Тогава потокът на вектора $\vec{\Pi}$ през напречното сечение на коаксиалния кабел ще бъде:

$$\int_{(S)} \vec{\Pi} \cdot d\vec{S} = \int_{r_1}^{r_2} \Pi_z \cdot 2 \cdot \pi \cdot r \cdot dr = U \cdot I.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Бессонов , Л.А Теоретические основы электротехники. Изд. "Высшая школа" , М. , 1978
2. Бессонов , Л.А и др. Сборник задач по теоретическим основам электротехники . Изд. " Высшая школа" , М. , 1975
3. Бодурова , М.М. и др. Решени примери по основи на електротехниката . Изд. "Техника" , С. , 1969.
4. Задачник по теоретическим основам электротехники . Под редакцией К.М.Поливанова . Изд. " Энергия" , М. , 1973
5. Папазов , С.П. , С.Л.Фархи . Теоретична електротехника. Ч.3 , Изд. "Техника" , С. , 1995
6. Поливанов , К.М. Теоретические основы электротехники . Ч.3 , Изд. "Энергия" , М. , 1969
7. Сборник задач и упражнений по теоретическим основам электротехники . Под редакцией П.А.Ионкина , Энергоиздат , М. , 1982
8. Сборник программированных задач по теоретическим основам электротехники . Под редакцией Н.Г.Максимовича и И.В.Куделько . Издательское объединение"Вища школа" , Львов , 1976
9. Фархи , С.Л , С.П.Папазов. Теоретична електротехника . Ч.1 и 2 , Изд. "Техника" , С. , 1981 и 1982
10. Фархи, С.Л. Решение примери по основи на електротехниката . Изд.. "Техника" , С. , 1973
- 11.Шебес , М.Р. Задачник по теории линеарных электрических цепей. Изд-во "Высшая школа" , М. , 1982

Автори: доц. д-р инж. Никола Колев Армянов
доц. д-р инж. Таня Методиева Стоянова
гл. ас. инж. Радка Йорданова Тодорова

ТЕОРЕТИЧНА ЕЛЕКТРОТЕХНИКА
РЪКОВОДСТВО ЗА СЕМИНАРНИ УПРАЖНЕНИЯ

I^{-BO} издание

Научен редактор: доц. д-р инж. Никола Колев Армянов
Технически редактор: доц. д-р инж. Таня Методиева Стоянова

Рецензент: доц. д-р инж. Емил Николаев Павликянов
Пореден №30 от издателския план на РУ "Ангел Кънчев" за 2004 г.

Ръководството за семинарни упражнения по
Теоретична електротехника е одобрено от МОН
Протокол №67 / 22.04.2004 г.
ISBN: 954 – 712 – 301 – 7
Формат: на книжното тяло и електронната форма
Печатни коли 17
Издателски коли 8
Печатна база при Русенския Университет "Ангел Кънчев"