

доц. д-р инж. Никола К. Армянов
доц. д-р инж. Таня М. Стоянова

ТЕОРЕТИЧНА ЕЛЕКТРОТЕХНИКА
I ЧАСТ

РУСЕНСКИ УНИВЕРСИТЕТ "АНГЕЛ КЪНЧЕВ"
РУСЕ, 2001 г.

Учебникът по дисциплината “Теоретична електротехника – I част” е предназначен за студентите от редовно и задочно обучение на всички специалности от факултет “Електротехника, електроника и автоматика” при Русенски университет “Ангел Кънчев”. Той може да се използва и от студентите на останалите технически университети в страната.

ПРЕДГОВОР

Учебникът по дисциплината “Теоретична електротехника – I част” има задачата да облекчи, разшири и затвърди теоретичната подготовка на студентите от факултет “Електротехника, електроника и автоматика” при Русенски университет “Ангел Кънчев” по едноименната дисциплина.

Тематиката на разделите е съобразена с утвърдените учебни програми по тази дисциплина и обхваща всички теми на лекционния курс на обучение. Материалът по някои раздели е изложен по-подробно, отколкото това е необходимо за студентите от образователно-квалификационната степен бакалавър, което позволява учебникът да бъде използван и от студентите от образователно-квалификационната степен магистър.

Разделите на учебника са подготвени от авторите както следва: раздел 2 - от доц. д-р инж. Т. М. Стоянова, а останалите раздели – от доц. д-р инж. Н. К. Армянов. При подготовката на т.т. 2.10 и 8.9 взе участие гл.ас. инж. Р. Й. Тодорова.

Техническото изпълнение на текста е направено от ст. ас. инж. Т. К. Гачовска и студентите Ц. Х. Христов, Г. И. Георгиева, В. П. Симидчиев, Е. Я. Петев, К. М. Ангелов и С. Г. Стоянов

Илюстративният материал е подготвен от ст. ас. инж. Т. К. Гачовска и студента Ц. Х. Христов, а окончателното техническо оформяне на учебника е направено от ст. ас. инж. Т. К. Гачовска.

Този учебник отразява дългогодишния труд и опит на авторите му.

Основата на учебника по дисциплината “Теоретична електротехника – I част” е поставена от доц. д-р инж. Г. М. Антонов – дългогодишен преподавател по дисциплината “Теоретична електротехника” в Русенски университет “Ангел Кънчев”, за което авторите му изказват своята дълбока признателност и сърдечна благодарност.

Авторите изказват своята благодарност и на рецензента доц. д-р инж. Е.Н. Павлиянов за внимателното прочитане на ръкописа и за направените от него ценни забележки и препоръки.

Като първо издание учебникът не е лишен от пропуски и недостатъци. Поради това молим всички критични бележки, мнения и препоръки да бъдат изпращани на адрес:

7017 Русе, ул. “Студентска” № 8
Русенски университет “Ангел Кънчев”,
Катедра “Теоретична и измервателна електротехника”

АВТОРИТЕ

ЛИТЕРАТУРА

1. Атабеков, Г. И. Основы теории цепей. Энергия, М., 1969.
2. Атабеков, Г. И. Теоретические основы электротехники. Ч.1, Энергия, М., 1978.
3. Бессонов, Л. А. Теоретические основы электротехники. Электрические цепи. Высшая школа, М., 1984.
4. Генов, Л. Г. Теоретични основи на електротехниката. Техника, С., 1991.
5. Зевеке, Г. В., П. А.. Йонкин, А. В. Нетушил и С. В. Страхов. Основы теории цепей. Энергия, М., 1975.
6. Златев, М. П. Теоретична електротехника. Т.1, Техника, С., 1972.
7. Златев, М. П. Теоретична електротехника. Т.2, Техника, С., 1973.
8. Козарев, А. Ст. и Ст. Ат. Стефанов. Теоретични основи на електротехниката. Ч.1., Техника, С., 1978.
9. Нейман, Л. Р. и К. С. Демирчян. Теоретические основы электротехники. Т.1., Энергоиздат, Л., 1981.
10. Поливанов, К. М. Теоретические основы электротехники. Ч.1., Энергия, М., 1972.
11. Савов С. В. Теоретична електротехника. Ч.1. Електромагнетизъм. Колор принт, Варна, 1999.
12. Савов, С. В. Теоретична електротехника. Ч.2. Електрически вериги. Колор принт, Варна, 1999.
13. Фархи, С. Л. Теория на електрическите вериги. Техника, С., 1972.
14. Фархи, С. Л. и С. П. Папазов. Теоретична електротехника. Ч.1, Техника, С., 1981.

С Ъ Д Ъ Р Ж А Н И Е

	стр.
ПРЕДГОВОР.....	3
ЛИТЕРАТУРА.....	4
СЪДЪРЖАНИЕ.....	5
I. ФИЗИЧНИ ОСНОВИ НА ЕЛЕКТРОМАГНИТНОТО ПОЛЕ.....	7
1.1. Електромагнитно поле – основни понятия.....	7
1.2. Поляризация на диелектриците. Електрическо раз местване.	
Постулат на Максвел.....	10
1.3. Електрически ток. Видове ток. Принцип за непрекъснатост	
на пълния ток.....	13
1.4. Електрическо напрежение. Електрически потенциал	
Електродвижещо напрежение.....	16
1.5. Магнитен поток. Принцип за непрекъснатост на магнитния поток.	
Намагнитеност. Интензитет.....	19
1.6. Електромагнитна индукция. Самоиндукция. Взаимоиндукция.....	24
1.7. Електрическа енергия и сили.....	26
1.8. Магнитна енергия и сили.....	28
II. ЕЛЕКТРИЧЕСКИ И МАГНИТНИ ВЕРИГИ. ОСНОВНИ ПОНЯТИЯ И	
ЗАКОНИ.....	30
2.1. Електрически вериги – въведение. Класификация. Основни задачи	
на изследването.....	30
2.2. Източници на електродвижещо напрежение и източници на ток.	
Условие за еквивалентност.....	32
2.3. Пасивни елементи на линейните електрически вериги със	
съсредоточени параметри.....	33
2.4. Линейни електрически вериги. Основни закони. Баланс на	
мощностите.....	35
2.5. Магнитни вериги - основни понятия и закони.....	37
2.6. Пресмятане на неразклонени магнитни вериги за постоянен ток.....	39
2.7. Пресмятане на разклонени магнитни вериги за постоянен ток.....	41
2.8. Електростатични вериги - основни понятия и закони.....	43
2.9. Диелектрични вериги - основни понятия и закони.....	45
2.10. Графи на електрическите вериги. Схемни графи.....	46
2.11. Структурни матрици. Връзка между структурните матрици.....	50
III. ЛИНЕЙНИ ЕЛЕКТРИЧЕСКИ ВЕРИГИ. ПРЕОБРАЗУВАНЕ И МЕТОДИ	
ЗА АНАЛИЗ НА СЛОЖНИ ВЕРИГИ. ОСНОВНИ ПРИНЦИПИ И ТЕОРЕМИ.....	55
3.1. Преобразуване на линейни електрически вериги – общи положения.	
Преобразуване на пасивни и активни вериги.....	55
3.2. Методи за изследване на сложни линейни електрически вериги.....	63
3.3. Някои принципи за линейни електрически вериги.....	71
3.4. Теорема за линейни електрически вериги.....	74
IV. УСТАНОВЕНИ СИНУСОИДАЛНИ РЕЖИМИ В ЛИНЕЙНИ	
ЕЛЕКТРИЧЕСКИ ВЕРИГИ БЕЗ ИНДУКТИВНА ВРЪЗКА.....	80
4.1. Променливотокови линейни електрически вериги без индуктивна	
връзка.....	80
4.2. Установен синусоидален режим в последователна R, L, C верига.....	84
4.3. Установен синусоидален режим в паралелна R, L, C верига.....	88
4.4. Мощност при установен синусоидален режим. Моментна мощност и	
колебания на енергията в последователна R, L, C верига.....	91
4.5. Приложение на комплексното изобразяване на синусоидалните вели-	

чини за анализ на установените синусоидални режими в последователна и паралелна R, L, C верига. Комплексна мощност 96

4.6. Закон на Ом и Кирхоф в комплексен вид. Приложение. Еквивалентни параметри при последователно и паралелно съединение на комплексни съпротивления 100

4.7. Методи за анализ на сложни електрически вериги в комплексен вид. Матричен запис. Баланс на мощностите 104

4.8. Предаване на максимална активна мощност на консуматор 109

V. РЕЗОНАНСНИ ЯВЛЕНИЯ 111

5.1. Резонанс на напреженията 111

5.2. Резонанс на токовете 113

5.3. Резонанс в сложни вериги. Резонанс при всички честоти 116

VI. УСТАНОВЕНИ СИНУСОИДАЛНИ РЕЖИМИ В ЛИНЕЙНИ

ЕЛЕКТРИЧЕСКИ ВЕРИГИ С ИНДУКТИВНА ВРЪЗКА 120

6.1. Анализ на установени синусоидални режими в линейни електрически вериги с индуктивна връзка 120

6.2. Предаване на комплексна мощност по индуктивен път. 123

6.3. Елиминирание на индуктивната връзка 125

6.4. Линеен трансформатор 127

VII. ПЕРИОДИЧНИ НЕСИНУСОИДАЛНИ РЕЖИМИ В ЛИНЕЙНИ

ЕЛЕКТРИЧЕСКИ ВЕРИГИ 132

7.1. Представяне на периодични несинусоидални величини в ред на Фурие. Пресмятане на периодични несинусоидални режими. Влияние на ние на реактивните елементи върху кривата на тока 132

7.2. Периодични несинусоидални режими. Ефективни стойности. Активна мощност 137

VIII. ПРЕХОДНИ ПРОЦЕСИ В ЛИНЕЙНИ ЕЛЕКТРИЧЕСКИ ВЕРИГИ 140

8.1. Преходни процеси в линейни електрически вериги – общи положения. Класически метод за изследване на преходни процеси 140

8.2. Преходни процеси в последователна R, L верига 145

8.3. Преходни процеси в последователна R, C верига 148

8.4. Преходни процеси в последователна R, L, C верига. Разряд на кондензатор в последователна R, L верига 152

8.5. Включване на последователна R, L, C верига към постоянно напрежение 158

8.6. Операторен метод за изследване на преходни процеси 159

8.7. Честотен метод за изследване на преходни процеси 166

8.8. Преходни процеси при въздействия с произволна форма.

Интеграл на Дюамел 172

8.9. Методи за изследване на преходни процеси чрез променливи на състоянието 181

I. ФИЗИЧНИ ОСНОВИ НА ЕЛЕКТРОМАГНИТНОТО ПОЛЕ

Встъпителни бележки

В раздела се дефинират интегрални величини като електрически заряд, електрически ток, електрическо напрежение, електродвижещо напрежение, магнитен поток, магнитно напрежение, магнитовъзбудително напрежение. Дефинират се също и електромагнитни параметри като електрическо съпротивление, електрическа проводимост, електрически капацитет, индуктивност, взаимна индуктивност. Тези величини и параметри са основни при изследването на процесите в електрическите и магнитните вериги.

1.1. Електромагнитно поле - основни понятия

Известни са две форми на съществуване на материята: вещество и поле. Веществените елементарни частици могат да бъдат електрически неутрални (например, неутроните) или да притежават електрически заряд (например, протоните притежават положителен заряд, а електроните - отрицателен заряд). Заредените частици са обкръжени от електромагнитно поле. Електромагнитното поле е особен вид материя със следните основни свойства:

1. То може да се разпространява в пространството във вид на вълни, наречени електромагнитни;
2. То може да съществува и самостоятелно във вид на кванти излъчено поле, наречени фотони.

Въз основа на второто свойство може да се заключи, че докато заредените частици винаги са свързани с електромагнитно поле, то полето може да съществува отделно от тях.

Пространството, в което съществува електромагнитно поле, но отсъствуват веществени частици, се нарича пустота или вакуум. Терминът "вакуум" по-често се употребява като степен на разреждане.

Електромагнитното поле се разпространява в пустотата при отсъствие на силни гравитационни полета със скорост, близка до скоростта на светлината $c = 3 \cdot 10^8$ m/s.

Свойството на веществените частици или телата, характеризиращо взаимната им връзка със собственото им електромагнитно поле и взаимодействието им с външни електромагнитни полета, се нарича електрически заряд. Зарядът се измерва в SI система в единици, наречени кулони (C). Кулонът се изразява чрез основната измервателна единица за електрически и магнитни величини, а именно чрез единицата за ток ампер (A), и единицата за време секунда (s), по следния начин: $1C = 1A \cdot 1s$.

Електромагнитното поле има две взаимно свързани страни - електрическо и магнитно поле. Могат да бъдат създадени условия, при които в дадена част на пространството да се проявяват само електрически или само магнитни явления. Например, при неподвижните електрически заредени тела се констатира само електрическо поле, а при неподвижните постоянни магнити - само магнитно поле. В първия случай резултатното магнитно поле е нула, а във втория - резултатното електрическо поле е нула.

Електрическото поле на неподвижните електрически заредени тела се нарича електростатично. Във връзка с това според електрическите си свойства веществата се делят на диелектрици, проводници и полупроводници. В диелектриците отсъствуват свободни елементарни електрически заряди и в тях електростатичното поле може да съществува теоретично безкрайно дълго време, тъй като външните заряди не могат да преминават през тях. В проводниците съществуват свободни елементарни електрически заряди (електрони или йони) и в тях не може да

съществува електростатично поле, тъй като под действието му става преместване на елементарните заряди. Полупроводниците по електрически свойства заемат междинно място между диелектриците и проводниците.

Среда, която има еднакви физически свойства във всеки елемент от обема си, се нарича еднородна. Изотропна е средата, която има във всеки елемент от обема си еднакви свойства във всички направления.

Основната определяща величина на електрическото поле е интензитетът му $\vec{E}$. Той се определя чрез силата $\vec{F}_e$, с която полето действа върху заряд q , отнесена към големината на заряда, т.е.:

$$\vec{E} = \vec{F}_e / q. \quad (1.1.1)$$

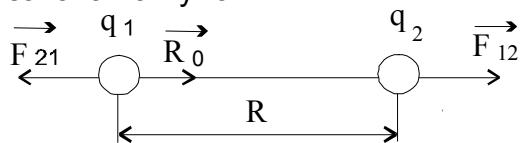
Размерността на интензитета E е волт на метър, т.е.: $\dim E = [V/m]$.

За избягване влиянието на заряда q върху изследваното поле, той трябва да бъде много малък. Освен това зареденото тяло трябва да има много малки размери, т.е. зарядът да бъде точков. Такъв заряд се нарича още пробен. За пробния заряд се приема, че е положителен.

Въз основа на изложеното по-горе за интензитета $\vec{E}$ на електрическото поле се записва:

$$\vec{E} = \lim_{q \rightarrow 0} \left(\vec{F}_e / q \right). \quad (1.1.2)$$

Механичната сила на взаимодействие на два неподвижни точкови заряда q_1 и q_2 , намиращи се в еднороден и изотропен диелектрик (фиг. 1.1.1), се определя от закона на Кулон:



Фиг.1.1.1

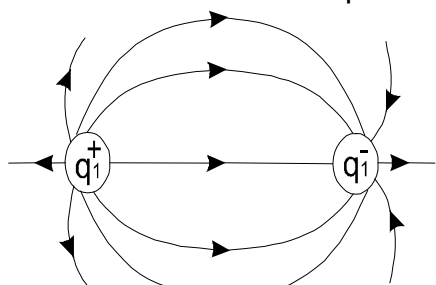
$$\vec{F}_{12} = \frac{q_1 \cdot q_2}{\epsilon \cdot 4\pi \cdot R^2} \vec{R}_0. \quad (1.1.3)$$

Във формула (1.1.3) $\epsilon = \epsilon_0 \epsilon_r$ е абсолютната диелектрична проницаемост на средата ($\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} [F/m]$ е абсолютната диелектрична проницаемост на пустотата, а ϵ_r - относителната диелектрична проницаемост на средата).

Ако във формула (1.1.3) q_2 е пробният заряд, то за интензитета $\vec{E}$ на полето, създавано от точковия заряд $q_1 = q$, се записва:

$$\vec{E} = \frac{q}{\epsilon \cdot 4\pi \cdot R^2} \vec{R}_0. \quad (1.1.4)$$

Линиите, чиито допирателни във всяка точка съвпадат с посоката на вектора интензитет на електрическото поле $\vec{E}$, се наричат електрически линии.



Фиг.1.1.2

Съвкупността от тези линии дава картината на полето. Възприето е, че електрическите линии започват от положителния заряд и завършват на отрицателния заряд (фиг. 1.1.2).

Потоът Ψ_E на интензитета $\vec{E}$ на електрическото поле през повърхност S е:

$$\Psi_E = \int_{(S)} \vec{E} \cdot d\vec{S}. \quad (1.1.5)$$

За потока Ψ_E на вектора $\vec{E}$ на електростатично поле през затворена повърхност S в случай на еднороден и изотропен диелектрик с диелектрична проницаемост ϵ се записва:

$$\oint_{(S)} \vec{E} \cdot d\vec{S} = q / \epsilon. \quad (1.1.6)$$

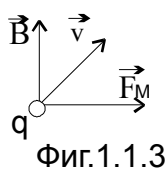
Формула (1.1.6) е известна като теорема на Гаус.

Въз основа на тази теорема може да се заключи, че електрическият заряд на заредено проводящо тяло се разпределя в съвсем тънък слой от повърхността му.

Интензитетът $\vec{E}$ на полето вътре в проводника в условията на статиката трябва да бъде равен на нула, т.е.: $\vec{E} = 0$. В случай, че $\vec{E} \neq 0$, свободните заредени частици ще се преместват и статично състояние ще се установи след като интензитетът $\vec{E}$ стане равен на нула. Ето защо потокът Ψ_E през затворена повърхност вътре в тялото е нула. Следователно и зарядът в обема, ограничен от тази повърхност, ще бъде нула, т.е. зарядът на заредено проводящо тяло е разпределен по повърхността му.

Магнитното поле е втората страна на единното електромагнитно поле. То се свързва с електрически ток, т.е. се обуславя от движение на електрически заряди или от изменение на електрическо поле. Ето защо магнитното поле се нарича още електрокинетично.

Основна определяща величина на магнитното поле е



Фиг. 1.1.3

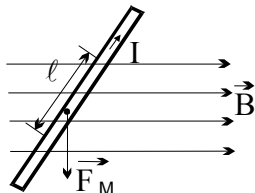
магнитната индукция $\vec{B}$. Тя се определя чрез силата на Лоренц, с която полето действа на движещи се заряди (фиг. 1.1.3):

$$\vec{F}_M = q(\vec{v} \times \vec{B}). \quad (1.1.7)$$

В горната формула q е движещият се заряд, а $\vec{v}$ - скоростта му.

Магнитната индукция може да бъде дефинирана и чрез силата $\vec{F}_M$, действаща на проводник с ток I и дължина $\vec{\ell}$ (фиг. 1.1.4). За силата $\vec{F}_M$ съгласно закона на Лаплас се записва:

$$\vec{F}_M = I(\vec{\ell} \times \vec{B}). \quad (1.1.8)$$



Фиг. 1.1.4

В случай, че векторите $\vec{\ell}$ и $\vec{B}$ са взаимно перпендикулярни, то силата е максимална:

$$F_{M_{\max}} = I \ell B. \quad (1.1.9)$$

От формула (1.1.9) за магнитната индукция B се записва:

$$B = F_{M_{\max}} / I \ell. \quad (1.1.10)$$

Размерността на B е в $[T] = [V \cdot s / m^2] = [Wb / m^2]$.

В случай, че магнитното поле е нееднородно, то магнитната индукция B се определя по следния начин:

$$B = \lim_{\Delta \ell \rightarrow 0} \frac{\Delta F_{\max}}{I \Delta \ell}. \quad (1.1.11)$$

Формула (1.1.10) може да бъде записана и във векторна форма:

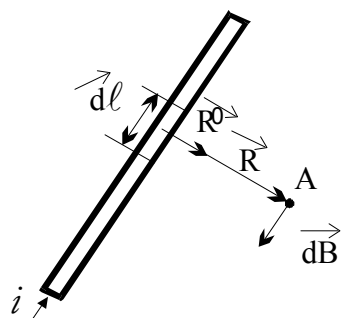
$$\vec{B} = \frac{\vec{dF}_{M \max}}{i d\ell} \times \vec{\ell}^0. \quad (1.1.12)$$

Във формули (1.1.8) и (1.1.12) посоките на векторите $\vec{\ell}$ и $\vec{\ell}^0$ съвпадат с посоката на тока.

В случай, че частица със заряд q се движи в електромагнитно поле със скорост $\vec{v}$, то силата, с която ѝ действа полето, е:

$$\vec{F} = \vec{F}_e + \vec{F}_M = q \vec{E} + q(\vec{v} \times \vec{B}). \quad (1.1.13)$$

Съставката $\vec{F}_e$, дължаща се на електрическото поле, може да изменя, както направлението на движение на частицата, така и скоростта ѝ. Съставката $\vec{F}_M$, дължаща се на магнитното поле, е винаги перпендикулярна на скоростта $\vec{v}$ на частицата и може да изменя само направлението на движението ѝ.



Фиг. 1.1.5

Както бе споменато по-горе, магнитното поле се обуславя от електрически ток. За магнитната индукция $d\vec{B}$, създавана от токов отрязък с дължина $d\ell$ и ток i на разстояние R от него, съгласно закона на Био-Савар се записва (фиг. 1.1.5):

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 i d\ell \times \vec{R}^0}{4\pi R^2}. \quad (1.1.14)$$

Посоката на вектора $d\vec{\ell}$ съвпада с посоката на тока i в проводника.

Във формула (1.1.14) μ_0 е абсолютната магнитна проницаемост на пустотата $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ [H/m].

Магнитната индукция $d\vec{B}$ може да бъде определена и чрез плътността на тока $\vec{\delta}$ по формулата:

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 \vec{\delta} dV \times \vec{R}^0}{4\pi R^2}. \quad (1.1.15)$$

1.2. Поляризация на диелектриците. Електрическо разместване. Постулат на Максвел

Както бе споменато в 1.1, теоремата на Гаус се отнася за електростатичното поле и за еднороден и изотропен диелектрик. Задачата, която се поставя, е тази теорема да се обобщи за какъв да е диелектрик и за променливо поле. За целта се разглежда поляризацията на диелектриците. Отправен момент при разглеждането са понятията дипол и електрически момент на дипол.

Приема се, че диелектриктът е идеален, т.е. електропроводимостта му е нула.

При внасяне на диелектрика във външно електрическо поле, елементарните заредени частици, влизащи в състава на молекулите, изпитват от страна на полето механични сили. Под действието на тези сили частиците се разместват. При не много големи стойности на интензитета на полето тези частици не могат да се отделят тъй като се задържат от вътрешноатомните, вътрешномолекулярните и междумолекулярните сили.

При някои диелектрици като газовете H_2 , O_2 , N_2 и др. молекулите им при отсъствие на външно поле се електронеутрални, т.е. центърът на действие на всички електрони в молекулите съвпада с центъра на действие на молекулярните ядра. Такива диелектрици се наричат неполярни. Под действието на външно електрическо поле положителните и отрицателните заряди, влизащи в състава на молекулата, се разместват и той се превръща в дипол.

Под дипол се разбира система от два равни по големина и противоположни по знак свързани заряди $+q$ и $-q$, изместени един от друг на разстояние ℓ . Диполът се характеризира с електрически момент $\vec{p}$, който се дава с изрази:

$$\vec{p} = q \cdot \vec{\ell}. \quad (1.2.1.)$$

Посоката на вектора $\vec{\ell}$ съвпада с посоката на изместване на положителния заряд.

Под действието на външно електрическо поле всяка молекула на неполярния диелектрик се превръща в дипол и диелектрият се поляризира. Такива диполи се наричат квазиеластични.

Съществуват диелектрици, чиито молекули имат електрически момент и при отсъствие на външно електрическо поле. Те се наричат полярни диелектрици. Например, молекулите на газа хлороводород (HCl) имат положителен водороден йон и отрицателен хлорен йон, които се намират на известно разстояние и представляват дипол. При отсъствие на външно електрическо поле диполите вследствие на топлинното им движение са разположени хаотично и електрическите им полета се неутрализират. При поставяне на диелектрика във външно поле диполите му се ориентират по силите на полето и той се поляризира.

Геометричната сума от електрическите моменти на диполите $\sum \vec{p}$, намиращи се в даден обем V , се нарича електрически момент на обема. Степента на поляризация $\vec{P}$ в дадена точка на диелектрика, наречена още поляризованост, се дефинира по следния начин:

$$\vec{P} = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{\sum \vec{p}}{V}. \quad (1.2.2.)$$

Поляризоваността P може да бъде определена и чрез броя на диполите на единица обем $N_1 = dN/dV$ (dN е броят на диполите за обема dV) по формулата:

$$P = N_1 \cdot p. \quad (1.2.3.)$$

Поляризоваността $\vec{P}$ е пропорционална на интензитета $\vec{E}$ на външното електрическо поле, т.е.:

$$\vec{P} = \epsilon_0 \chi \vec{E}. \quad (1.2.4.)$$

В горната формула коефициентът α се нарича абсолютна диелектрична възприемчивост на веществото. Размерността на α е $[F/m]$. Въвежда се още и относителна диелектрична възприемчивост: $\alpha_r = \alpha / \epsilon_0$.

При обикновените диелектрици α_r е от порядъка на няколко десетки единици

и при не много силни полета зависимостта (1.2.4.) е линейна. Съществуват диелектрични материали (сегнетодиелектрици), при които α_r силно зависи от интензитета E на външното поле. При някои стойности на E , α_r може да получи много големи стойности.

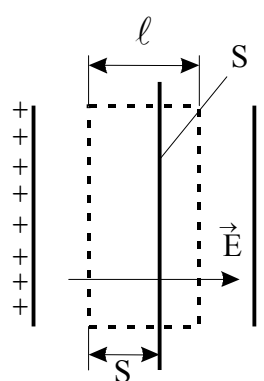
В общия случай векторите $\vec{P}$ и $\vec{E}$ не са колиниарни и зависимостта $\vec{P} = f(\vec{E})$ се представя така:

$$\vec{P} = \hat{\alpha} \vec{E} . \quad (1.2.5)$$

В последната формула величината $\hat{\alpha}$ е тензорна.

В случай на еднородно външно поле (фиг. 1.2.1.) поляризоваността P може да бъде определена чрез заряда Q' , пренесен от заредените частици, които са се разместили в диелектрика в процеса на установяване на полето през повърхността S , нормална на направлението на разместване на частите. За заряда Q' се записва:

$$Q' = qN_1 xS + qN_1 (\ell - x)S = N_1 q \ell S . \quad (1.2.6.)$$



Фиг.1.2.1

В горната формула първата съставка се определя от разместването на положителните заряди, а втората съставка - от разместването на отрицателните заряди (q е положителният заряд на дипола, а N_1 - броят на диполите за единица обем).

Когато се има предвид, че съгласно формула (1.2.3.)

$N_1 q \ell = N_1 p = P$, то за (1.2.6) се получава :

$$Q' = P \cdot S , \quad (1.2.7.)$$

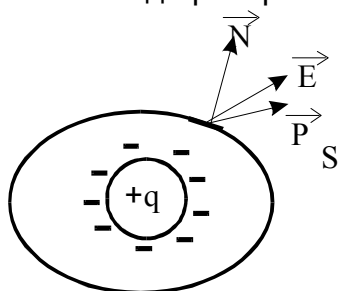
откъдето за P се достига до израза:

$$P = \frac{Q'}{S} . \quad (1.2.8.)$$

В случай на нееднородно поле поляризоваността P се определя по следния начин:

$$P = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta Q'}{\Delta S} = \frac{dQ'}{dS} . \quad (1.2.9)$$

За дефиниране на величината електрическо разместване $\vec{D}$ (нарича се още



Фиг.1.2.2

електрическа индукция) се разглежда тяло с произволна форма и със заряд q , заобиколено в общия случай с нееднороден и анизотропен диелектрик. Тялото мислено се загражда със затворена повърхност S , разположена в диелектрика (фиг. 1.2.2.). При увеличаване на заряда от 0 до q , в диелектрика възниква електрическо поле и той се поляризира. През повърхността S при поляризацията се пренася заряд Q' :

$$Q' = \oint_{(S)} \vec{P} \cdot d\vec{S} . \quad (1.2.10)$$

В обема, ограничен от повърхността S , освен свободния заряд q се получава и свързан заряд q' . Зарядът q' е на частиците, свързани с вътрешномолекулярни сили, и е некомпенсиран със заряд с противоположен знак. За заряда q' се записва:

$$q' = -Q' = - \oint_{(S)} \vec{P} \cdot d\vec{S} . \quad (1.2.11)$$

За разглеждания случай теоремата на Гаус се изразява по следния начин:

$$\oint_{(S)} \vec{E} \cdot d\vec{S} = (q + q')/\epsilon_0. \quad (1.2.12)$$

Като се има предвид формула (1.2.11) се получава:

$$\oint_{(S)} (\epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}) \cdot d\vec{S} = q. \quad (1.2.13)$$

Въвежда се величината $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} = \vec{D}_0 + \vec{P}$, която носи названието електрическо разместване. За потока на $\vec{D}$ се записва:

$$\oint_{(S)} \vec{D} \cdot d\vec{S} = q. \quad (1.2.14)$$

Формула (1.2.14.) е известна като обобщена теорема на Гаус или още като постулат на Максвел. Тя е валидна за какъв да е диелектрик и за променливи електрически полета.

За еднороден и изотропен диелектрик се записва: $\oint_{(S)} \vec{E} \cdot d\vec{S} = q/\epsilon$. Тъй

като $\epsilon = \text{const}$, се достига до израза: $\oint_{(S)} \epsilon \vec{E} \cdot d\vec{S} = q$, от който се установява, че

$$\vec{D} = \epsilon \cdot \vec{E}.$$

За еднороден и изотропен диелектрик, отчитайки формула (1.2.3), се записва:

$$\vec{D} = \epsilon \cdot \vec{E} = \vec{D}_0 + \vec{P} = \epsilon_0 \vec{E} + \alpha \vec{E}. \quad (1.2.15)$$

От последната формула като се има предвид, че $\alpha = \epsilon_0 \alpha_r$ се получава:

$$\epsilon = \epsilon_0 + \alpha = \epsilon_0 (1 + \alpha_r) = \epsilon_0 \epsilon_r. \quad (1.2.16)$$

От формули (1.2.8) и (1.2.14) може да се установи, че размерността на величините P и D е $[C/m^2]$.

1.3. Електрически ток. Видове ток. Принцип за непрекъснатост на пълния ток

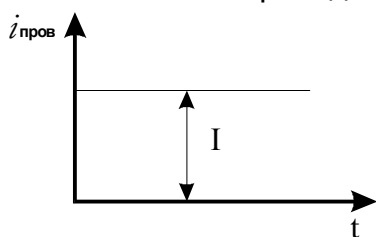
Електрическият ток е явление на движение на електрически заряди или на изменение на електрическо поле във времето, съпроводжани от магнитно поле.

Основните видове електрически ток са: ток на проводимостта, ток на пренасянето (конвекцията) и ток на разместването.

Токът на проводимостта се нарича насоченото движение на заредени частици в проводниците под действието на електрическо поле.

Тези частици в случай на метални проводници са електрони, а в случай на електролити - положителни и отрицателно йони.

Терминът "електрически ток" се използва не само за характеризиране на явлениято "движение на заредени частици", но и за количествено определение на интензивността на това явление, т.е. терминът "сила на електрическия ток" няма да бъде използван в по-



фиг.1.3.1

нататъшното изложение.

Електрическият ток на проводимостта $i_{\text{пров}}$ се определя като скорост на пренасяне на електрическите заряди q , т.е.:

$$i_{\text{пров}} = dq / dt . \quad (1.3.1)$$

В случай, че токът $i_{\text{пров}}$ запазва една и съща стойност I във времето (фиг. 1.3.1.), той се нарича постоянен.

За характеризирание на явлението движение на електрическите заряди се въвежда величината плътност на тока $\delta_{\text{пров}}$:

$$\delta_{\text{пров}} = di_{\text{пров}} / dS . \quad (1.3.2)$$

Тази величина е векторна, като посоката ѝ съвпада с посоката на движение на положителните заряди.

Във формула (1.3.2) dS е площта на повърхността, през която преминава ток $di_{\text{пров}}$.

За тока $i_{\text{пров}}$, преминаващ през повърхността S , се записва :

$$i_{\text{пров}} = \int_{(S)} \vec{\delta}_{\text{пров}} d \vec{S} . \quad (1.3.3)$$

Размерността на тока е $[A]$, а на плътността му - $[A/m^2]$.

Плътността $\vec{\delta}_{\text{пров}}$ на тока на проводимостта при постоянна температура на проводника е пропорционална на интензитета на полето $\vec{E}$.

В случай на изотропна среда, векторите $\vec{\delta}_{\text{пров}}$ и $\vec{E}$ са колиниарни и се записва:

$$\vec{\delta}_{\text{пров}} = \gamma \cdot \vec{E} . \quad (1.3.4)$$

Последната формула се нарича закон на Ом в диференциална форма. Величината γ носи названието специфична проводимост и има размерност $[S/m]$. Освен величината γ се използва и реципрочната величина $\rho = 1/\gamma$, която се нарича специфично съпротивление и има размерност $[\Omega \cdot m]$.

В случай на анизотропна среда се записва:

$$\vec{\delta}_{\text{пров}} = \hat{\gamma} \cdot \vec{E} . \quad (1.3.5)$$

В този случай специфичната проводимост е тензорна величина и векторите $\vec{\delta}_{\text{пров}}$ и $\vec{E}$ могат да не бъдат колиниарни.

Вторият вид ток - токът на пренасянето (конвекцията) представлява движение на заредени частици в празно пространство или във вещество, когато тези частици не произлизат от веществото. За плътността $\vec{\delta}_{\text{прен}}$ на този ток не е валиден законът на Ом в диференциална форма. В случая не може да бъде дефинирана величината специфична проводимост, с каквато се характеризират проводниците.

Плътността $\vec{\delta}_{\text{прен}}$ може да бъде изразена чрез обемната плътност ρ на заряда на движещите се частици и скоростта им $\vec{v}$ по следния начин:

$$\vec{\delta}_{\text{прен}} = \rho \vec{v} . \quad (1.3.6)$$

В случай, че едновременно се движат положителни заряди с плътност ρ_+ и скорост $\vec{v}_+$ и отрицателни заряди с плътност ρ_- и скорост $\vec{v}_-$, за плътността $\vec{\delta}_{\text{прен}}$ се записва:

$$\vec{\delta}_{\text{прен}} = \rho_+ \vec{v}_+ + \rho_- \vec{v}_-. \quad (1.3.7)$$

Третият вид ток - токът на разместването се разглежда в случай на променливо електрическо поле. Плътността му $\vec{\delta}_{\text{разм}}$ се определя като скорост на изменение на електрическото разместване $\vec{D}$, т.е.:

$$\vec{\delta}_{\text{разм}} = \frac{d\vec{D}}{dt}. \quad (1.3.8)$$

Като се има предвид, че величината $\vec{D} = \vec{D}_0 + \vec{P}$ (вж. формула (1.2.15)), то за плътността $\vec{\delta}_{\text{разм}}$ се записва:

$$\vec{\delta}_{\text{разм}} = \frac{d\vec{D}_0}{dt} + \frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{\delta}_0 + \vec{\delta}', \quad (1.3.9)$$

В последната формула съставката $\vec{\delta}'$ се определя от изменението на поляризоваността $\vec{P}$ на диелектрика и се нарича плътност на тока на поляризацията. Този ток е свързан с движението на заредените частици на атомите и молекулите на диелектрика. Като се има предвид, че тези частици не са свободни, то токът на поляризацията се обяснява с движението на свързаните заряди на диелектрика.

Първата съставка $\vec{\delta}_0$ във формула (1.3.9) не може да бъде свързана с движение или разместване на заредени частици. Тя характеризира полето не в материята вещество, а в материята електромагнитно поле и носи названието плътност на тока на разместването в пустотата. На съставката $\vec{\delta}_0$ не може да бъде дадена такава нагледна представа, както на съставката $\vec{\delta}'$. Може обаче да се предположи, че появата на свързаното с електрическия ток магнитно поле, е еднакво и за двете съставки, което е доказано експериментално.

За количествено определяне на тока на разместването в пустотата i_0 се записва израз:

$$i_0 = \int_{(S)} \vec{\delta}_0 \cdot d\vec{S} = \frac{d}{dt} \int_{(S)} \vec{D}_0 \cdot d\vec{S} = \frac{d\Psi_{D_0}}{dt}. \quad (1.3.10)$$

От горната формула може да се заключи, че токът на електрическото разместване i_0 в пустотата през някаква повърхност S се определя чрез скоростта на изменение на потока Ψ_{D_0} на електрическото разместване през тази повърхнина в пустотата.

Въвеждат се величините пълен ток i_{Π} и плътност на пълния ток $\vec{\delta}_{\Pi}$ по следния начин:

$$i_{\Pi} = i_{\text{пров}} + i_{\text{прен}} + i_{\text{разм}}, \quad (1.3.11)$$

$$\vec{\delta}_{\Pi} = \vec{\delta}_{\text{пров}} + \vec{\delta}_{\text{прен}} + \vec{\delta}_{\text{разм}}. \quad (1.3.12)$$

За пълния ток i_{Π} , преминаващ през коя да е затворена повърхност S , се доказва, че:

$$i_n = \oint_{(S)} \vec{\delta}_n \cdot d\vec{S} = 0. \quad (1.3.13)$$

Последната формула изразява принципа за непрекъснатост на пълния ток, който гласи, че пълният ток през коя да е затворена повърхност, в каква да е среда, е равен на нула. Тъй като излизащият от затворената повърхност ток е по посока на външната ѝ нормала се приема, че той е положителен, а влизащият - отрицателен.

От принципа за непрекъснатостта на пълния ток може да се заключи, че линиите му са затворени линии. Тези линии нямат начало, нямат край, т.е. електрическият ток преминава само по затворен път.

Въз основа на формула (1.3.13) може да се запише следният израз:

$$\sum i_k = 0, \quad (1.3.14)$$

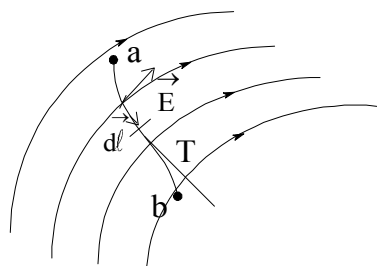
който се нарича първи закон на Кирхоф за електрическите вериги и ще бъде обект на разглеждане в теория на веригите.

1.4. Електрическо напрежение. Електрически потенциал. Електродвижещо напрежение

За дефиниране на величината електрическо напрежение се разглежда електрическото поле от енергийна гледна точка. От 1.1. е известно, че електрически заряд, намиращ се в електрическо поле с интензитет $\vec{E}$, изпитва силата $\vec{F}_e = q \vec{E}$. Под действието на тази сила той се премества, т.е. силата извършва работа за преместването му.

За работата dA , извършвана от силата $\vec{F}_e$ за преместване на заряда q на разстояние $d\vec{\ell}$ (фиг. 1.4.1), се записва:

$$dA = \vec{F}_e \cdot d\vec{\ell} = q \vec{E} \cdot d\vec{\ell}. \quad (1.4.1)$$



Фиг.1.4.1

Във формула (1.4.1) с $d\vec{\ell}$ е означен вектор с големина $d\ell$, насочен по тангентата T към пътя на преместване на заряда q , и с посоката, съвпадаща с посоката на преместването.

Работата A , извършвана от силите на полето за преместването на заряда q по пътя между точките a и b , се дава с израз:

$$A = \int_a^b \vec{F}_e \cdot d\vec{\ell} = q \int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = q \cdot u_{ab}. \quad (1.4.2)$$

От последната формула може да се запише:

$$u_{ab} = A/q = \int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{\ell}. \quad (1.4.3)$$

Величината u_{ab} се нарича електрическо напрежение. Тя характеризира електрическото поле по протежение на разглеждания път. При това пътят може да преминава през различни среди - през проводник или диелектрик или през проводник и диелектрик.

В случай на проводяща среда се дефинира параметърът електрическото съпротивление. За целта се разглежда проводник с дължина ℓ и с постоянно напречно сечение S . Приема се, че материалът на проводника е еднороден със специфична проводимост γ . При напрежение u , през проводника ще преминава ток

i . Въз основа на разгледаното в 1.3, за плътността му δ може да се запише:

$$\delta = i/S = \gamma E. \quad (1.4.4)$$

Предполага се, че електрическото поле в проводника е равномерно, т.е.

$\vec{E} = \text{const}$. В такъв случай за напрежението u се записва:

$$u = \int_{(\ell)} \vec{E} d\vec{\ell} = \int_{(\ell)} E d\ell = E\ell. \quad (1.4.5)$$

От формули (1.4.4) и (1.4.5) може да се получи:

$$i = \gamma \frac{S}{\ell} u. \quad (1.4.6)$$

Въвежда се параметърът:

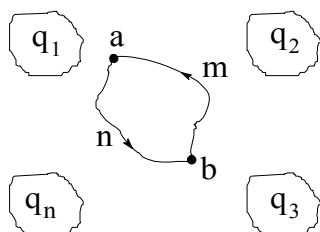
$$R = \frac{\ell}{\gamma S} = \rho \frac{\ell}{S}, \quad (1.4.7)$$

който се нарича електрическо съпротивление на проводника.

Във формула (1.4.6) величината ρ е специфичното съпротивление на проводника.

Реципрочният на електрическото съпротивление параметър $G = 1/R$ носи названието електрическа проводимост.

Размерността на електрическото съпротивление е $[\Omega]$, а на електрическата проводимост - $[S]$.



Фиг. 1.4.2

За дефиниране на величината електрически потенциал се разглежда система от n неподвижни заредени тела (фиг. 1.4.2). Ако точков заряд q се премества от силите на полето на заредените тела, то работата, извършвана от тези сили при преместване на заряда по затворен контур ще бъде равна на нула, т.е.:

$$q \oint_{(\ell)} \vec{E} d\vec{\ell} = 0. \quad (1.4.8)$$

Този резултат следва от принципа на запазване на енергията. И действително, ако се приеме, че преместването на заряда q по пътя anb е по посока на силите на полето на заредените тела, то работата по този път ще бъде положителна. В такъв случай работата по пътя amb ще бъде отрицателна.

И така, за полето на неподвижни заредени тела, което, както е известно от 1.1, се нарича електростатично, се записва:

$$\oint_{(\ell)} \vec{E} d\vec{\ell} = 0. \quad (1.4.9)$$

Прието е полета, за които циркулацията на определящата им векторна величина $\vec{F}$ (в случая $\vec{E}$) по затворен контур е равна на нула, да се наричат потенциални. При потенциалните полета линейният интеграл от величината $\vec{F}$ (в случая $\int_a^b \vec{E} d\vec{\ell}$) не зависи от пътя, а единствено от координатите на двете крайни точки. За такива полета се дефинира скаларната величина, наречена потенциал.

Електрическият потенциал се определя чрез отношението от работата A , извършвана от силите на полето за пренасяне на заряд q от разглежданата точка a до безкрайност, отнесена към заряда q , т.е.:

$$\varphi_a = A/q = \left(\int_a^\infty \vec{q} \cdot \vec{E} d\vec{\ell} \right) / q = \int_a^\infty \vec{E} d\vec{\ell} . \quad (1.4.10)$$

За разликата в потенциалите между две точки а и b се записва:

$$\varphi_a - \varphi_b = \int_a^b \vec{E} d\vec{\ell} . \quad (1.4.11)$$

От сравняването на формула (1.4.11) с формула (1.4.3) може да се заключи, че за потенциалните електрически полета величините разлика в потенциалите и електрическо напрежение съвпадат.

За дефиниране на параметъра електрически капацитет се разглежда уединено заредено проводящо тяло. Отношението на заряда q на тялото към потенциала му се нарича капацитет, т.е.:

$$C = q / \varphi . \quad (1.4.12)$$

Капацитетът на проводяща сфера с радиус R, разположена в еднороден диелектрик с абсолютна диелектрична проницаемост ε , се дава с формулата:

$$C = 4\pi\varepsilon R . \quad (1.4.13)$$

Под кондензатор се разбира система от две проводящи тела, разделени с диелектрик. Ако едното тяло е заредено със заряд $q_1 = q > 0$, а другото с противоположен заряд $q_2 = -q < 0$, то между тях ще съществува разлика в потенциалите $\varphi_1 - \varphi_2 = u_{12}$ (φ_1 е потенциалът на тялото със заряд q, а φ_2 - на тялото със заряд -q). Отношението от тази разлика към заряда q се нарича капацитет между двете тела, т.е. капацитет C на кондензатора:

$$C = q / (\varphi_1 - \varphi_2) = q / u_{12} . \quad (1.4.14)$$

Капацитетът C на плосък кондензатор се дава с формулата:

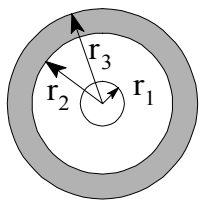
$$C = S\varepsilon / d . \quad (1.4.15)$$

В горната формула S е площта на електродите, d - разстоянието между тях, а ε - абсолютната диелектрична проницаемост на диелектрика.

За капацитета C на цилиндричен кондензатор се записва:

$$C = 2\pi\varepsilon\ell / \ln(r_2 / r_1) . \quad (1.4.16)$$

При цилиндричния кондензатор електродите представляват две коаксиални цилиндрични повърхности. Като такъв кондензатор може да бъде разглеждан коаксиалният кабел (фиг. 1.4.3).



Във формула (1.4.16) ℓ е дължината на кабела, r_1 - радиусът на жилото, r_2 - вътрешният радиус на обвивката, ε - абсолютна диелектрична проницаемост на диелектрика.

Ако циркулацията на определящия вектор $\vec{F}$ на дадено поле по затворен контур е различно от нула, т.е. $\oint_{(\ell)} \vec{E} d\vec{\ell} \neq 0$, то такава

поле се нарича непотенциално или още вихрово. В случай на непотенциално електрическо поле тази циркулация дефинира величината електродвижещо напрежение (ЕДН) e , т.е.:

$$e = \oint_{(\ell)} \vec{E} d\vec{\ell} \neq 0 . \quad (1.4.17)$$

Непотенциално е електрическото поле в енергийните източници. В случай на затворена електрическа верига под действието на ЕДН в нея преминава ток. ЕДН ще извършва работа за сметка на вътрешната енергия на източника. Тази енергия може да има различен характер: електрохимичен, топлинен и др.

Ако се разглежда циркулацията на вектора интензитет $\vec{E}$ на електрическото поле по затворен контур, включващ енергийни източници и консуматори, може да се достигне до израза:

$$\sum e_k = \sum u_k. \quad (1.4.18)$$

Последната формула е известна като втори закон на Кирхоф и е обект на разглеждане в теория на веригите.

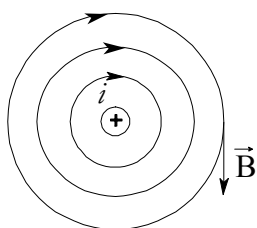
1.5. Магнитен поток. Принцип за непрекъснатост на магнитния поток. Намагнитеност. Интензитет. Закон за пълния ток

Под магнитен поток Φ се разбира потокът на вектора магнитна индукция $\vec{B}$ през повърхност S , т.е.:

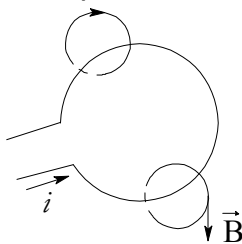
$$\Phi = \int_{(S)} \vec{B} \, d\vec{S}. \quad (1.5.1)$$

Линиите на магнитната индукция $\vec{B}$ се наричат магнитни силови линии. Съвкупността от тези линии дава картината на магнитното поле. От формула (1.5.1) може да се заключи, че магнитната индукция може да бъде разглеждана като плътност на магнитния поток Φ в дадена точка на полето.

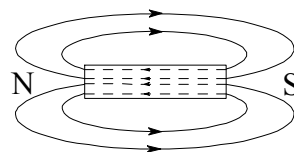
Експериментално може да се установи, че магнитните линии са непрекъснати линии. За илюстрация на фиг. 1.5.1 са показани линии на магнитното поле на праволинеен проводник с ток i , а на фиг. 1.5.2 - на затворен контур с ток i .



Фиг. 1.5.1



Фиг. 1.5.2



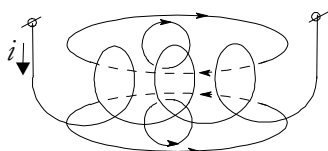
Фиг. 1.5.3

Непрекъснати са магнитните линии и при постоянните магнети. За илюстрация на фиг. 1.5.3 са показани линиите на магнитното поле на постоянен пръчковиден магнит. Линиите на полето вътре в магнита имат посока от южния към северния му полюс. Основание за приемане на такава посока на тези линии дават безуспешните опити чрез механично разделяне на магнита да бъдат отделени положителни и отрицателни магнитни заряди.

Въз основа на горните резултати може да бъде формулиран принципът за непрекъснатост на магнитния поток, т.е.:

$$\oint_{(S)} \vec{B} \, d\vec{S} = 0. \quad (1.5.2)$$

Този принцип гласи, че линиите на магнитната индукция са непрекъснати линии, т.е. нямат начало и нямат край. Оттук следва, че свободни магнитни заряди не съществуват. Въз основа на последното може да се направи заключението, че магнитното поле на постоянен пръчковиден магнит (фиг. 1.5.3) и на соленоид (фиг. 1.5.4) имат еднакъв характер.



Фиг. 1.5.4

Въз основа на принципа за непрекъснатостта на магнитния поток може да бъде записана следната формула:

$$\sum \Phi_k = 0. \quad (1.5.3)$$

Тази формула носи названието първи закон на Кирхоф

за магнитните вериги и е обект на разглеждане в теория на веригите.

По отношение на циркулацията на магнитната индукция $\vec{B}$ по затворен контур ℓ , вплетен с токов контур с произволна форма и с ток i , опитно се доказва, че независимо от формата на контура, тази циркулация е пропорционална на тока i , т.е.:

$$\oint_{(\ell)} \vec{B} d\vec{\ell} = \mu_0 i. \quad (1.5.4)$$

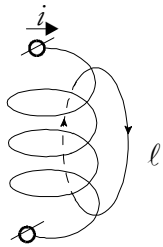
В случай, че интеграционният контур е вплетен с няколко токови контура, се записва:

$$\oint_{(\ell)} \vec{B} d\vec{\ell} = \mu_0 \sum i. \quad (1.5.5)$$

В последната формула $\sum i$ е алгебрична сума. В тази сума с положителен знак участва токовете, чиято посока е свързана с посоката на обход по контура ℓ по правилото на десния винт.

В случай на соленоид с w навивки и с ток i , ако контурът ℓ е вплетен с всички навивки, се записва:

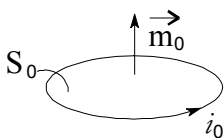
$$\oint_{(\ell)} \vec{B} d\vec{\ell} = \mu_0 w i. \quad (1.5.6)$$



Направеното дотук разглеждане за циркулацията на магнитната индукция се отнася за пустотата. Коефициентът на пропорционалност μ_0 във формули (1.5.4) и (1.5.5) има стойност $\mu_0 = 4\pi 10^{-7} [\text{H/m}]$ и се нарича абсолютна магнитна проницаемост на

Фиг. 1.5.5 пустотата.

Ако токовият контур се намира в близост до някакво вещество, то магнитното му поле се изменя. Това се дължи на влиянието на магнитното поле на елементарните токове, намиращи се вътре във веществото. Под елементарен ток се разбира движението на електрон по орбитата му.

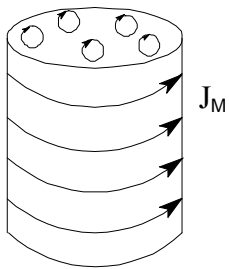


Фиг. 1.5.6

Отправна точка при разглеждане на магнитното поле във веществена среда е величината магнитен момент $\vec{m}_0$ на елементарен ток i_0 (фиг. 1.5.6). Тази величина се дава с изрази:

$$\vec{m}_0 = i_0 \vec{S}_0. \quad (1.5.6)$$

Векторът $\vec{S}_0$ в последната формула има големина, равна на площта S_0 , заградена от елементарния ток i_0 , а посоката му е свързана с посоката на тока i_0 по правилото на десния винт.



Фиг. 1.5.7

За дефиниране на величината намагнитеност $\vec{M}$ се разглежда тяло с форма на цилиндър (фиг. 1.5.7). Въвежда се магнитен момент $\vec{m}$ на тялото като геометрична сума на магнитните моменти на елементарните токове, т.е.:

$$\vec{m} = \sum \vec{m}_0. \quad (1.5.7)$$

При отсъствие на външно магнитно поле елементарните токове са разположени хаотично в обема на тялото и магнитният му момент $\vec{m} = \vec{0}$.

Ако тялото се постави във външно магнитно поле, елементарните токове се ориентират по линиите на полето и магнитният му момент $\vec{m} \neq 0$, т.е. тялото се намагнитва.

При еднородно намагнитено тяло степента на намагнитване $\vec{M}$, наречена намагнитеност, се определя по следния начин:

$$\vec{M} = \vec{m} / V. \quad (1.5.8)$$

При нееднородно намагнитено тяло за намагнитеността $\vec{M}$ се записва:

$$\vec{M} = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{\vec{m}}{V}. \quad (1.5.9)$$

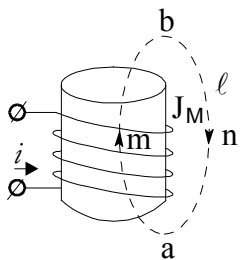
От последния израз може да се заключи, че намагнитеността $\vec{M}$ може да бъде разглеждана като обемна плътност на магнитните моменти.

Приема се, че цилиндричното тяло от фиг. 1.5.7 е еднородно намагнитено по оста си. В такъв случай повърхностите S_0 на елементарните токови контури са паралелни една на друга, т.е. магнитните моменти $\vec{m}_0$ са съпосочни. Освен това токовете са насочени противоположно един на друг вътре в обема на тялото и се компенсират. Некомпенсирани остават само токовете по повърхността му. Тяхното действие за дължина $d\vec{\ell}$ от тялото може да бъде заменено с действието на повърхностен ток i_{π} , който се определя чрез намагнитеността $\vec{M}$ по следния начин:

$$i_{\pi} = \vec{M} d\vec{\ell}. \quad (1.5.10)$$

За повърхностния ток J_{π} , отнасящ се за дължина ℓ , се записва:

$$J_{\pi} = \int_{(\ell)} \vec{M} d\vec{\ell}.$$



Фиг. 1.5.8

За дефиниране на величината интензитет $\vec{H}$ на магнитното поле се разглежда цилиндрично тяло, поставено вътре в соленоид, през който преминава ток i (фиг. 1.5.8). Под действието на магнитното поле на соленоида тялото се намагнитва, като магнитните моменти на елементарните му токове се ориентират по посока на полето на соленоида.

За циркулацията на магнитната индукция $\vec{B}$ по затворения контур ℓ , вплетен с навивките на соленоида и с повърхностния ток J_{π} , се записва:

$$\oint_{(\ell)} \vec{B} d\vec{\ell} = \mu_0 w i + \mu_0 J_{\pi}. \quad (1.5.12)$$

Тъй като за участъка anb на интеграционния контур ℓ отсъства повърхностен ток, токът J_{π} може да бъде определен по следния начин:

$$J_{\pi} = \int_{anb} \vec{M} d\vec{\ell} = \int_{(\ell)} \vec{M} d\vec{\ell}. \quad (1.5.13)$$

От уравнения (1.5.12) и (1.5.13) може да се достигне до формулата:

$$\oint_{(\ell)} (\vec{B}/\mu_0 - \vec{M}) d\vec{\ell} = \sum i. \quad (1.5.14)$$

В последната формула се въвежда величината $\vec{H}$ по следния начин:

$$\vec{H} = \vec{B}/\mu_0 - \vec{M}. \quad (1.5.15)$$

Величината $\vec{H}$ носи названието интензитет на магнитното поле. Чрез нея формула (1.5.14) добива вида:

$$\oint_{(\ell)} \vec{H} d\vec{\ell} = \sum i. \quad (1.5.16)$$

В общия случай формула (1.5.16) се записва по следния начин:

$$\oint_{(\ell)} \vec{H} d\vec{\ell} = \sum i. \quad (1.5.17)$$

и е известна под названието закон за пълния ток.

Намагнитеността $\vec{M}$ е пропорционална на интензитета $\vec{H}$ на магнитното поле.

В най-простия случай векторите $\vec{M}$ и $\vec{H}$ са колиниарни, т.е. зависимостта $\vec{M} = f(\vec{H})$ може да бъде представена във вида:

$$\vec{M} = \alpha_{\mu r} \vec{H}. \quad (1.5.18)$$

В последната формула коефициентът на пропорционалност $\alpha_{\mu r}$ се нарича относителна магнитна възприемчивост на средата.

В общия случай зависимостта се записва по следния начин :

$$\vec{M} = \hat{\alpha}_{\mu r} \vec{H}. \quad (1.5.19)$$

Във формулата (1.5.19) величината $\hat{\alpha}_{\mu r}$ е тензорна и векторите $\vec{M}$ и $\vec{H}$ могат да не бъдат колиниарни.

Въвежда се още и величината $\alpha_{\mu} = \mu_0 \alpha_{\mu r}$, която се нарича абсолютна магнитна възприемчивост на средата и има размерност [H/m].

Въз основа на формули (1.5.15) и (1.5.19) за връзката между векторите $\vec{B}$ и $\vec{M}$ може да се запише:

$$\vec{B} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{M}) = \mu_0 (1 + \alpha_{\mu r}) \vec{H} = \mu_0 \mu_r \vec{H} = \mu \vec{H}. \quad (1.5.20)$$

В последната формула величината $\mu = \mu_0 \mu_r$ се нарича абсолютна магнитна проницаемост на средата, а $\mu_r = 1 + \alpha_{\mu r}$ - относителна магнитна проницаемост на средата.

Размерността на намагнитеността $\vec{M}$ и на интензитета $\vec{H}$ на магнитното поле е [A/m].

Линейният интеграл от интензитета $\vec{H}$ на магнитното поле, по аналогия с електрическото поле, дефинира величина, наречена магнитно напрежение U_{μ} , т.е.:

$$u_{\mu ab} = \int_a^b \vec{H} d\vec{\ell}. \quad (1.5.21)$$

Размерността на магнитното напрежение U_μ е [A].

Съгласно закона за пълния ток магнитното поле е непотенциално, т.е.:

$$\oint_{(\ell)} \vec{H} d\vec{\ell} \neq 0. \quad (1.5.22)$$

При статични и стационарни магнитни полета могат да бъдат избрани области, в които отсъствуват проводници с ток. За тези области може да бъде записано:

$$\oint_{(\ell)} \vec{H} d\vec{\ell} = 0. \quad (1.5.23)$$

В такъв случай, аналогично, както при електрическото поле, може да бъде дефинирана величина, наречена магнитен потенциал, т.е.:

$$\varphi_{\mu a} = \int_a^{a_0} \vec{H} d\vec{\ell}. \quad (1.5.24)$$

В последната формула точката a_0 има нулев потенциал, т.е. $\varphi_{\mu a_0} = 0$.

За дефиниране на величината магнитно съпротивление се разглежда линейна и изотропна среда. За магнитното напрежение u_μ при интегриране по магнитна линия се записва:

$$u_\mu = \int_{(\ell)} \vec{H} d\vec{\ell} = \int_{(\ell)} H d\ell. \quad (1.5.25)$$

Приема се, че магнитното поле е равномерно и че магнитните линии са перпендикулярни на дадено напречно сечение S . В такъв случай след последователна замяна на интензитета H с магнитна индукция B , т.е. $H = B/\mu$ и на магнитната индукция B с магнитен поток Φ , т.е. $B = \Phi/S$, се достига до израза:

$$u_\mu = \int_{(\ell)} \frac{B}{\mu} d\ell = \int_{(\ell)} \frac{\Phi}{\mu S} d\ell = \Phi \int_{(\ell)} \frac{d\ell}{\mu S}. \quad (1.5.26)$$

Въвежда се величината магнитно съпротивление R_μ , т.е.:

$$R_\mu = \int_{(\ell)} \frac{d\ell}{\mu S}. \quad (1.5.27)$$

В случай на еднородна среда и постоянно напречно сечение S , може да се запише формула, аналогична на тази на електрическото съпротивление на проводник, т.е.:

$$R_\mu = \frac{\ell}{\mu S}. \quad (1.5.28)$$

Величината, реципрочна на магнитното съпротивление R_μ се нарича магнитна проводимост G_μ , т.е. $G_\mu = R_\mu^{-1}$.

Размерността на магнитното съпротивление R_μ е $[H^{-1}]$, а на магнитната проводимост - $[H]$.

Във формула (1.5.16) величината w_i се означава с F_μ , т.е. $F_\mu = w_i$ и по аналогия с електрическото поле се нарича магнитовъзбудително напрежение. Размерността на напрежението F_μ е [A].

Въз основа на закона за пълния ток (вж. формули (1.5.15) и (1.5.16)) може да се достигне до следната формула:

$$\sum F_{\mu} = \sum u_{\mu} = \sum R_{\mu} \Phi. \quad (1.5.29)$$

Последната формула е известна като втори закон на Кирхоф за магнитните вериги и е обект на разглеждане в теория на веригите.

1.6. Електромагнитна индукция. Самоиндукция. Взаимна индукция

Явлението електромагнитна индукция е открито през 1831 г. от Фарадей, който експериментално е установил основния закон, характеризиращ качествено това явление.

Законът за електромагнитната индукция има две формулировки: на Фарадей и на Максвел.

Отначало ще бъде разгледана формулировката на Максвел. Тя се отнася за затворен контур. Контурът може да бъде от проводник или диелектрик, или въображаем контур, разположен в каква да е среда. В този контур се индуцира ЕДН е на електромагнитната индукция, което е равно на скоростта на намаление на магнитния поток Φ , обхванат от контура, т.е.:

$$\epsilon = \oint_{(\ell)} \vec{E} d\vec{\ell} = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{\partial\Phi}{\partial t} + \oint_{(\ell)} (\vec{v} \times \vec{B}) d\vec{\ell}. \quad (1.6.1)$$

Величината $\vec{E}_{\ell} = \vec{v} \times \vec{B}$ носи названието индуциран интензитет на електрическото поле.

Първата съставка във формула (1.6.1) се нарича трансформаторна и се дължи на изменението на магнитния поток във времето, а втората съставка - генераторна и се свързва с движението на контура в магнитното поле.

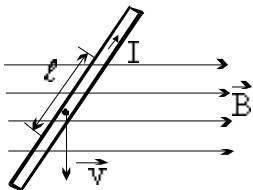
Втората съставка на ЕДН е на електромагнитната индукция може да бъде изразена и чрез магнитния поток Φ . За целта потокът Φ се разглежда като функция на времето t и на пространствените координати. Ако се приеме, че преместването на контура се извършва по направлението x , то $\Phi = \Phi(x, t)$. В такъв случай за ЕДН е се записва:

$$\epsilon = -\frac{\partial\Phi}{\partial t} - \frac{\partial\Phi}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} = -\frac{\partial\Phi}{\partial t} - \frac{\partial\Phi}{\partial x} \cdot v_x. \quad (1.6.2)$$

В последната формула с $v_x = dx/dt$ е означена скоростта на контура по направлението x .

При формулировката на Фарадей индуцирането на ЕДН е на електромагнитната индукция се свързва с пресичане на магнитните линии от контура. Ако с dN се обозначи броят на магнитните линии, пресечени от контура за време dt , за ЕДН е се записва:

$$\epsilon = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{dN}{dt}.$$



Фиг. 1.6.1

Тук следва да се отбележи, че формулировката на Фарадей има по-общ характер. Тя може да бъде приложена и за част от контур. В случай на праволинеен проводник с активна дължина ℓ (фиг. 1.6.1), движещ се със скорост $\vec{v}$ в магнитно поле с индукция $\vec{B}$, при положение, че векторите $\vec{v}$, $\vec{B}$ и $\vec{\ell}$ са взаимно перпендикулярни, ЕДН е се определя от

израза:

$$\epsilon = vB. \quad (1.6.4)$$

При сложни контури се въвежда величината пълен магнитен поток Ψ . Например, при соленоид, ако се приеме, че всички магнитни линии са свързани с

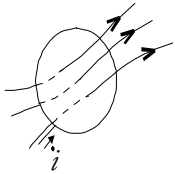
всичките навивки w на соленоида, за потока Ψ се записва:

$$\Psi = w \Phi. \quad (1.6.5)$$

Във формула (1.6.5) с Φ е означен магнитният поток, свързан с една навивка на соленоида.

За разглеждания случай ЕДН е на електромагнитната индукция се определя по следния начин:

$$e = -\frac{dN}{dt} = -\frac{d\Psi}{dt} = -w \frac{d\Phi}{dt}. \quad (1.6.6)$$



Фиг. 1.6.2

За изясняване на явлениято самоиндукция се разглежда уединен токов контур, през който преминава ток i (фиг. 1.6.2). Магнитният поток, свързан с контура, се нарича поток на самоиндукцията Ψ_L . Потокът Ψ_L е пропорционален на тока i , т.е.:

$$\Psi_L = Li. \quad (1.6.7)$$

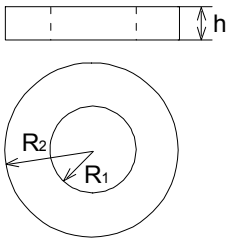
Коефициентът на пропорционалност L във формула (1.6.7) се нарича собствена индуктивност, самоиндуктивност или просто индуктивност и се разглежда като параметър на контура. Този параметър зависи от геометричните размери и формата на контура g (под g се разбират обобщени координати), и от магнитната проницаемост μ на средата, т.е. $L = f(g, \vec{M})$. В случай на еднородна среда $\mu = \text{const}$ и $L = f(g)$.

По-долу се дават някои формули за пресмятане на индуктивности. Например, индуктивността L на праволинеен цилиндричен проводник с дължина ℓ , радиус r и магнитна проницаемост μ , разположен в среда с магнитна проницаемост μ_0 , може да бъде изчислена по формулата:

$$L = \frac{\mu \ell}{8\pi} + \frac{\mu_0 \ell}{2\pi} \ln \frac{R}{r}. \quad (1.6.8)$$

Първата съставка във формула (1.6.8) носи названието вътрешна индуктивност, а втората - външна индуктивност, тъй като се отнася за $R > r$.

Индуктивността L на бобината с w навивки, навити равномерно върху тороидната сърцевина с радиуси R_1 и R_2 , височина h (фиг. 1.6.3) и магнитна проницаемост μ се определя от изрази:



Фиг. 1.6.3

$$L = (w^2 \mu h / 2\pi) \ln(R_2/R_1). \quad (1.6.9)$$

Индуктивността L на коаксиален кабел с радиус на жилото r_1 , вътрешен радиус на обвивката r_2 (вж. фиг. 1.4.3), дължина на кабела ℓ и магнитна проницаемост μ на изолацията, се пресмята по формулата:

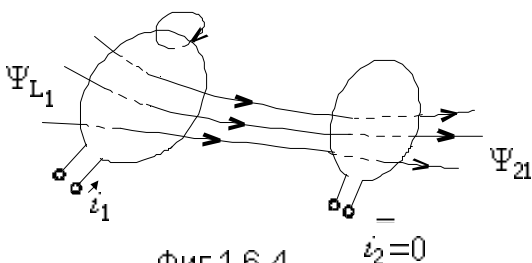
$$L = \mu \ln(r_2/r_1) / 2\pi. \quad (1.6.10)$$

Ако магнитният поток на самоиндукция Ψ_L се изменя, то в контура се индутира ЕДН на самоиндукция e_L , което в общия случай се дава с изрази:

$$e_L = -\frac{d\Psi_L}{dt} = -L \frac{di}{dt} - i \frac{dL}{dt}. \quad (1.6.11)$$

Ако индуктивността $L = \text{const}$, то за ЕДН e_L се записва:

$$e_L = -L \frac{di}{dt}. \quad (1.6.12)$$



Фиг. 1.6.4

За изясняване на явлениято взаимноиндукция се разглеждат два токови контура, разположени в близост един до друг (фиг. 1.6.4). Приема се, че ток преминава само в първия контур. Част от потока на

самоиндукция Ψ_{L_1} на първия контур се свързва с втория контур. Този поток се означава с Ψ_{21} и се нарича поток на взаимната индукция. Първият индекс на потока Ψ_{21} означава за кой контур се отнася, а втория индекс - от тока на който контур се създава. Потокът Ψ_{21} на взаимната индукция е пропорционален на тока i_1 , т.е.:

$$\Psi_{21} = M_{21} i_1. \quad (1.6.14)$$

Коефициентът на пропорционалност M_{21} в последната формула се нарича взаимна индуктивност и се разглежда като параметър на двата контура. Този параметър, както и параметърът L , зависи от геометричните размери и формата на контурите и от взаимното им разположение g , а също така и от магнитната проницаемост μ на средата, т.е. $M_{21} = f(g, \mu)$. В случай на еднородна среда $\mu = \text{const}$ и $M_{21} = f(g)$.

За взаимната индуктивност може да бъде записано равенството:

$$M_{21} = M_{12} = M. \quad (1.6.15)$$

което е известно като принцип на магнитната взаимност.

Ако магнитният поток на взаимната индукция Ψ_{21} се изменя, то в контура, свързан с този поток, се индутира ЕДН на взаимната индукция e_{21} , което в общия случай се определя по формулата:

$$e_{21} = -\frac{d\Psi_{21}}{dt} = -M_{21} \frac{di_1}{dt} - i_1 \frac{dM_{21}}{dt}. \quad (1.6.16)$$

Ако взаимната индуктивност $M_{21} = \text{const}$, то ЕДН e_{21} се дава с изрази:

$$e_{21} = -M_{21} \frac{di_1}{dt}. \quad (1.6.17)$$

В изразите за ЕДН на електромагнитната индукция, в частност на самоиндукция и на взаимна индукция, участва отрицателен знак. Този знак означава, че индутираните ЕДН предизвикват токове, противопоставящи се на изменението на магнитния поток. Тази постановка изразява принципа на електромагнитната инертност, известен като принцип на Ленц.

1.7. Електрическа енергия и сили

От 1.1 е известно, че електрическото поле въздейства на заредени частици и тела. Това означава, че полето извършва работа за преместване на частиците и телата, т.е. е носител на определена енергия.

За определяне на енергията на електрическото поле се разглежда система заредени тела. Доказва се, че тази система е носител на електрическа енергия W_e , която се определя по формулата:

$$W_e = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \varphi_k \cdot q_k. \quad (1.7.1)$$

В горната формула φ_k и q_k са съответно потенциалът и зарядът на тялото с номер k .

Ако се разглежда система от две тела със заряди q_1 и q_2 като $q_1 = -q_2 = q$, т.е. кондензатор, то от формула (1.7.1), може да се получи:

$$W_e = \frac{1}{2} (\varphi_1 - \varphi_2) \cdot q = \frac{1}{2} u_{12} \cdot q, \quad (1.7.2)$$

където u_{12} е напрежението на кондензатора.

Като се използва връзката между заряд и напрежение $q = C \cdot u_{12}$, енергията W_e може да бъде изразена по следния начин:

$$W_e = \frac{1}{2} C u_{12}^2. \quad (1.7.3)$$

В последната формула C е капацитетът на кондензатора.

Електрическата енергия W_e на системата заредени тела може да бъде разглеждана като енергия на електрическото поле, обкръжаващо системата заредени тела. При такава постановка енергията W_e може да бъде изразена чрез обемната си плътност w_e по формулата:

$$W_e = \int_{(V)} w_e dV. \quad (1.7.4)$$

Доказва се, че обемната плътност w_e може да бъде определена чрез електрическото разместване $\vec{D}$ и интензитета $\vec{E}$ на електрическото поле от израза:

$$w_e = \frac{1}{2} \vec{D} \vec{E}. \quad (1.7.5)$$

За определяне на силите в електрическото поле отново се разглежда системата от заредени тела. Приема се, че всички тела с изключение на k^{TO} са неподвижни. Под действието на електрическото поле на системата k^{TO} тяло ще се премества. При това ще се изменя някаква негова геометрична координата g . Координатите g се разглеждат като обобщени, съответно и електрическите сили се разглеждат като обобщени. Координатата g може да бъде линейно преместване, ъгъл на завъртане, повърхност или обем. В такъв случай силата, водеща до промяна на координатата g ще бъде респективно: механична сила, момент на двойка сили, повърхностно напрежение или налягане.

Нека в резултат на взаимодействието на k^{TO} тяло с останалите заредени тела то се е преместило, като се е изменила координатата a . $C da$ се означава елементарното преместване. Предполага се, че при преместването отсъствуват енергийни загуби. При такава постановка енергията, отдавана от външните енергийни източници, ще се изразходва за увеличаване на енергията dW_e на системата и за компенсиране на работата за преместването на тялото k , т.е.:

$$\sum_{k=1}^n \phi_k dq_k = dW_e + f_e da. \quad (1.7.6)$$

Последната формула се разглежда при следните два случая: 1) $q_k = \text{const}$ и 2) $\phi_k = \text{const}$.

При случая $q_k = \text{const}$ външните енергийни източници не са включени. Тъй като $dq_k = 0$, то от формула (1.7.6) за електрическата сила f_e се получава:

$$f_e = - \left(\frac{dW_e}{da} \right)_{q_k = \text{const}}. \quad (1.7.7)$$

При случая $\phi_k = \text{const}$ системата заредени тела е включена към външните енергийни източници, като се има предвид, че $(dW_e)_{\phi_k = \text{const}} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \phi_k dq_k$, то от формула (1.7.6) за електрическата сила f_e се достига до следния израз:

$$f_e = \left(\frac{dW_e}{da} \right)_{\phi_k = \text{const}}. \quad (1.7.8)$$

Тук трябва да се отбележи, че двата израза (1.7.7) и (1.7.8) за силата f_e са равностойни, т.е. може да бъде записана:

$$f_e = - \left(\frac{dW_e}{da} \right)_{q_k = \text{const}} = \left(\frac{dW_e}{da} \right)_{\phi_k = \text{const}} . \quad (1.7.9)$$

1.8. Магнитна енергия и сили

За определяне на енергията W_M на магнитното поле се разглежда система от токови контури. Доказва се, че тази система е носител на енергия, която се определя по формулата:

$$W_M = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \Psi_k i_k . \quad (1.8.1)$$

където Ψ_k и i_k са пълният магнитен поток и съответно токът на k -тия контур.

В случай на уединен токов контур, за енергията W_M на магнитното му поле се записва:

$$W_M = \frac{1}{2} \Psi_L i = \frac{1}{2} L i^2 . \quad (1.8.2)$$

В последната формула Ψ_L е магнитният поток на самоиндукция, i - токът, а L - индуктивността на контура.

При два токови контура с токове i_1 и i_2 , индуктивности L_1 и L_2 и взаимна индуктивност $M_{12} = M_{21} = M$ енергията W_M на магнитното поле се определя по формулата:

$$W_M = \frac{1}{2} L_1 i_1^2 + \frac{1}{2} L_2 i_2^2 + M i_1 i_2 . \quad (1.8.3)$$

Магнитната енергия W_M на системата токови контури може да бъде разглеждана като енергия на магнитното поле, обкръжаващо контурите. При такава постановка енергията W_M , както и енергията W_e , може да бъде изразена чрез обемната си плътност w_M , т.е. :

$$W_M = \int_{(V)} w_M dV . \quad (1.8.4)$$

Доказва се, че обемната плътност w_M може да бъде определена чрез магнитната индукция $\vec{B}$ и интензитета $\vec{H}$ на магнитното поле по формулата:

$$w_M = \frac{1}{2} \vec{B} \cdot \vec{H} . \quad (1.8.5)$$

За определяне на силите в магнитното поле отново се разглежда системата от токови контури. Приема се, че всички контури с изключение на k -тия са неподвижни. Под действието на магнитното поле на системата k -тия контур ще се премества.

Нека в резултат на взаимодействието на k -тия контур с останалите токови контури той се е преместил, като се е изменила координатата a . С da се означава елементарното преместване. Приема се, че в обкръжаващата контурите среда отсъствуват енергийни загуби.

Ако се изключат загубите в съпротивленията на контурите или се приеме, че те са свръхпроводими, то може да се достигне до следното равенство:

$$\sum_{k=1}^n i_k \cdot d\Psi_k = dW_M + f_M \cdot da . \quad (1.8.6)$$

Това равенство показва, че енергията на външните източници, свързана с изменението на магнитните потоци $d\Psi_k$ на контурите, се изразходва за изменение на енергията dW_M на магнитното поле и за извършване на работа.

Формула (1.8.6) се разглежда при следните два случая: 1) $\Psi_K = \text{const}$ и 2) $i_K = \text{const}$.

При случая $\Psi_K = \text{const}$ външните енергийни източници не отдават енергия на контурите, свързана с изменение на магнитните им потоци. Ако контурите са свръхпроводими отпада необходимостта от тези източници. Тъй като $d\Psi_K = 0$, то от формула (1.8.6) за магнитната сила f_M се получава:

$$f_M = - \left(\frac{dW_M}{da} \right)_{\Psi_K = \text{const}}. \quad (1.8.7)$$

При случая $i_K = \text{const}$ магнитните потоци Ψ_K ще се променят. Като се има предвид, че $\left(dW_M \right)_{i_K = \text{const}} = \frac{1}{2} \sum_{K=1}^n i_K d\Psi_K$, то от формула (1.8.6) за магнитната сила f_M се достига до следния израз:

$$f_M = \left(\frac{dW_M}{da} \right)_{i_K = \text{const}}. \quad (1.8.8)$$

Тук трябва да се отбележи, че двата израза (1.8.7) и (1.8.8) за силата f_M , аналогично както съответните израза за силата f_e са равностойни, т.е. може да бъде записано:

$$f_M = - \left(\frac{dW_M}{da} \right)_{\Psi_K = \text{const}} = \left(\frac{dW_M}{da} \right)_{i_K = \text{const}}. \quad (1.8.9)$$

II. ЕЛЕКТРИЧЕСКИ И МАГНИТНИ ВЕРИГИ. ОСНОВНИ ПОНЯТИЯ И ЗАКОНИ

Встъпителни бележки

В раздела се дефинират такива основни понятия за електрически и магнитни вериги като схема, клон, възел, контур и др. Дават се основните закони и се разглеждат основните пасивни и активни елементи на веригите. Разглеждат се също основните положения на схемните графи и на структурните матрици.

2.1. Електрически вериги – въведение. Класификации. Основни задачи на изследването

Електрическата верига е устройство или съвкупност от устройства, предназначени за съсредоточено преобразуване, разпределение и пренасяне на електромагнитна енергия или информация чрез посредничеството на електрически ток, в която електромагнитните процеси е допустимо и целесъобразно да бъдат описани с използването на интегралните величини ток, напрежение и електродвижещо напрежение (ЕДН).

Основни елементи на електрическите вериги са: източници, консуматори и свързващите ги проводници, както и устройствата за преобразуване на електромагнитна енергия.

Теоретичното и експерименталното изследване на процесите при електрическите вериги се извършва на базата на интегралните величини на полето като електрически ток i , електродвижещо напрежение e , електрическо напрежение u , магнитен поток Φ , електрически заряд q , както и на параметрите на електрическата верига съпротивление R , индуктивност L , взаимна индуктивност M , капацитет C и др. Тези параметри представляват интеграционни оценки на физичните и геометрични характеристики на средата, в която се разпространява свързаното с електрическата верига електромагнитно поле.

Използването на интегрални величини и параметри при изследването на електрическите вериги опростява в повечето случаи съществено аналитичния апарат.

Известни са няколко класификации на електрическите вериги:

- I класификация – според тази класификация електрическите вериги биват вериги със съсредоточени параметри и вериги с разпределени параметри

Когато се допуска, че енергийните процеси в електрическите вериги са съсредоточени в краен брой елементи, с краен брой параметри, и то в определени участъци, електрическата верига в този случай се класифицира като верига със съсредоточени параметри. Процесите в тези вериги се описват със системи диференциални уравнения с обикновени производни и в частен случай – със система алгебрични уравнения.

Когато разпределението на параметрите на електрическата верига е непрекъснато по цялата структура на веригата, то тогава електрическата верига се класифицира като верига с разпределени параметри. В тези вериги процесите се описват със системи диференциални уравнения с частни производни.

- II класификация – според тази класификация електрическите вериги биват постояннотокови и променливотокови.

В постояннотоковите вериги процесите са възможно най-прости. В тези вериги преминават само токове на проводимост. Те са изградени само от резистори и източници. Ако в такива верига се включи кондензатор, то той би имал проводимост, равна на нула (той ще прекъсва веригата в този участък, тъй като през него може да преминава само ток на раз местване, а в случая този ток е равен на нула). Ако във веригата се включи бобина, то тя ще има нула съпротивление, т.е. безкрайно голяма проводимост. В бобината няма да се индутира ЕДН на самоиндукция, тъй като

преминалият през нея постоянен ток ще създава постоянен магнитен поток.

Променливотоковите вериги се изграждат от резистори, бобини, кондензатори и източници. В тях процесите са значително по-сложни. В тези вериги преминават токове на проводимост и разместване, индукират се ЕДН на самоиндукция.

- III класификация – според тази класификация електрическите вериги биват линейни и нелинейни.

В най-общия случай процесите в електрическите вериги имат нелинеен характер и се описват със система нелинейни уравнения.

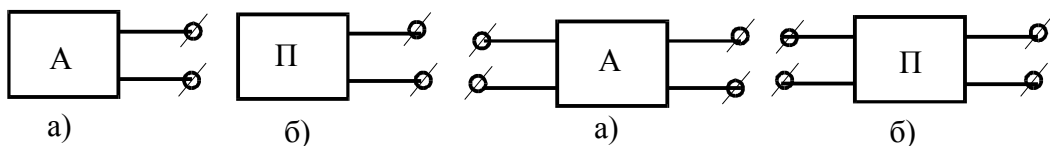
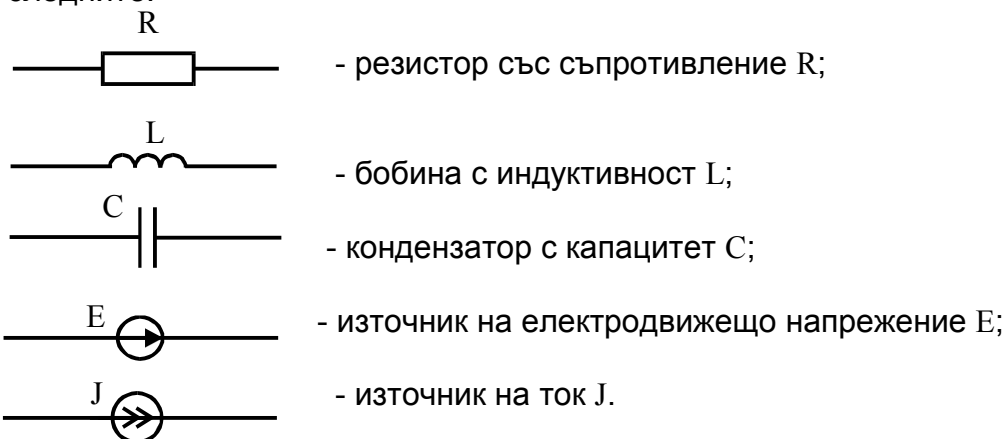
Електрически вериги, в които е допустимо процесите да бъдат описани достатъчно точно със системи линейни уравнения, се наричат линейни. В противен случай веригите се класифицират като нелинейни.

Освен разгледаните по-горе три класификации на електрическите вериги са възможни и други класификации. Например, класификации в зависимост от броя на участващите елементи и връзките, които съществуват между тях. Тогава веригите могат да се разглеждат като прости и сложни, като вериги с неразклонени и с разклонени структури и др.

При съставянето на уравненията, които описват процесите в електрическите вериги, се използва опростени условни техни изображения, които се наричат схеми на електрическите вериги.

Схемата на електрическата верига е графичен образ на тази верига, който показва последователността на свързването на участъците ѝ и изобразява свойствата ѝ.

Условните означения на елементите на линейните електрическите вериги са следните:



Фиг.2.1.1

Фиг.2.1.2

На фиг. 2.1.1 са показани условните означения на активен (фиг. 2.1.1а) и пасивен (фиг. 2.1.1б) двуполусник. Двуполусникът е част от верига с два извода (полюса, клеми).

На фиг. 2.1.2 са дадени съответно условните означения на активен (фиг. 2.1.1а) и пасивен (фиг. 2.1.1б) четириполусник. Четириполусникът е част от верига с четири извода (полюса, клеми).

Основната геометрична структура на схемата на електрическата верига се определя от клоновете и възлите ѝ.

Клон на електрическата верига – това е такъв участък от веригата, в който в произволен момент токът по цялото му протежение има една и съща стойност.

Възел на електрическата верига - това е точка, в която се свързват три или повече клона.

Клоновете на веригата могат да се свързват по различен начин:

- последователно съединение – при това съединение токът във всички участъци (клонове) е един и същ;
- паралелно съединение – при това съединение два или повече клона (участъка) се свързват към два възела и всеки от тях е подложен на едно и също напрежение;
- смесено съединение – среща се последователно и паралелно съединение на клоновете (участъци).

Затворен контур – това е затворен път, който преминава по няколко неповтарящи се клона. Контурът може да бъде съставен само от един клон. В този случай се нарича примка (брънка).

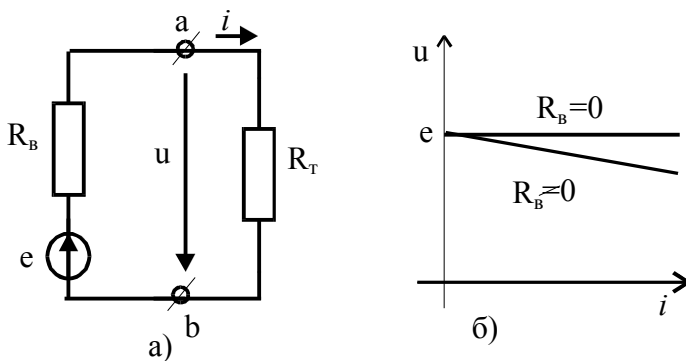
Основните задачи при изследването на електрическите вериги са две:

- задача на анализа – В този случай е известна конфигурацията на веригата (вид на елементите ѝ и начин на свързването им), и параметрите на елементите ѝ. Търси се разпределението на токовете и напреженията в участъците на веригата. Решението е еднозначно, т.е. има едно единствено разпределение на токовете и напреженията в участъците на веригата.

- задача на синтеза – В случая е известно разпределението на токовете и напреженията. Търси се конфигурация на верига и параметри на елементите ѝ, които да осигурят това разпределение. Решението не е еднозначно.

2.2. Източници на електродвижещо напрежение и източници на ток. Условие за еквивалентност

Източникът на ЕДН това е такъв източник на електрическа енергия, напрежението на изводите на който не зависи или съвсем слабо зависи от преминаващия през него ток.



Фиг.2.2.1

На фиг. 2.2.1а) е показана схемата на реален източник на ЕДН, към който е включен товар R_T . С R_B е означено вътрешното съпротивление на източника, а с e – електродвижещото му напрежение. Връзката между напрежението u на изводите на източника на ЕДН и на тока му i се дава с уравнението:

$$u = e - R_B i, \quad (2.2.1)$$

което се нарича външна характеристика ($u = f(i)$) на източника

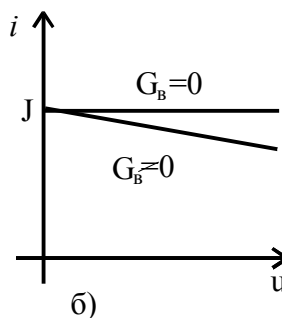
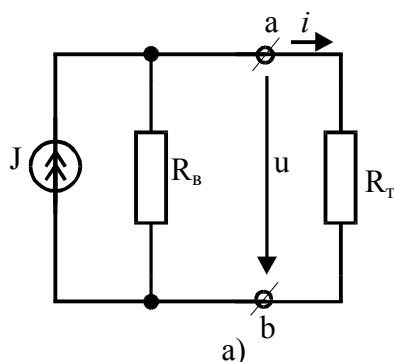
на ЕДН. Зависимостта $u = f(i)$ е изобразена графично на фиг. 2.2.1б). Ако вътрешното съпротивление на източника $R_B = 0$, то източникът се нарича идеален. При него напрежението му $u = e$ и не зависи от тока му i . Ако $R_B \neq 0$, то външната характеристика $u = u(i)$ е падаща и източникът се нарича реален.

Примери за източници на електрическа енергия, които могат да бъдат разглеждани като източници на ЕДН са химическите токоизточници (гальваничните елементи, акумулатори и др.), постояннотоковите машинни генератори и др.

Източникът на ток - това е такъв източник на електрическа енергия, при който отдаваният ток i не зависи или практически не зависи от напрежението на изводите му. На фиг. 2.2.2а) и съответно фиг. 2.2.2б) са дадени схемата и външната характеристика $i = f(u)$ на реален източник на ток. Зависимостта $i = f(u)$ аналитично се изразява с уравнението:

$$i = J - G_B \cdot u. \quad (2.2.2)$$

Ако вътрешната проводимост G_B на източника на ток J е $G_B = 0$, то токът му $i = J$ и не зависи от напрежението на изходите му u . Такъв източник се нарича идеален.



Фиг.2.2.2

Ако $G_B \neq 0$, то характеристиката $i = i(u)$ на източника е падаща и тогава източникът се нарича реален.

Като примери за източници на ток могат да бъдат разглеждани различни електронни устройства, при които се поддържа определена стойност на тока. Източници на ток се използват

например при заместващите електрически схеми на транзисторите.

Всеки реален източник на ЕДН може да бъде заменен с еквивалентен реален източник на ток, ако при замяната остават непроменени напрежението u и токът i във външната верига (товара R_T). Това условие се спазва при следните съотношения между параметрите на двата вида източници на електрическа енергия:

$$J = e/R_B \text{ и } G_B = R_B^{-1}; \quad (2.2.3)$$

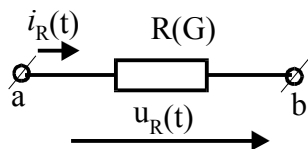
$$e = J/G_B \text{ и } R_B = G_B^{-1}. \quad (2.2.4)$$

Формулите (2.2.3) се използват при замяна на източник на ЕДН с еквивалентен източник на ток J , а формули (2.2.4) – при обратна замяна.

2.3. Пасивни елементи на линейните електрически вериги със съсредоточени параметри

Резистор

Резисторът представлява идеализиран приемник на енергия. Условното му изображение е показано на фиг. 2.3.1. В схемата на електрическата верига резисторът отразява превръщането на електрическа енергия в полезна работа или загуби (дисипация или разсейване на енергия).



Фиг.2.3.1

Резисторът се характеризира с параметрите: активно съпротивление R или активна проводимост $G = R^{-1}$.

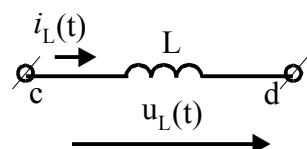
Напрежението $u_R(t)$ върху резистора се определя посредством съпротивлението му R и токът $i_R(t)$, преминаващ през него, въз основа на закона на Ом:

$$u_R(t) = R \cdot i_R(t). \quad (2.3.1)$$

Условните посоки на $i_R(t)$ и $u_R(t)$ са еднакви и това е показано на фиг. 2.3.1.

Индуктивен елемент

Индуктивният елемент (фиг. 2.3.2) представлява идеализирана бобина – приемник на енергия, чрез който в схемите на електрическите вериги се отразява наличието на магнитно поле.



Фиг.2.3.2

Основният параметър на индуктивния елемент е индуктивността L :

$$L = \Psi_L(t) / i_L(t), \quad (2.3.2)$$

където $\Psi_L(t)$ и $i_L(t)$ са съответно потокът на самоиндукция и токът, който го създава.

При променлив поток на самоиндукция $\Psi_L(t)$ върху бобината се получава пад на напрежение от изменението на този поток, който съгласно закона на

електромагнитната индукция се дава със следното уравнение:

$$u_L(t) = \frac{d\Psi_L(t)}{dt} = L \frac{di_L}{dt} \quad (\text{при } L = \text{const}). \quad (2.3.3)$$

От горното уравнение чрез интегриране се получава:

$$i_L(t) = \frac{1}{L} \int_0^t u_L(t) dt + i_L(0). \quad (2.3.4)$$

Условните положителни посоки на $i_L(t)$ и $u_L(t)$ съвпадат и са въведени съгласно правилото за съответствие при приемниците на енергия.

Капацитивен елемент

Капацитивният елемент (фиг. 2.3.3) представлява идеализиран кондензатор – приемник на енергия, чрез който в схемите на електрическите вериги се отразява наличието на електрическо поле. Основният параметър на капацитивния елемент е капацитетът му C :

$$C = q_C(t)/u_C(t),$$

където $q_C(t)$ е електрическият заряд, свързан с капацитивния елемент (с един от електродите на кондензатора), а $u_C(t)$ – напрежението между електродите му. При линейните кондензатори $C = \text{const}$.

При променливо напрежение $u_C(t)$ върху кондензатора през клоната на капацитивния елемент преминава ток $i_C(t)$:

$$i_C(t) = \frac{dq_C(t)}{dt} = C \frac{du_C}{dt} \quad (\text{при } C = \text{const}). \quad (2.3.6)$$

Чрез интегриране се намира:

$$u_C(t) = \frac{1}{C} \int_0^t i_C(t) dt + u_C(0). \quad (2.3.7)$$

Условните посоки на $u_C(t)$ и $i_C(t)$ съвпадат и се въвеждат съгласно правилата за приемници на енергия.

Взаимноиндуктивен четириполъстен елемент

Този елемент представлява условно четириполъстно изображение (фиг. 2.3.4) на част от електрическата верига, в която се извършва предаване на електромагнитна енергия без електрическа връзка. Това предаване се осъществява при посредничеството на магнитното поле, отразено чрез индуктивните елементи L_1 и L_2 и при наличие на явлението взаимна индукция.

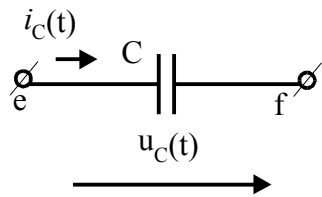
Взаимноиндуктивният четириполъстен елемент се характеризира както с индуктивностите L_1 и L_2 на индуктивните елементи, така и с параметрите на взаимната индукция $M_{12} = M_{21} = M$.

Напреженията $u_1(t)$ и $u_2(t)$ на двете двойки изводи на взаимноиндуктивния четириполъстен елемент се изразяват с уравненията:

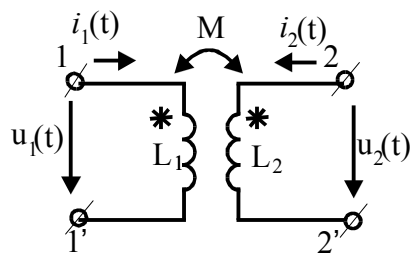
$$u_1(t) = \frac{d\Psi_1(t)}{dt} = L_1 \frac{di_1}{dt} \pm M_{12} \frac{di_2}{dt} = u_{L_1}(t) + u_{M_{12}}(t); \quad (2.3.9)$$

$$u_2(t) = \frac{d\Psi_2(t)}{dt} = L_2 \frac{di_2}{dt} \pm M_{21} \frac{di_1}{dt} = u_{L_2}(t) + u_{M_{21}}(t). \quad (2.3.10)$$

Посоката на тока $i_1(t)$ през индуктивния елемент L_1 спрямо фиксирания му край, означен на фиг. 2.3.4, със звездичка – (*), определя посоката на взаимноиндуктивното напрежение $u_{M_{21}}$ в индуктивния елемент L_2 спрямо



Фиг.2.3.3



Фиг.2.3.4

фиксирания край на L_2 означен на фиг. 2.3.4 също със звездичка (ζ). Тези краища на бобините L_1 и L_2 е прието да се наричат едноименни изводи. Посоката на напрежението $u_{M_{21}}$ се сравнява с посоката на обхождане на контура за определяне на напрежението $u_2(t)$. Ако двете посоки съвпадат, то знакът на $u_{M_{21}}$ в уравнението за $u_2(t)$ е положителен, а в противния случай – отрицателен.

2.4. Линейни електрически вериги. Основни закони. Баланс на мощностите

1. Встъпителни бележки

Основните закони, както и балансът на мощностите е целесъобразно да бъдат дадени при линейните електрически вериги за постоянен ток, а след това да бъдат обобщени при веригите за променлив ток. Това облекчава разглеждането.

Електрическа верига за постоянен ток е такава електрическа верига, в която производството на електрическа енергия в източниците, предаването и преобразуването ѝ се извършват при постоянни във времето ЕДН, токове и напрежения.

При веригите за постоянен ток магнитните полета са постоянни и не се индуцира ЕДН на самоиндукция и взаимноиндукция от изменящите се във времето магнитни потоци. Освен това отсъствуват токове на разместването и през кондензаторите не преминава ток. Ето защо тези вериги съдържат само резистори и постоянни източници на ЕДН и на ток.

При тях при установен режим участъците с бобини се разглеждат като късо съединени, а участъците с кондензатори – като отворени.

2. Основи закони

А. Закони на Кирхоф

Първи закон на Кирхоф – Гласи следното:

Алгебричната сума от всички токове I_K , за даден възел на електрическа верига е равна на нула, т. е.:

$$\sum_{k=1}^n I_K = 0. \quad (2.4.1)$$

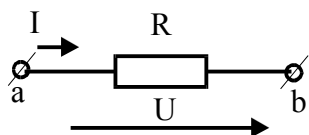
Прието е излизащите от възела токове да участвуват в алгебричната сума със знак (+), а влизащите – със знак (-) (вж.1.3).

Втори закон на Кирхоф – Гласи следното:

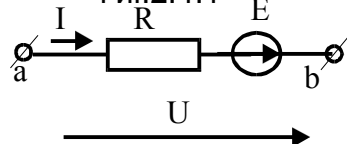
Алгебричната сума от електродвижещите напрежения E_K в даден затворен контур на електрическа верига е равна на алгебричната сума от падовете на напрежение $U_K = R_K I_K$ върху участъците на този контур, т. е.:

$$\sum_{k=1}^n E_K = \sum_{k=1}^n U_K = \sum_{k=1}^n R_K I_K. \quad (2.4.2)$$

Съответното електродвижещо напрежение E_K , или пад на напрежение $R_K I_K$ участвуват в алгебричната сума със знак (+), ако посоката на E_K , респективно на I_K , съвпада с условната положителна посока на обхождане на контура и със знак (-) – в противния случай.



Фиг.2.4.1



Фиг.2.4.2

Б. Закон на Ом

Законът на Ом има следните модификации:

1) Законът на Ом за пасивен участък (фиг. 2.4.1) математически се изразява с равенството:

$$I = U/R, \quad (2.4.3)$$

където $U = \varphi_a - \varphi_b$ е потенциалната разлика в краищата на клоната със съпротивление R , а I е токът, преминаващ през клоната в резултат на тази потенциална разлика.

2) Законът на Ом за активен участък (фиг. 2.4.2)

(обобщен закон на Ом) се записва така:

$$I = (\varphi_a - \varphi_b + E)/R. \quad (2.4.4)$$

Знакът на ЕДН E във формула (2.4.4) е положителен, ако посоката му съвпада с посоката на тока I през клона ab .

3) Законът на Ом за затворена едноконтурна верига (фиг. 2.4.3) се дава с уравнението:

$$I = E/(R_B + R_T). \quad (2.4.5)$$

Знакът на ЕДН E във формула (2.4.5) е (+), ако посоката му съвпада с посоката на тока I и (-) – в противния случай.

В. Закон на Джаул-Ленц

Ако през клон с потенциална разлика и за време dt , преминава ток $i = dq/dt$, се извършва работа dA , която се дава с израза:

$$dA = u \cdot dq, \quad (2.4.6)$$

където dq е пренесения през клона заряд за време dt .

Тогава мощността, която се разсейва в клона във вид на топлина е равна на :

$$P = dA/dt = u \cdot i, \quad (2.4.7)$$

т.е. активната мощност в клона със съпротивление R е:

$$P = RI^2. \quad (2.4.8)$$

Уравнение (2.4.8) е математическият израз на закона на Джаул-Ленц.

3. Баланс на мощностите

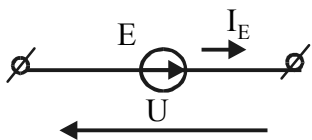
Балансът на мощностите се изразява с уравнението:

$$\sum P_{\text{изт.}} = \sum P_{\text{конс.}}, \quad (2.4.9)$$

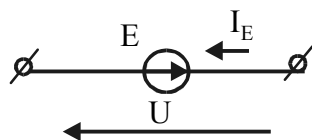
Сумата от мощността на $\sum P_{\text{изт.}}$ на източниците на електрическа енергия в една затворена верига е равна на сумата от мощността $\sum P_{\text{конс.}}$.

Уравнение (2.4.9) може да се запише и във вида:

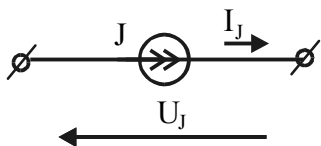
$$\sum P_E + \sum P_J = \sum RI^2. \quad (2.4.10)$$



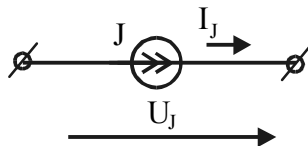
Фиг.2.4.4



Фиг.2.4.5



Фиг.2.4.6



Фиг.2.4.7

В уравнение (2.4.10) $\sum P_E = \sum EI_E$ е мощността на източниците на ЕДН E . Ако посоките на величините E и I_E съвпадат (фиг. 2.4.4), $P_E > 0$, а в противен случай (фиг. 2.4.5) – $P_E < 0$.

В уравнение (2.4.10) $\sum P_J = \sum JU_J$ е мощността на източниците на ток J с напрежение U_J . Ако посоките на величините U_J и J са различни (фиг. 2.4.6), $P_J > 0$, а в противен случай (фиг. 2.4.7) – $P_J < 0$.

В уравнение (2.4.10) $\sum RI^2$ е сумарната мощност, изразходвана в консуматорите R и тя винаги е положителна.

Напрежението U_J на който да е източник на ток J се определя чрез пресмятането на веригата, външна по отношение на изводите на източника на ток. За целта се съставя уравнение по втория закон на Кирхоф.

При съставянето на уравнението на баланса на мощностите за дадена електрическа верига трябва да се има в предвид следното:

1. Посоките на напрежението и тока за даден пасивен елемент на веригата

трябва да съвпадат. При такава постановка съответната на елемента съставка в $\sum P_{\text{конс.}}$ (вж. Формула (2.4.9)) ще бъде положителна.

2. Посоките на напрежението и тока за даден активен елемент (източник на ЕДН или на ток) на веригата трябва да бъдат различни. При такава постановка съответната на елемента съставка в $\sum P_{\text{изт.}}$ (вж. формула (2.4.9)) ще бъде положителна.

2.5. Магнитни вериги - основни понятия и закони

1. Общи сведения

Магнитна верига се нарича устройство или съвкупност от устройства, съдържащи феромагнитни материали, образуващи затворен контур, в който при наличие на магнитовъзбудително напрежение, се образува магнитен поток и се затварят линиите на магнитната индукция.

Основните зависимости при анализа на магнитните вериги се изразяват чрез интегралните величини: магнитен поток Φ , магнитовъзбудително напрежение F , магнитно напрежение U_μ и магнитно съпротивление R_μ (вж. раздел I).

Приема се, че магнитното поле (магнитният поток) е съсредоточено в така наречения магнитопровод (магнитната верига), който се изготвя от феромагнитен материал с абсолютна магнитна проницаемост $\mu \gg \mu_0$ ($\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ Н/м}$ е абсолютната магнитна проницаемост на пустота (вакуума)). В сравнение с електрическите вериги, в този случай се прави по-голямо приближение. Това може да се види от

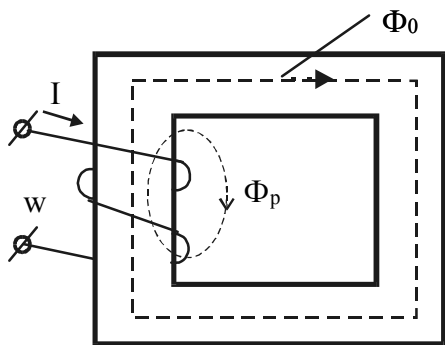
съотношението на електрическите и магнитните параметри – съответно за специфичната проводимост на проводниците γ и магнитната проницаемост на магнитопроводите μ в сравнение с тези на въздуха (или на съответната изолационната среда) γ_0 и μ_0 . Тези съотношения κ_γ и κ_μ са съответно:

$$\kappa_\gamma = \gamma/\gamma_0 \approx 10^{20}; \quad \kappa_\mu = \mu/\mu_0 \approx 10^3 \dots 10^4.$$

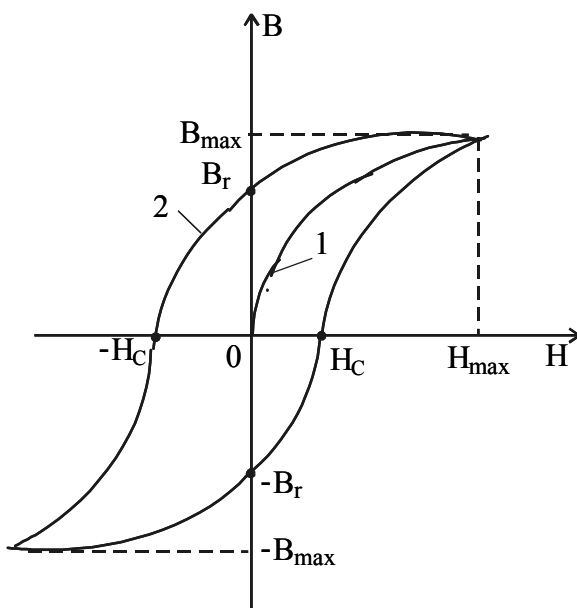
Това обуславя много често при магнитните вериги наличие значителен разсеян поток Φ_p , чиито линии се затварят частично или цялостно вън от магнитопровода (фиг. 2.5.1). Ако разсеяният поток не може да се пренебрегне, магнитните вериги се анализират като такива с разпределени параметри или се прибягва към теорията на електромагнитното поле.

Съотношенията (2.5.1) са и причината за различията в размерите на електрическите и магнитните вериги.

При еднородна и изотропна среда магнитната проницаемост μ на средата е постоянна величина и връзката между основната определяща величина на магнитното поле – магнитната индукция $\vec{B}$ и интензитета на магнитно поле $\vec{H}$ е линейна (вж. раздел I). Тя се дава с уравнението:



Фиг.2.5.1



Фиг.2.5.2

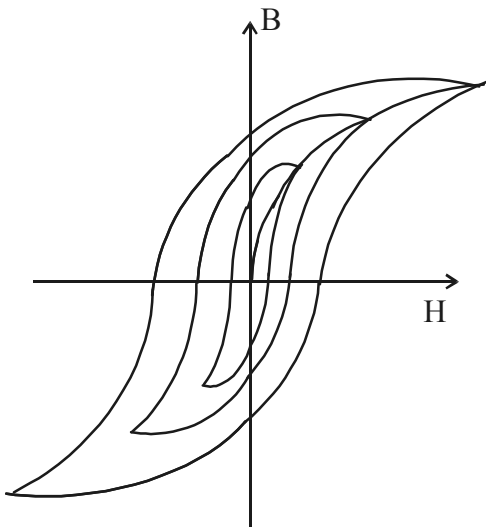
$$\vec{B} = \mu_0 \mu_r \vec{H} = \mu \vec{H}, \quad (2.5.2)$$

където μ_r е относителната магнитна проницаемост на материала на магнитната верига.

При нееднородна и анизотропна среда $\mu \neq \text{const}$ и тогава зависимостта $B = B(H)$ се дава чрез хистерезисната крива (фиг. 2.5.2), за която няма точен аналитичен израз. Участъкът от кривата, означен с 1, се нарича начална крива на намагнитването, а с 2 - размагнитваща крива (използва се при проектирането на постоянните магнити).

Характерните точки на хистерезисната крива са:

- а) $\pm B_r$ - остатъчна магнитна индукция при възбудителен ток в бобината $i = 0$;
- б) $\pm H_c$ - интензитет при стойност на индукцията $B = 0$ (коерситивен интензитет);
- в) максимуми $\pm H_m$ и съответните им $\pm B_m$ на интензитета на магнитното поле и на магнитната индукция.



Фиг.2.5.3

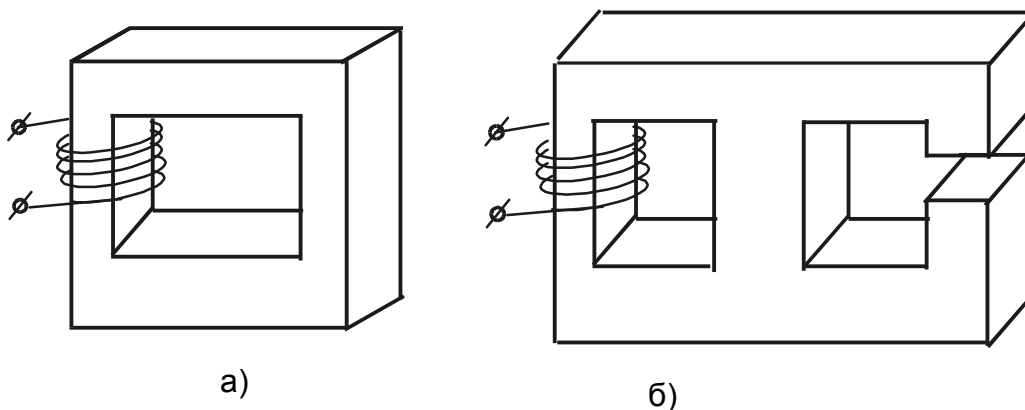
В този случай като зависимост $B = B(H)$ се използва основната крива на намагнитването 1 от фиг. 2.5.3. Тази крива свързва върховете на увеличаващите се по площ хистерезисни цикли при извършване на циклично пренамагнитване с променлива амплитудна стойност I_m (съответно H_m).

Тя може да бъде зададена аналитично, графично или таблично за даден магнитен материал.

Съществуват различни класификации на магнитните вериги:

1. В зависимост от структурата на съединяване на отделните участъци на магнитните вериги, те се разделят на: неразклонени (фиг. 2.5.4а) и разклонени (фиг. 2.5.4б).

2. В зависимост от това дали съдържат въздушна междина или не, се разделят на: затворени (фиг. 2.5.4а) и отворени (фиг. 2.5.4б).



Фиг.2.5.4

3. В зависимост от това дали зависимостта $\mu = \mu(H)$ е слабо или силно нелинейна, те се разделят на линейни: (при тях се приема $\mu = \text{const}$ и $\vec{B} = \mu \vec{H}$) и нелинейни ($\mu \neq \text{const}$ и $\vec{B} = \vec{B}(H)$ е силно нелинейна).

4. Както и при електрическите вериги, магнитните вериги могат да се разглеждат като: магнитни вериги със съсредоточени параметри и магнитни вериги

със разпределени параметри.

2. Основни закони

Основните закони на постояннотоковите магнитни вериги са:

А. Закони на Кирхоф

Първият закон на Кирхоф дава връзката между магнитните потоци Φ_k на клоновете, свързани към даден възел:

$$\sum_{k=1}^n \Phi_k = 0. \quad (2.5.3)$$

Вторият закон на Кирхоф дава връзката между магнитовъзбудителните напрежения F_k и магнитните напрежения $U_{\mu k}$ на клоновете, образуващи затворения контур:

$$\sum_{k=1}^n F_k = \sum_{k=1}^n U_{\mu k}. \quad (2.5.4)$$

В. Закон на Ом

Законът на Ом за пасивен участък дава връзката между магнитното напрежение U_{μ} , магнитния поток Φ и магнитното съпротивление R_{μ} на участъка:

$$U_{\mu} = \Phi \cdot R_{\mu}. \quad (2.5.5)$$

Законът на Ом за активен участък (обобщен закон на Ом) дава връзката между величините U_{μ} , Φ и R_{μ} и магнитовъзбудителното напрежение F , действащо в участъка:

$$\Phi = (U_{\mu} + F) / R_{\mu}. \quad (2.5.6)$$

Между величините, характеризиращи електрическите и магнитните вериги съществува аналогия, която се дава в табл. 2.5.1.

Таблица 2.5.1

Електрически вериги	E, V	U, V	I, A	R, Ω	G, S
Магнитни вериги	F, A	U_{μ} , A	Φ , Wb	R_{μ} , H^{-1}	G_{μ} , H

Тази аналогия позволява за магнитните вериги да се чертаят заместващи електрически схеми. Тя се отнася и за методите за пресмятане на магнитните вериги и начините за съставяне на уравненията.

При определянето на магнитното напрежение U_{μ} на даден участък, освен формула (2.5.5), може да се използва и изразът (вж. раздел I):

$$U_{\mu} = H \cdot \ell, \quad (2.5.7)$$

където H е интензитетът на магнитното поле по средната магнитна линия с дължина ℓ .

Зависимостта (2.5.7) е целесъобразно да се използва, когато магнитната проникваемост μ_r на участъка не е постоянна.

Магнитовъзбудителното напрежение F може да се определи чрез намагнитващия ток I и броя на навивките w на възбудителната намотка по формулата (вж. раздел I):

$$F = w \cdot I. \quad (2.5.8)$$

Посоката на магнитовъзбудителното напрежение F е свързана с посоката на тока I по правилото на десния винт.

2.6. Пресмятане на неразклонени магнитни вериги за постоянен ток. Основни задачи.

При пресмятането на магнитните вериги обикновено са зададени: конфигурацията на веригата (формата и размерите на участъците γ , местоположението и броят на навивките на възбудителните намотки), магнитните

свойства на материалите (магнитната проницаемост μ_r , ако $\mu_r = \text{const}$, или кривата на намагнитването $B = B(H)$, ако $\mu_r \neq \text{const}$, т. е. зависимостта $B = B(H)$ е нелинейна).

Поради разнообразието на магнитните вериги (обикновено те са нелинейни вериги, а при строго разглеждане, т. е. при отчитане на потоците на разсейване, те са и вериги с разпределени параметри), то за разлика от електрическите вериги няма точни алгоритми при пресмятането им. Ето защо всяка верига се анализира конкретно, като се спазват съответните принципи и закони.

При линейните магнитни вериги са приложими всички методи за анализ на линейни електрически вериги. Изключение прави методът на еквивалентния генератор, тъй като при магнитните вериги не се дефинират режими на празен ход и късо съединение.

При анализа на магнитните вериги се разглеждат два типа задачи:

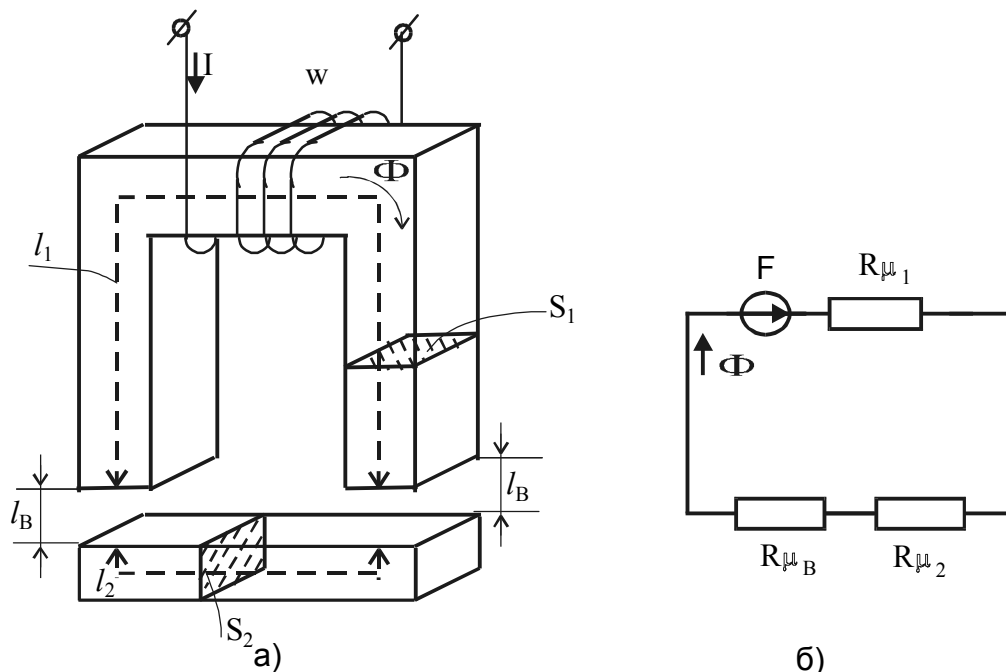
А. Права задача – Състои се в определяне на магнитовъзбудителните напрежения при зададени магнитни потоци: При решаването ѝ директно се използват основните закони.

В. Обратна задача – Състои се в определяне на магнитните потоци при зададени магнитовъзбудителни напрежения. В случай, че магнитната проницаемост $\mu_r \neq \text{const}$, тази задача няма директно решение. Тогава се налага използването на приблизителни методи, например неколкостепенно решение на правата задача, въз основа на което се намира спомагателната зависимост $\Phi = \Phi(F)$.

Поради голямото разнообразие на магнитните вериги, за което бе споменато по-горе, пресмятането на неразклонените магнитни вериги за постоянен ток ще бъде показано въз основа на примерната магнитна верига, дадена на фиг. 2.6.1а.

За веригата са зададени: дължините на участъците на магнитната верига ℓ_1 и ℓ_2 , и на въздушната междина ℓ_B ; сеченията на участъците S_1 и S_2 и на въздушната междина $S_B = S_1$ (пренебрегва се потокът на разсейване); брой на навивките w на възбудителната намотка; магнитните свойства на материала (чрез задаване на зависимостта $B = B(H)$, която е нелинейна).

Заместващата електрическа схема на магнитната верига от фиг. 2.6.1а е дадена на фиг. 2.6.1б.



Фиг.2.6.1

А. Права задача – Зададен е магнитният поток Φ . Търсят се магнитовъзбудителното напрежение F и възбудителният ток I .

Решение

1. Въз основа на зададения магнитен поток Φ се намират стойностите B_1 и B_2 на магнитната индукция в участъците на магнитната верига и стойността B_B във въздушната междина по формулите:

$$B_1 = \Phi/S_1; B_2 = \Phi/S_2 \text{ и } B_B = \Phi/S_B = B_1, \quad (2.6.1)$$

тъй като $S_B = S_1$.

2. Чрез намерените стойности B_1 и B_2 и зависимостта $B = B(H)$ се определят стойностите H_1 и H_2 на интензитета. Стойността H_B на интензитета на магнитното поле във въздушната междина се изчислява по формулата:

$$H_B = B_B/\mu_0. \quad (2.6.2)$$

3. Магнитовъзбудителното напрежение F се изчислява по втория закон на Кирхоф, приложен за тази едноконтурна магнитна верига. Записва се уравнението:

$$F = H_1 \cdot \ell_1 + H_2 \cdot \ell_2 + 2 \cdot H_B \cdot \ell_B. \quad (2.6.3)$$

4. Възбудителният ток I през намотката се изчислява по формулата:

$$I = F/w. \quad (2.6.4)$$

Б. Обратна задача – Зададено е магнитовъзбудителното напрежение F . Търси се магнитният поток Φ .

Тази задача не може да се реши директно, поради нелинейността на магнитната верига (на зависимостта $B = B(H)$). Прави се многократно решение на правата задача.

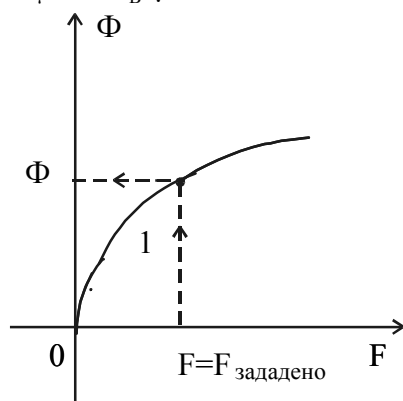
Решение:

1. Задава се някаква стойност на магнитния поток Φ' . Обикновено тази стойност Φ' се изчислява въз основа на съпротивлението на въздушната междина $R_{\mu B}$ (то има най-голяма стойност при тази отворена верига) и зададеното магнитовъзбудително напрежение по формулата:

$$\Phi' = F/R_{\mu B}, \quad (2.6.5)$$

където

$$R_{\mu B} = 2 \ell_B / \mu_0 \cdot S_B. \quad (2.6.6)$$



Фиг.2.6.2

2. Чрез зададената стойност Φ' се решава правата задача и се намира съответната стойност F' , която обикновено се различава от стойността F , зададена в условието на задачата, т.е. $F' \neq F$.

3. Задава се поредица от стойности Φ' , Φ'' и т.н. на магнитния поток и се изчисляват съответните стойности F' , F'' и т.н. на магнитовъзбудителното напрежение, като всеки път решава правата задача. Тези стойности F' , F'' , ... се различават повече или по-малко от зададената стойност F .

4. Чрез зададените стойности Φ' , Φ'' , ... и изчислените стойности F' , F'' , ... се строи зависимостта $\Phi = \Phi(F)$ (фиг. 2.6.2).

5. Въз основа на получената зависимост $\Phi = \Phi(F)$ (фиг. 2.6.2) и зададеното магнитовъзбудително напрежение F се намира магнитният поток Φ .

2.7. Пресмятане на разклонени магнитни вериги за постоянен токОсновни задачи

Пресмятането на разклонени магнитни вериги за постоянен ток ще бъде показано въз основа на примерната магнитна верига от фиг. 2.7.1а.

За веригата са зададени: дължините и сеченията на участъците ℓ_1 , ℓ_2 , ℓ_3 и ℓ_3'' съответно сеченията S_1 , S_2 и S_3 ; дължината на въздушната междина ℓ_B и

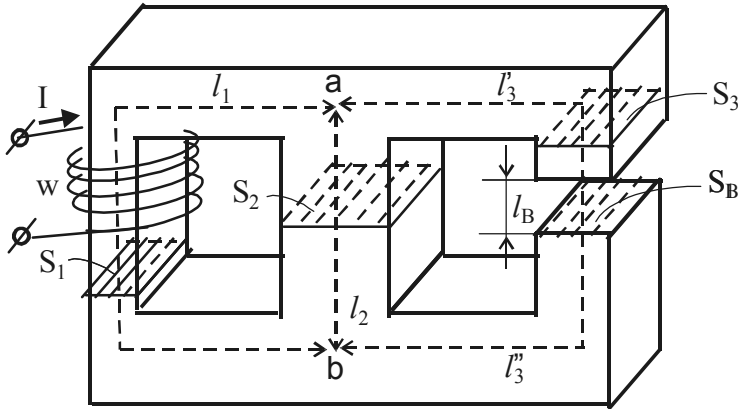
съответно сечението $S_B = S_3$; броят на навивките w на възбудителната намотка; магнитните свойства на материала чрез кривата $B = B(H)$.

А. Права задача – Зададен е магнитният поток Φ_3 в третия участък на веригата: Търсят се магнитовъзбудителното напрежение F и възбудителният ток I .

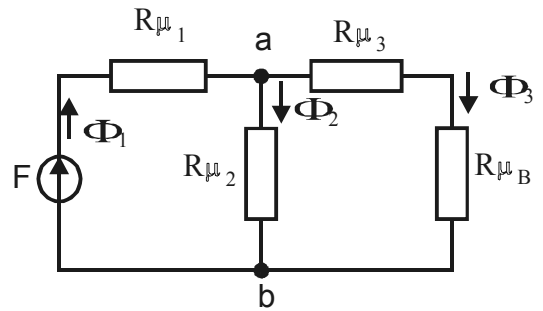
Решение:

1. От зададения магнитен поток Φ_3 се изчислява магнитната индукция B_3 в третия участък на магнитната верига и във въздушната междина B_B по формулите:

$$B_3 = \Phi_3 / S_3 \text{ и } B_B = \Phi_3 / S_B = B_3. \quad (2.7.1)$$



а)



б)

Фиг.2.7.1

2. Намира се интензитетът H_3 въз основа на зависимостта $B = B(H)$ и стойността на магнитната индукция B_3 .

3. Изчислява се интензитетът на магнитното поле H_B във въздушната междина въз основа на формулата:

$$H_B = B_B / \mu_0. \quad (2.7.2)$$

4. Определя се магнитното напрежение $U_{\mu\text{ав}}$ от уравнението:

$$U_{\mu\text{ав}} = H_3(\ell_3' + \ell_3'') + H_B \ell_B. \quad (2.7.3)$$

5. Намира се интензитетът H_2 във втория участък на магнитната верига, който е паралелно свързан на третия и участък, по формулата:

$$H_3 = U_{\mu\text{ав}} / \ell_2. \quad (2.7.4)$$

6. Въз основа на интензитета H_2 и зависимостта $B = B(H)$ се намира магнитната индукция B_2 във втория участък.

7. Изчислява се магнитният поток Φ_2 във втория участък по формулата:

$$\Phi_2 = B_2 \cdot S_2. \quad (2.7.5)$$

8. Намира се магнитният поток Φ_1 в първия участък на магнитната верига от уравнението, съставено по първия закон на Кирхоф за възела а, което има вида:

$$\Phi_1 = \Phi_2 + \Phi_3. \quad (2.7.6)$$

9. Магнитовъзбудителното напрежение F се изчислява от уравнението, съставено по втория закон на Кирхоф за контура, който включва първия и втория участъци на магнитната верига, и има вида:

$$F = H_1 \ell_1 + U_{\mu\text{ав}}. \quad (2.7.7)$$

10. Изчислява се възбудителният ток I по формулата:

$$I = F / w. \quad (2.7.8)$$

Б. Обратна задача – Зададено е магнитовъзбудителното напрежение F . Търсят се магнитните потоци Φ_1 , Φ_2 и Φ_3 .

Решение:

Тази задача също, както при неразклонените магнитни вериги, няма директно решение, поради нелинейната зависимост $B = B(H)$.

1. Задава се стойност на магнитния поток Φ_3' в третия участък на магнитната

верига. Тя се избира въз основа на израз:

$$\Phi'_3 = F / R_{\mu B}, \quad (2.7.8)$$

където $R_{\mu B} = 2 \ell_B / \mu_0 \cdot S_B$.

$$(2.7.9)$$

2. Решава се правата задача по разгледания по-горе алгоритъм. Така се намира стойността F' на магнетовъзбудителното напрежение, която се различава от зададената стойност F .

3. Задават се още стойности $\Phi_3'', \Phi_3''', \dots$ на магнитния поток в третия участък и чрез неколккратно решаване на правата задача се намират съответните стойности $F'', F''', \dots$.

4. Въз основа на стойностите на магнитните потоци и на магнетовъзбудителното напрежение се построяват следните криви:

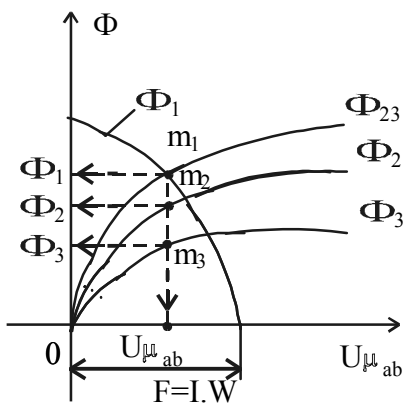
а) $\Phi_3 = \Phi_3(U_{\mu av}) = \Phi_3(H_3(\ell'_3 + \ell''_3) + H_B \cdot \ell_B)$;

б) $\Phi_2 = \Phi_2(U_{\mu av}) = \Phi_2(H_2 \cdot \ell_2)$;

в) $\Phi_1 = \Phi_1(U_{\mu av}) = \Phi_1(F - H_1 \cdot \ell_1)$;

г) $\Phi_{23} = \Phi_{23}(U_{\mu av}) = \Phi_2(U_{\mu a}) + \Phi_3(U_{\mu av})$.

Тези криви са показани на фиг. 2.7.2.



Пресечената точка m_1 на зависимостите $\Phi_1 = \Phi_1(U_{\mu av})$ и $\Phi_{23} = \Phi_{23}(U_{\mu av})$ определя истинската стойност на магнитния поток Φ_1 в първия участък и магнитното напрежение $U_{\mu av}$. В точката m_1 е изпълнен първия закон на Кирхоф, записан за възел а (вж. формула (2.7.6)). За същата стойност на магнитното напрежение $U_{\mu av}$ от кривите $\Phi_2 = \Phi_2(U_{\mu av})$ и $\Phi_3 = \Phi_3(U_{\mu av})$ (съответно точки m_2 и m_3) се намират стойностите Φ_1 и Φ_2 на магнитните потоци, съответно във втория и третия участъци на магнитната

Фиг.2.7.2
верига.

2.8. Електростатични вериги - основни понятия и закони

1. Общи сведения

Електростатичните вериги са съставени от идеални постоянни източници на ЕДН и от идеални кондензатори, т.е. кондензатори без загуби (с идеален диелектрик). При последното условие електрическите заряди върху електродите на кондензаторите се запазват без изменение неограничено дълго време. Най-близки до идеалните кондензатори на практика са кондензаторите с газообразни диелектрици.

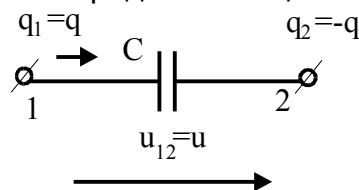
Изследването на електростатичните вериги има особено голямо значение при определянето на началните условия при преходни процеси в електрически вериги, при които комутацията е некоректна.

При разглеждането на електростатичните вериги се приема, че няма разсейване на електрическо поле, т.е. колкото линии на електрическото поле започват от единия електрод на кондензатора, толкова завършват на другия електрод. Това още означава, че двата електрода на кондензатора имат еднакви по

големина заряди, но с противоположни знаци - $q_1 = q$ и $q_2 = -q$ (вж. фиг. 2.8.1). В уравнението:

$$C = q/u \quad (2.8.1)$$

участва зарядът q на положителния електрод, а посоката на напрежението върху кондензатора е от положителния към отрицателния електрод, както е показано на фиг. 2.8.1.



Фиг.2.8.1

2. Основни закони.

А. Закон за съхранение на електрическите заряди

Той е аналогичен на първия закон на Кирхоф и гласи, че алгебричната сума на зарядите върху електродите на кондензаторите, свързани в даден възел, равен на алгебричната сума на зарядите върху тези електроди преди тяхното свързване. Записва се с уравнението:

$$\sum_{k=1}^{m_p} q_k = \sum_{k=1}^{m_p} q'_k. \quad (2.8.2)$$

В уравнение (2.8.2) с индекс “прим” са означени зарядите върху електродите, преди свързването им към възела p . С m_p е означен броят на кондензаторите, които се свързват към възел p . Ако кондензаторите не са имали допълнителен заряд, то дясната страна на формула (2.8.2) се анулира, т.е.:

$$\sum_{k=1}^{m_p} q_k = 0. \quad (2.8.3)$$

При свързването на кондензаторите към даден възел, настъпва само преразпределение на тези заряди, тъй като вече бе прието, че диелектриците на кондензаторите са идеални и електрическите заряди не могат да преминат през тях.

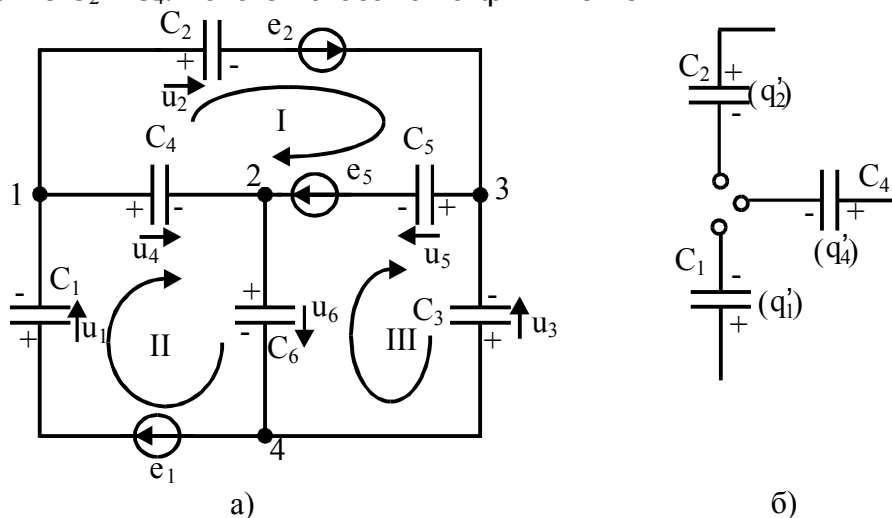
Б. Втори закон на Кирхоф

След отчитане на връзката между заряда и напрежението на кондензатора (вж. (2.8.1)), вторият закон на Кирхоф може да бъде записан за електростатичните вериги по следния начин:

$$\sum_{k=1}^n (q_k / C_k) = \sum_{k=1}^n e_k. \quad (2.8.4)$$

При съпоставка на законите за електростатичните вериги с тези за постояннотоковите електрически вериги при установен режим, може да се установи аналогичната им форма, но при условие, че кондензаторите не са били предварително заредени. Тази аналогия позволява да бъдат съставени еквивалентни електрически схеми на електростатичните вериги и това може да бъде използвано при определяне на началното условие за кондензаторите при преходни процеси, когато комутацията е некоректна.

Като пример се разглежда електрическата верига, чиято схема е дадена на фиг. 2.8.2а. В случая се предполага, че кондензаторите C_1 , C_3 , C_5 и C_6 са имали същия поляритет на предварителния си заряд. Променили са го само кондензаторите C_2 и C_4 . Това е показано на фиг. 2.8.2б.



Фиг.2.8.2

Въз основа на израз (2.8.2) за възлите 1, 2 и 3 и въз основа на израз (2.8.4) за I и II и III контури на разглежданата верига се записва следната система уравнения:

$$\begin{aligned}
& -q_1 + q_2 + q_4 = -q'_1 - q'_2 - q'_4; \\
& -q_4 - q_5 + q_6 = q'_4 - q'_5 + q'_6; \\
& -q_2 - q_3 + q_5 = q'_2 - q'_3 + q'_5; \\
& \frac{q_2}{C_2} - \frac{q_4}{C_4} + \frac{q_5}{C_5} = e_2 + e_5; \\
& \frac{q_1}{C_1} + \frac{q_4}{C_4} + \frac{q_6}{C_6} = e_1; \\
& -\frac{q_3}{C_3} - \frac{q_5}{C_5} - \frac{q_6}{C_6} = -e_5.
\end{aligned} \tag{2.8.5}$$

При записването на система (2.8.5) при уравнения, съставяни по втория закон на Кирхоф, знакът на заряда на даден кондензатор е “+”, ако при обхождането на съответния контур се среща най-напред положителния електрод.

Уравненията за веригата от фиг. 2.8.2 могат да се запишат и чрез напреженията на кондензаторите. В този случай те имат вида:

$$\begin{aligned}
& -C_1 u_1 + C_2 u_2 + C_4 u_4 = -q'_1 - q'_2 - q'_4; \\
& -C_4 u_4 - C_5 u_5 + C_6 u_6 = q'_4 - q'_5 + q'_6; \\
& -C_2 u_2 - C_3 u_3 + C_5 u_5 = q'_2 - q'_3 + q'_5; \\
& u_2 - u_4 + u_5 = e_2 + e_5; \\
& u_1 + u_4 + u_6 = e_1; \\
& -u_3 - u_5 - u_6 = -e_5.
\end{aligned} \tag{2.8.6}$$

Зарядите q'_k и ЕДН e_k в дясната страна на система (2.8.6) се разглеждат като зададени величини.

2.9. Диелектрични вериги – основни понятия и закони

1. Общи сведения

Диелектричните вериги са изградени от материали с голяма диелектрична проникваемост $\varepsilon \gg \varepsilon_0$ (ε_0 – абсолютната диелектрична проникваемост на пустотата).

Теорията на диелектричните вериги е дуална на теорията на магнитните вериги. Тя се използва при анализа на устройствата за електромеханично преобразуване на енергията, където диелектричните вериги са намерили приложение (изграждат се “електропроводите”, които са аналогични на магнитопроводите (магнитните вериги)).

Цялата съвременна теория на магнитните вериги, както и цялата електродинамика са изградени без наличието на реално съществуващи магнитни заряди.

При теорията на диелектричните вериги трябва да бъде отчитано наличието на електрически заряди и възможностите за тяхното натрупване.

Основните закони при диелектричните вериги са валидни, както за електростатични, така и за вихрови електрически полета.

А. Закон на Ом

Законът на Ом при електростатични полета се записва във вида:

$$\Phi_\varepsilon = u/R_\varepsilon \tag{2.9.1}$$

или:

$$\Phi_\varepsilon = e/R_\varepsilon, \tag{2.9.2}$$

където Φ_ε е потокът на вектора на електрическата индукция, C ;

u - потенциалната разлика върху пасивен участък от диелектричната верига;

e - ЕДН в затворен участък от тази верига (затворена едноконтурна верига).

Ако електрическото поле е вихрово, то ЕДН e се определя за затворената

едноконтурна верига от закона за електромагнитната индукция (вж. раздел I).

R_ϵ - диелектричното съпротивление, F^{-1} .

При еднородно електрическо поле и постоянно сечение S на диелектричната верига, съпротивлението R_ϵ може да се изрази чрез уравнението:

$$R_\epsilon = l/\epsilon_0\epsilon_r S. \quad (2.9.3)$$

В уравнение (2.9.3) l е дължината на диелектричната верига; ϵ_0 - абсолютната диелектрична проницаемост на пустотата; ϵ_r - относителната диелектрична проницаемост на материала, от който е направена диелектричната верига.

Б. Първи закон на Кирхоф

Ако за даден възел има некомпенсирани електрически заряди, то първият закон на Кирхоф се записва във вида:

$$\sum_{k=1}^n \Phi_{\epsilon_k} = \sum_{k=1}^n q_k, \quad (2.9.4)$$

а ако липсват такива заряди, то тогава:

$$\sum_{k=1}^n \Phi_{\epsilon_k} = 0. \quad (2.9.5)$$

Със $\sum q_k$ в уравнение (2.9.4) е означена сумата от некомпенсирани заряди в обема, ограничен от затворената повърхнина, която обхваща възела.

Формули (2.9.4) и (2.9.5) следват непосредствено от постулата на Максвел (вж. раздел I).

$$\oint_s \vec{D} d\vec{S} = \sum_{k=1}^n q_k. \quad (2.9.6)$$

В. Втори закон на Кирхоф

Ако в разглеждания контур на диелектричната верига отсъствуват непотенциални електрически полета, то уравнението по втория закон на Кирхоф за този контур има вида:

$$\sum_{k=1}^n R_{\epsilon_k} \Phi_{\epsilon_k} = 0, \quad (2.9.7)$$

а ако има непотенциални електрически полета, то тогава се записва:

$$\sum_{k=1}^n R_{\epsilon_k} \Phi_{\epsilon_k} = \sum_{k=1}^n e_k, \quad (2.9.8)$$

където e_k са ЕДН, индутирани от непотенциалните електрически полета.

2.10. Графи на електрическите вериги. Схемни графи

Началото на теорията на графите е поставено от Ойлер през 1736 г., но като математическа дисциплина тя се оформя в средата на 20 век. Терминът "граф" е възприет след публикуването на монографията на Кьонинг през 1936 г.

Графите се използват в различни области, например, при организацията на производството (движение на суровини, детайли, възли и др.), при организацията на взаимодействието между група хора (например, футболни отбори) и т.н.

В областта на физичните проблеми графите са намерили най-голямо приложение при изследването и проектирането на линейните електрически вериги.

Графът е съвкупност от възли и свързващи ги клонове, която е носител на определена информация.

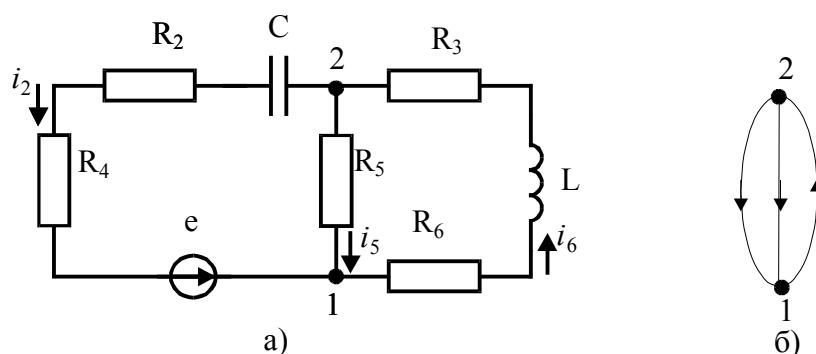
I. Класификация на графите

Графите, които се използват в теорията на електрическите вериги, се делят на два основни типа - схемни и сигнални графи.

Схемните (структурните) графи съответствуват на схемите на електрическите вериги. На всеки възел и клон на графа съответствува възел и клон от схемата на

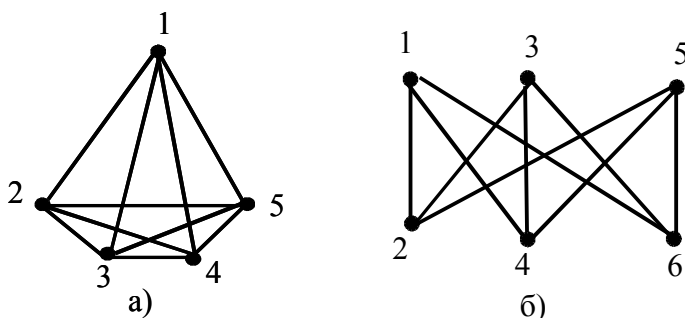
електрическата верига.

Използват се два вида схемни графи – насочени и ненасочени. При насочените графи за всеки клон се въвежда посока, означена със стрелка, поставена върху самия клон. На фиг. 2.10.1а е даден пример на електрическа верига, а на фиг. 2.10.1б е показан нейният насочен схемен граф.



Фиг.2.10.1

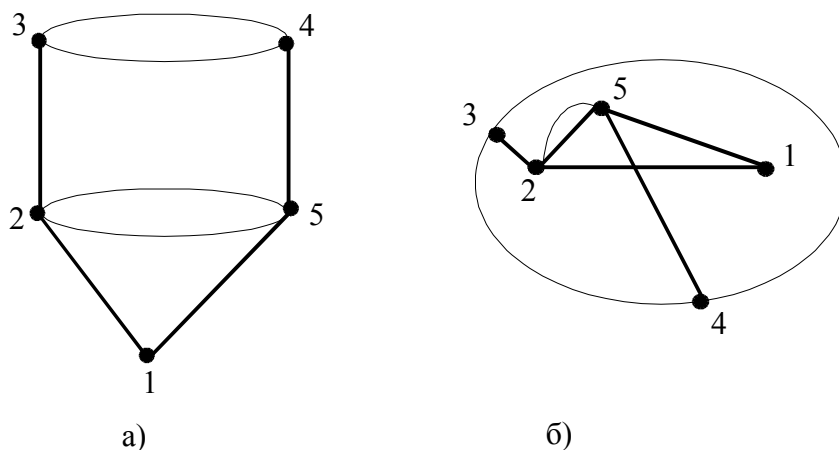
Посоката на клона на графа обикновено съответствува на избраната условна посока на тока в клона на схемата на електрическата верига (фиг. 2.10.1б), но се допуска въвеждането на произволни посоки. При ненасочените графи липсват посоки на клоновете.



Фиг.2.10.2

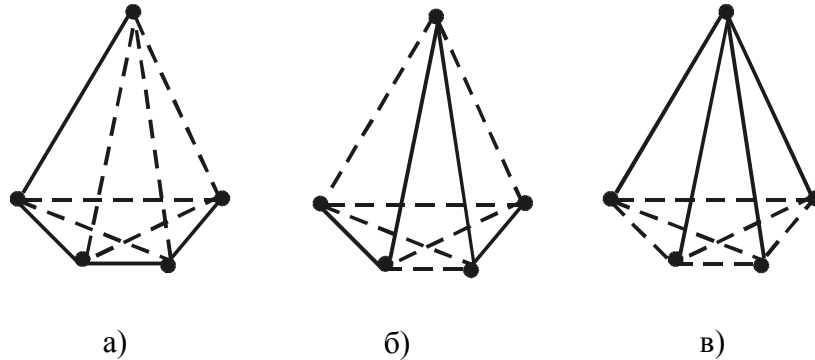
Сигналните графи в теорията на електрическите вериги не се строят въз основа на схемното изображение на електрическата верига. Те представляват геометрично изображение на причинно-следствените връзки между токовете и напреженията и се строят по други правила, различни от тези при схемните графи.

Сигналните графи са насочени графи. Затова те се срещат още под названието ориентирани графи. Известни са ориентирани графи на Мейсън, Коутс, на Чен и Мей, на Сучилин и др.



Фиг.2.10.3

Освен схемни (линейни) и сигнални графи се различават още равнинни (планарни) и пространствени (непланарни) графи. Пример за равнинен граф е даден



Фиг.2.10.6

на фиг.2.10.1.б, а за пространствени графи - на фиг. 2.10.2. При пространствените графи в равнинен чертеж връзките между възлите не могат да се осъществят без пресичане на клонове.

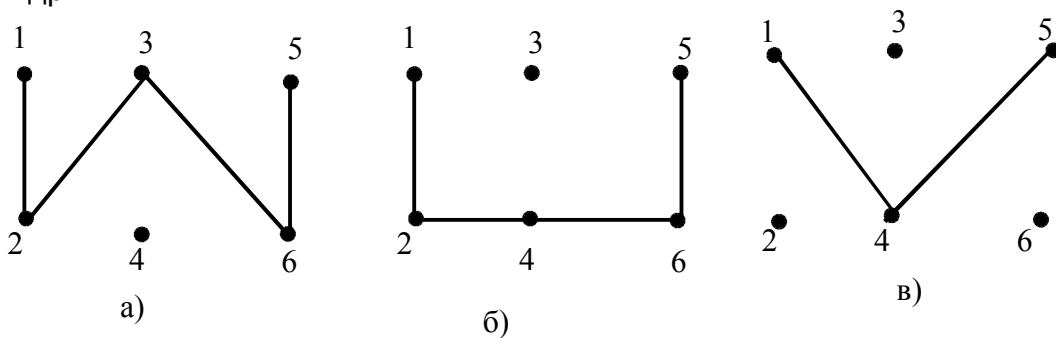
Графът на една и съща схема на електрическа верига може да има различни изображения в зависимост от приетото разположение на възлите, както и от дължината и кривината на клоновете (фиг. 2.10.3). Графите се приемат с еднаква форма (т.е. те са изоморфни), когато съществува съответствие между клоновете и възлите им и връзките между тях. Изоморфните графи са изображения на едни и същи топологични структури. Дадените на фиг. 2.10.3а и фиг. 2.10.3в графи са изоморфни.

Различават се още свързани и несвързани графи. Несвързаните графи имат клонове и възли, между които не съществува връзка.

II. Основни подмножества на графите

Във всеки граф могат да се дефинират подмножества от клонове или възли. В частен случай подмножеството в графа може да представлява само един клон или един изолиран възел.

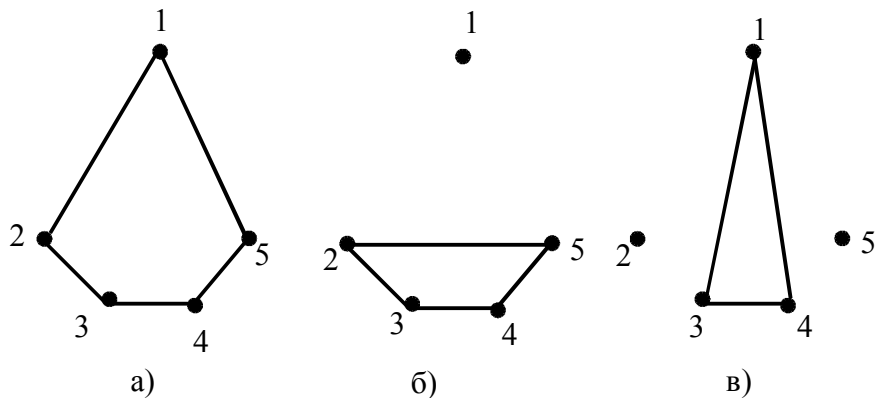
При анализа на процесите в електрическите вериги съществена роля играят подмножествата отворен и затворен контур, дърво, допълнение на дървото, сечение и др.



Фиг.2.10.4

Отворен контур (път) е подредено подмножество от клонове на графа, така че да се получи непрекъсната линия, в която всеки клон и собствените му възли се срещат по протежение на линията само веднъж. Някои от допустимите отворени контури за графа от фиг. 2.10.2б с начало във възел 1 и край във възел 5 са показани на фиг. 2.10.4.

Затворен контур (контур) е подредено подмножество от клонове на графа, така че да се образува непрекъсната затворена линия. Ако един от възлите в този случай се приеме за начало и край на контура, този възел се среща при



Фиг.2.10.5

обхождането на контура два пъти, а всички останали възли и клонове – веднъж. Някои от допустимите затворени контури за графа от фиг. 2.10.2а са показани на фиг. 2.10.5.

Дърво е подредено подмножество от клонове на графа, така че да се получи свързан граф, без да се образуват затворени контури. Някои от допустимите подмножества за графа от фиг. 2.10.2а, които образуват дърво, са показани на фиг. 2.10.6 с непрекъсната линия. При граф с n възела, клоновете на дървото са $n-1$.

Допълнение на дървото (главни клонове или хорди) е подмножество от клонове на графа, които допълват дървото до изходния граф. На фиг. 2.10.6 главните клонове са изобразени с прекъсната линия.

Ако графът има m клон и n възли, може да се докаже или непосредствено да се провери, че броят на главните клонове k се определя от израза:

$$k = m - (n-1), \quad (2.10.1)$$

а броят на клоновете на дървото g – от израза:

$$g = n-1. \quad (2.10.2)$$

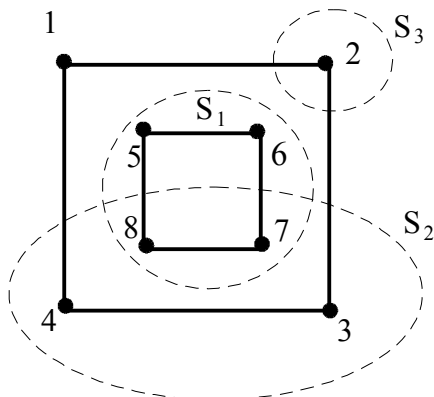
Равенства (2.10.1) и (2.10.2) определят броя на независимите уравнения, които могат да се запишат съответно по втория и първия закон на Кирхоф за схема на произволна верига с m клон и n възела.

Сечение е подмножество от клонове на графа, при отстраняването на които от пълния граф се получават две изолирани части. В частен случай една от изолираните части може да е отделен възел. Сечението може да се изобрази нагледно, ако се използва затворена повърхнина, която пресича всички клонове на подмножеството. За графа от фиг. 2.10.7 тези подмножества са съответно:

за сечение S_1 – клонове 1-5; 4-8; 3-7; 2-6;

за сечение S_2 – клонове 1-4; 5-8; 6-7; 2-3;

за сечение S_3 – клонове 1-2; 2-6; 2-3.



Фиг.2.10.7

Главно сечение е сечение, което включва само един клон на дървото и неограничен брой хорди.

Главен контур е такъв контур, който включва само една хорда и неограничен брой клонове на дървото.

За контурите и за сеченията се въвеждат условни положителни посоки.

Дефинираните основни подмножества се явяват изходни при съставянето на уравненията за анализ на електрическите вериги. Когато този анализ

Кирхоф.

За произволна схема на електрическа верига възловата матрица се съставя, като се спазва следният ред:

1. Чертае се насоченият граф на схемата като се номерират възлите и клоновете съответно от 1 до n и от 1 до m .

2. Ненасоченият граф се трансформира в насочен като се използват условните посоки на токовете в схемата на веригата.

3. Съставя се матрица (таблица) с n реда (съответстващи на възлите) и m клон (съответстващи на клоновете). На елементите на матрицата се присвояват стойности $+1$ или -1 , когато пресечната точка на ред с колона съответният за колоната клон на графа има връзка с възела, на който съответствува редът. При липса на такава връзка на елементите се присвоява стойност нула. Когато клонът има посока на излизане от възела, на елементите се присвоява стойност $+1$, в обратния случай – стойност -1 .

Матрицата $\underline{B}_H$, която се записва въз основа на насочения граф, показан на фиг. 2.10.8 и отнасящ се за електрическата верига от фиг. 2.10.1 а), има вида:

$$\underline{B}_H = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{matrix} & \leftarrow \text{клонове} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \end{matrix} & \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} & \dots \end{matrix} \quad (2.11.1)$$

↓
възли

Получената матрица $\underline{B}_H$ (2.10.1) е с размери $(n \times m)$ и се нарича неопределена възлова матрица. Произволен неин k -ти ред може да се получи като линейна комбинацията от елементите на останалите $(n-1)$ реда.

Освен това сумата от елементите в произволна колона на неопределената възлова матрица е равна на нула. Това е така, защото всеки клон има за гранични точки два възела. За единия възел токът е излизащ (елементът в колоната е $+1$), а за другия - влизащ (елементът в колоната е -1).

Ако от матрица $\underline{B}_H$ се премахне произволен ред, то ще се получи матрицата $\underline{B}$. За конкретния случай след премахване на последния (седмия ред) на матрицата $\underline{B}_H$ (2.10.2) се получава:

$$\underline{B} = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{matrix} & \leftarrow \text{клонове} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{matrix} & \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} & \dots \end{matrix} \quad (2.11.2)$$

↓
възли

Матрицата $\underline{B}$ има размер $(n-1) \times m$ (в случая $n-1 = 6$ и $m = 8$).

Първият закон на Кирхоф може да бъде записан чрез матрицата $\underline{B}$ по следния начин:

$$\underline{B} \cdot \underline{i}(t) = \underline{0}, \quad (2.11.3)$$

където $\underline{i}(t)$ е матрицата-колона на клоновите токове.

2.11.2. Матрица на сеченията $\underline{C}$

Матрица на сеченията $\underline{C}$ представлява таблица с елементи $+1$, -1 или 0 . Тя също може да се свърже с първия закон на Кирхоф, приложен не за възлите на графа (схемата), а за затворените повърхнини, чрез които се въвеждат сеченията на графа.

Когато матрицата $\underline{C}$ се въвежда за главните сечения, тя носи и съответното название матрица на главните сечения. В общия случай нейният размер е $(n-1) \times m$. Съставянето на матрицата $\underline{C}$ за този случай се извършва, като се спазва следният ред.

1. Чертае се насоченият граф на веригата и се номерират клоновете на нормалното дърво и хордите, съобразно съответните приоритети на елементите на веригата. При това клоновете на дървото се начертават с плътна линия, а клоновете хорди – с прекъсната линия.

2. Означават се главните сечения и се номерират в съответствие с номерата на клоновете на нормалното дърво (от S_1 до S_{n-1}).

3. Съставя се матрица (таблица) в общия случай за графа с m клоната и n възела с размер $(n-1) \times m$, редовете в която съответствуват на сеченията, а стълбовете – на всички m клоната на веригата.

4. На елементите на матрицата се присвояват стойности $(+1, -1)$ или 0 в зависимост от това, дали съответният клон принадлежи на подмножеството от клонове, който определят сечението, или не; $+1$ се присвоява при еднакви посоки на клоната от графа и съответния за сечението клон от дървото по отношение на затворената повърхнина, свързана със сечението, а -1 се присвоява при различни посоки. Посоките се дефинират като посоки на влизане и излизане от повърхнината.

При спазване на горните правила за графа от фиг. 2.10.8 се получава следната матрица на главните сечения:

$$\underline{C} = \begin{array}{c} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ S_4 \\ S_5 \\ S_6 \end{array} \begin{array}{cccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{array} \begin{array}{c} \longrightarrow \text{клонове} \\ \hline \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \dots \end{array} \quad (2.11.4)$$

↓
гл.сечения и

Матрицата $\underline{C}$ може да се състави и за брой на сеченията, по-голям от този на

главните. Тогава тя се означава като $\underline{C}_H$ и се нарича неопределена матрица на сеченията.

Тази част от матрицата $\underline{C}$, която включва клоновете на дървото, е единична. Това следва от самото определение за главните сечения. Информация за графа, т.е. за самата верига, носи само тази част на матрицата $\underline{C}$, която е свързана с клоновете хорди (в случая това са колоните 7 и 8 на матрицата (2.11.4)).

Първият закон на Кирхоф може да се запише и посредством матрицата на сеченията по следния начин:

$$\underline{C} \cdot \underline{i}(t) = \underline{0}, \quad (2.11.5)$$

където $\underline{i}(t)$ е матрицата-колона на клоновите токове.

2.11.3. Матрица на контурите (контурна матрица) $\underline{K}$

Тази матрица представлява таблица с елементи $+1$, -1 или 0 , които съответствуват на коефициентите в уравненията за схемата на електрическата верига, записани по втори закон на Кирхоф.

Когато контурната матрица съответствува на уравненията, записани по втория закон на Кирхоф за главните контури на графа (схемата), тя се нарича матрица на главните контури. Съставянето на матрицата $\underline{K}$ за този случай се извършва в следния ред:

1. Чертае се насоченият граф на схемата, като се избира подмножеството на клоновете на дървото (чертаят се с плътни линии и са с номера от 1 до $n-1$, при брой на възлите n) и клоновете хорди (чертаят се с прекъсната линия и номерата им са от n до m при брой на клоновете m) съобразно съответния приоритет.

2. Избират се главните контури. Всеки от тях съдържа само един клон хорда и неограничен брой клонове от дървото. Номерът и условната положителна посока на главния контур съвпадат с номера и посоката на съответния клон хорда, съдържащ се в главния контур.

3. Съставя се матрицата-таблица, която при граф с m клона и n възела съдържа $k = m - (n - 1)$ реда (колкото е броят на главните контури) и m колони.

4. На елементите на матрицата $\underline{K}$ се присвояват стойности $+1$, -1 или 0 в зависимост от това, дали клонът в разглежданата колона принадлежи на контура на съответния ред: $+1$ се присвоява при съвпадане на посоката на клона с условната посока на обхождане на контура, а -1 - в противния случай.

$$\underline{K} = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{matrix} & \leftarrow \text{клонове} \\ \begin{matrix} K_1 \\ K_2 \\ \vdots \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix} & \end{matrix} \quad (2.11.6)$$

↓
гл.контури

Матрицата $\underline{K}$ може да се състави и за брой на контурите, по-голям от тази на главните. В този случай тя се означава като $\underline{K}_H$ и се нарича неопределена контурна матрица. Между елементите в нейните редове съществува линейна зависимост.

Частта от матрицата $\underline{K}$, която съответствува на клоновете-хорди, е единична диагонална матрица. Това следва от самия начин на съставянето ѝ. Информация носи само онази част от матрицата $\underline{K}$, чиито колони съответствуват на клоновете на

дървото.

Вторият закон на Кирхоф, записан посредством контурната матрица $\underline{K}$, има вида:

$$\underline{K} \cdot \underline{u}(t) = \underline{0}, \quad (2.11.7)$$

където $\underline{u}(t)$ е матрицата -колона на клоновите напрежения.

2.11.4. Връзки между структурните матрици

Дадените правила за съставянето на структурните матрици $\underline{B}$ и $\underline{C}$ и $\underline{K}$, както и показаните някои техни свойства, свързани с първия и втория закон на Кирхоф, потвърждават основното им предназначение да трансформират топологичните структури в алгебрични изрази. От дадените правила за съставянето им при един и същи граф, могат да се очакват и определени връзки между матрици $\underline{B}$ и $\underline{C}$ и $\underline{K}$, тъй като и трите се съставят на базата на едни и същи клонове и възли. Такива връзки съществуват и те са:

$$\underline{B} \cdot \underline{K}_t = \underline{0} \quad \text{и} \quad \underline{K} \cdot \underline{B}_t = \underline{0}; \quad (2.11.8)$$

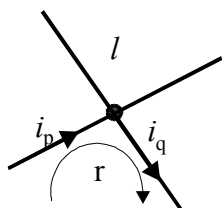
$$\underline{C} \cdot \underline{K}_t = \underline{0} \quad \text{и} \quad \underline{K} \cdot \underline{C}_t = \underline{0}. \quad (2.11.9)$$

Доказателството на една от тях ще бъде извършено по два начина:

а) първи начин – чрез използването на примера от фиг. 2.11.1.

Клоновете с номера p и q имат обща точка във възела ℓ и принадлежат на контура с номер r . При избраните посоки на токовете i_p и i_q и на контура r се записва:

$B_{\ell p} = -1$; $B_{\ell q} = -1$; $K_{rp} = 1$; $K_{rq} = 1$. Тогава матриците $\underline{B}$ и $\underline{K}$ са



съответно: $\underline{B} = [-1 \ 1]$; $\underline{K} = [1 \ 1]$; $\underline{B}_t = \begin{bmatrix} -1 \\ +1 \end{bmatrix}$. Произведението $\underline{K} \cdot$

$$\underline{B}_t = [1 \ 1] \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ +1 \end{bmatrix} = -1 + 1 = \underline{0}.$$

б) втори начин – чрез транспониране на матричното произведение. $(\underline{K} \cdot \underline{B}_t)_t = \underline{0}_t$.

Фиг.2.11.1

Транспонираното матрично произведение е равно на произведените на транспонираниите множители, които сменят местата си, т.е.:

$$(\underline{B}_t)_t \cdot \underline{K}_t = \underline{0}_t. \quad (2.11.11)$$

Тогава се получава:

$$\underline{B} \cdot \underline{K}_t = \underline{0}. \quad (2.11.12)$$

III. ЛИНЕЙНИ ЕЛЕКТРИЧЕСКИ ВЕРИГИ. ПРЕОБРАЗУВАНЕ И МЕТОДИ ЗА АНАЛИЗ НА СЛОЖНИ ВЕРИГИ. ОСНОВНИ ПРИНЦИПИ И ТЕОРЕМИ

Встъпителни бележки

В раздела се разглеждат методите за преобразуване на пасивни и активни линейни електрически вериги, а също и методите за анализ на сложни вериги с контурни токове и възлови потенциали. Дават се основните принципи като принцип на наслагването на пропорционалността, на взаимността и обратимостта и основните теореми, като теорема за компенсацията, за еквивалентния генератор, за вариациите. Както при основните закони и баланса на мощностите, така и тук е удобно разглеждането да бъде направено при веригите за постоянен ток, а след това при веригите за променлив ток да бъде извършено обобщение.

3.1. Преобразуване на линейни електрически вериги - общи положения.

Преобразуване на пасивни и активни вериги

1. Общи положения

В редица случай анализът на сложни електрически вериги може да бъде облекчен, ако предварително се извърши преобразуване на веригите. Чрез преобразуването се цели да се намали броят на възлите и контурите, оттам и броят на уравненията.

При всяко преобразуване на дадена електрическа верига, тя трябва да бъде заменена с еквивалентна верига. Това означава, че токовете и напреженията на непреобразуваната част на веригата трябва да останат неизменени, т.е. да бъде запазен режимът ѝ на работа.

При преобразуване на пасивна част на електрическа верига мощностите, консумирани от отделните клонове се запазват. При преобразуване на активна част, обаче сумата от мощностите на източниците и консуматорите в изходната верига в общия случай не е равна на сумата от мощностите в еквивалентната верига.

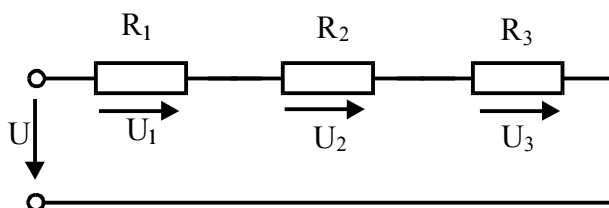
1. Преобразуване на пасивни електрически вериги

Най-често срещаните случаи на преобразуване на пасивни електрически вериги

са преобразуванията на последователно, паралелно и смесено съединение на пасивни участъци и на съединението триъгълник на пасивни участъци в съединението звезда и обратно. По-долу последователно се разглеждат тези преобразувания.

а) Преобразуване на последователно съединение на пасивни участъци

Разглежда се пасивна верига, съставена от последователно съединени участъци със съпротивления R_1 , R_2 и R_3 , към която е подадено напрежение U (фиг. 3.1.1). Под действието на напрежението U през веригата преминава ток I и върху участъците ѝ се установяват напрежения U_1 , U_2 и U_3 .



Фиг.3.1.1

Въз основа на втория закон на Кирхоф се записва уравнението:

$$U = U_1 + U_2 + U_3. \quad (3.1.1)$$

По закона на Ом отделните напрежения се изразяват чрез тока I и съответните съпротивления на участъците, т.е.:

$$U_1 = R_1 \cdot I; U_2 = R_2 \cdot I \text{ и } U_3 = R_3 \cdot I. \quad (3.1.2)$$

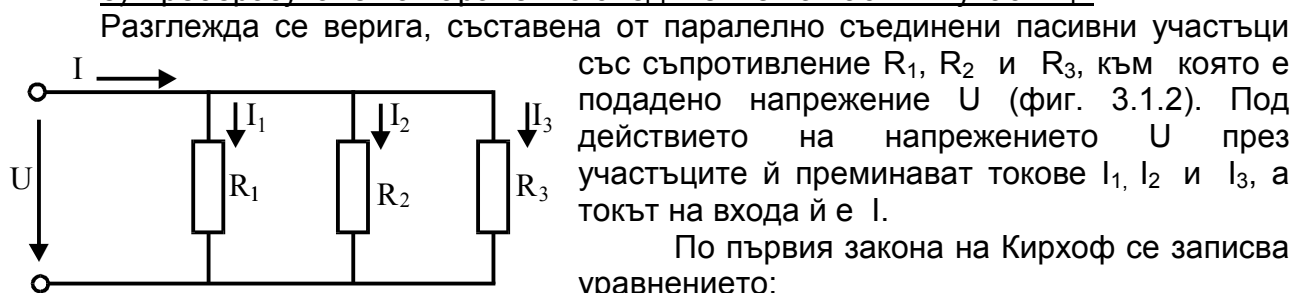
След заместване на израз (3.1.2) в уравнение (3.1.1) се получава :

$$U = I (R_1 + R_2 + R_3) = I \cdot R_e, \quad (3.1.3)$$

където $R_e = R_1 + R_2 + R_3$.

Последният израз показва, че последователното съединение на пасивни участъци може да бъде заменено с еквивалентен пасивен участък със съпротивление R_e , равно на сумата от съпротивления на отделните участъци.

б) Преобразуване на паралелно съединение на пасивни участъци



Фиг.3.1.2

Разглежда се верига, съставена от паралелно съединени пасивни участъци със съпротивление R_1 , R_2 и R_3 , към която е подадено напрежение U (фиг. 3.1.2). Под действието на напрежението U през участъците й преминават токове I_1 , I_2 и I_3 , а токът на входа й е I .

По първия закона на Кирхоф се записва уравнението:

$$I = I_1 + I_2 + I_3. \quad (3.1.4)$$

По закона на Ом токовете I_1 , I_2 и I_3 се изразяват чрез напрежението U и съответните съпротивления на участъците, т.е.:

$$I_1 = U/R_1; I_2 = U/R_2 \text{ и } I_3 = U/R_3. \quad (3.1.5)$$

След заместване на израз (3.1.5) в уравнение (3.1.4) се получава:

$$I = U(1/R_1 + 1/R_2 + 1/R_3) = U/R_e, \quad (3.1.6)$$

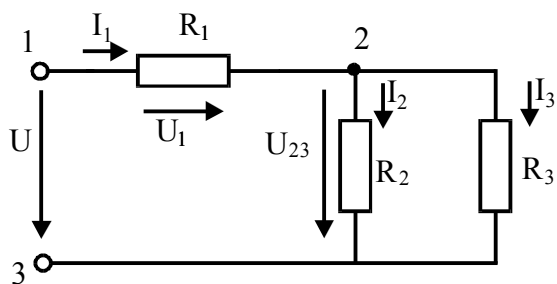
където $1/R_e = 1/R_1 + 1/R_2 + 1/R_3$.

Въз основа на последния израз може да се заключи, че паралелното съединение на пасивни участъци може да бъде заменено с еквивалентен пасивен участък със съпротивление R_e , чиято реципрочна стойност е равна на сумата от реципрочните стойности на съпротивления на отделните участъци.

в) Преобразуване на смесено съединение на пасивни участъци

Смесеното съединение на пасивни участъци представлява съчетание на последователно и паралелно съединение. Ето защо то може да бъде разглеждано като последователно–паралелно съединение.

За илюстрация на фиг. 3.1.3 е показана схемата на електрическа верига, съставена от три смесено съединени пасивни участъци със съпротивления R_1 , R_2 и R_3 . Към веригата е подадено напрежение U , под действието на което през участъците й преминават токове I_1 , I_2 и I_3 и се установяват напрежения U_1 и $U_2 = U_3 = U_{23}$.



Фиг.3.1.3

Въз основа на разгледаното при последователно и паралелно съединение на пасивни участъци смесеното съединение на участъци от фиг. 3.1.3 може да бъде заменено с еквивалентен пасивен участък със съпротивление R_e . Съпротивлението R_e се определя по формулата:

$$R_e = R_1 + R_{23}, \quad (3.1.7)$$

където $1/R_{23} = 1/R_2 + 1/R_3$, т.е.: $R_{23} = R_2 R_3 / (R_2 + R_3)$.

До горния резултат може да се достигне въз основа на законите на Кирхоф и Ом.

По първия закон на Кирхоф се записва уравнението:

$$I_1 = I_2 + I_3, \quad (3.1.8)$$

а по втория закон на Кирхоф - уравнението:

$$U = U_1 + U_{23}. \quad (3.1.8)$$

Напрежението U_{23} се определя въз основа на закона на Ом, т.е.:

$$U_{23} = R_2 I_2 = R_3 I_3 = R_{23} I_1. \quad (3.1.9)$$

От изрази (3.1.8) и (3.1.9) се записва:

$$U = R_1 I_1 + R_{23} I_1 = I_1 (R_1 + R_{23}) = I_1 R_e, \quad (3.1.10)$$

т.е.: $R_e = R_1 + R_{23}$.

Въз основа на уравнение (3.1.9) за токовете I_2 и I_3 се получава:

$$I_2 = \frac{U_{23}}{R_2} = I_1 \frac{R_{23}}{R_2} = I_1 \frac{R_3}{R_2 + R_3} \quad \text{и} \quad I_3 = \frac{U_{23}}{R_3} = I_1 \frac{R_{23}}{R_3} = I_1 \frac{R_2}{R_2 + R_3}. \quad (3.1.11)$$

Последните изрази позволяват определянето на токовете I_2 и I_3 през два паралелно съединени пасивни участъка със съпротивления R_2 и R_3 при известен общ ток I_1 (правило за двата паралелни клона).

За веригата, показана на фиг. 3.1.3, се разглеждат и енергийните съотношения. За целта се записват изрази за мощностите P_1 , P_2 и P_3 в отделните ѝ участъци:

$$P_1 = U_1 I_1; \quad P_2 = U_{23} I_2 \quad \text{и} \quad P_3 = U_{23} I_3 \quad (3.1.12)$$

След сумиране на мощностите P_1 , P_2 и P_3 се получава мощността P , която се подава към веригата, т.е.:

$$P_1 + P_2 + P_3 = U_1 I_1 + U_{23} I_2 + U_{23} I_3 = U_1 I_1 + U_{23} (I_2 + I_3) = U_1 I_1 + U_{23} I_1 = (U_1 + U_{23}) I_1 = U I_1 = P. \quad (3.1.13)$$

До аналогичен резултат се достига ако мощностите P_1 , P_2 и P_3 се определят от изразите:

$$P_1 = R_1 I_1^2; \quad P_2 = R_2 I_2^2 \quad \text{и} \quad P_3 = R_3 I_3^2. \quad (3.1.14)$$

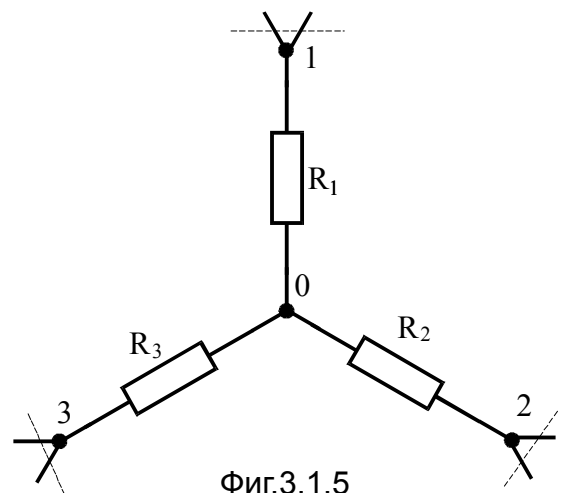
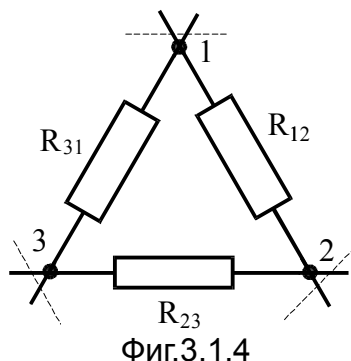
И действително, като се има предвид, че за сумата от мощностите P_1 , P_2 и P_3 се записва:

$$\begin{aligned} P_1 + P_2 + P_3 &= R_1 I_1^2 + I_1^2 R_{23}^2 (R_2 + I_1^2 R_{23}) R_3 = \\ &= R_1 I_1^2 + I_1^2 R_{23}^2 (1/R_2 + 1/R_3) = (R_1 + R_{23}) I_1^2 = R_e I_1^2 = P, \end{aligned} \quad (3.1.15)$$

то отново се получава мощността P , която се подава към веригата.

г) Преобразуване на съединение триъгълник на пасивни участъци в съединение звезда и обратно

При изследване на електрически вериги се срещат съединения на три пасивни участъка, свързани във вид на триъгълник (фиг. 3.1.4) или звезда (фиг. 3.1.5). В редица случаи се оказва, че ако съединението триъгълник се замени с



еквивалентно съединение звезда или се извърши обратното преобразуване, то анализът на веригата значително се облекчава.

За намиране на зависимостите между параметрите на съединението триъгълник и еквивалентното съединение звезда се изхожда от условието за еквивалентност на преобразуването, т.е. токовете и напреженията в непреобразуваната част на веригата да останат непроменени.

За целта последователно се прекъсва външната верига към точки 1, 2 и 3. При прекъсване към точка 1, токът във външната верига при дадените напрежения няма да се промени, ако еквивалентното съпротивление между точки 2 и 3 е еднакво за двете съединения. Така се получава уравнението:

$$R_2 + R_3 = R_{23}(R_{12} + R_{31})/S_{\Delta},$$

където $S_{\Delta} = R_{12} + R_{23} + R_{31}$.

По аналогичен начин след прекъсване на външната верига към точки 2 и 3 се съставят още две уравнения. Така се достига до следната система уравнения:

$$\begin{cases} R_1 + R_2 = R_{12}(R_{23} + R_{31})/S_{\Delta}; \\ R_2 + R_3 = R_{23}(R_{12} + R_{31})/S_{\Delta}; \\ R_3 + R_1 = R_{31}(R_{12} + R_{23})/S_{\Delta}. \end{cases} \quad (3.1.16)$$

Ако тази система се реши спрямо съпротивленията R_1 , R_2 и R_3 се получават изразите:

$$R_1 = \frac{R_{12}R_{31}}{S_{\Delta}}; R_2 = \frac{R_{23}R_{12}}{S_{\Delta}} \text{ и } R_3 = \frac{R_{31}R_{23}}{S_{\Delta}}. \quad (3.1.17)$$

За решаване на обратна задача, т.е. за намиране на параметрите на еквивалентното съединение триъгълник, формула (3.1.17) се записва във вида:

$$\begin{aligned} R_{12}R_{31} &= R_1S_{\Delta}; \\ R_{23}R_{12} &= R_2S_{\Delta}; \\ R_{31}R_{23} &= R_3S_{\Delta}. \end{aligned} \quad (3.1.18)$$

Съставя се сумата от циклични произведения от вида:

$$S_{\Delta} = R_1R_2 + R_2R_3 + R_3R_1 = R_{12}R_{23}R_{31}/S_{\Delta}. \quad (3.1.19)$$

Ако се отчетат изрази (3.1.17), се установява, че:

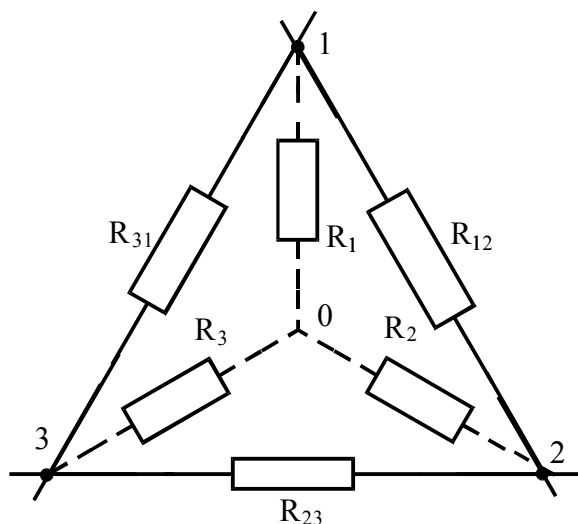
$$S_{\Delta} = R_1R_{23} = R_2R_{31} = R_3R_{12}, \quad (3.1.20)$$

откъдето за съпротивленията R_{12} , R_{23} и R_{31} на еквивалентното съединение триъгълник се получават следните изрази:

$$R_{12} = S_{\Delta}/R_3; R_{23} = S_{\Delta}/R_1; R_{31} = S_{\Delta}/R_2. \quad (3.1.21)$$

За определяне на зависимостите между параметрите на еквивалентните съединения триъгълник и звезда могат да бъдат използвани следните две практически правила:

1. Съпротивлението на даден клон на еквивалентното съединение звезда се определя, като произведението от съпротивленията на двата обграждащи



Фиг.3.1.6

клона на изходното съединение триъгълник се раздели със сумата от съпротивленията на всичките му клонове.

2. Съпротивлението на даден клон на еквивалентното съединение триъгълник се получава, като сумата от цикличните произведения на съпротивленията на всеки два клона на съединението звезда се раздели със съпротивлението на лежащия срещу разглеждания клон на съединението триъгълник клон на съединението звезда.

За по-добро онагледяване на тези правила е удобно две съединения да бъдат представени съвместно. Това е илюстрирано на фиг. 3.1.6.

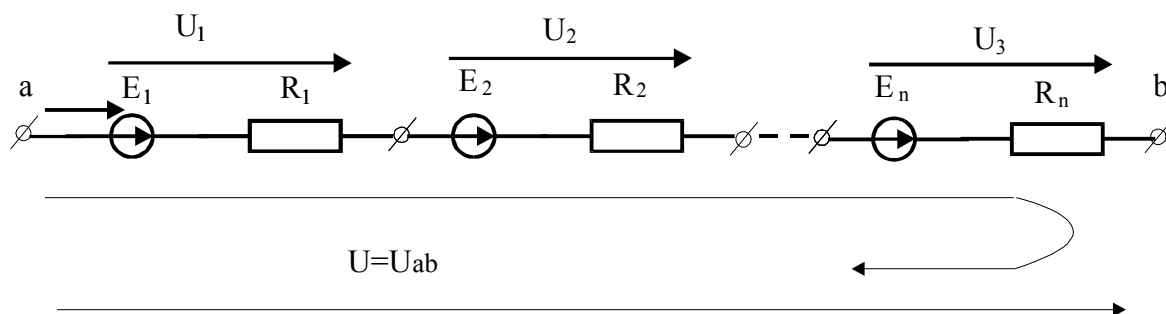
3. Преобразуване на активни електрически вериги

Най-често срещаните случаи на преобразуване на активни електрически вериги са преобразованията на последователно съединени активни участъци от последователен тип, на паралелно съединение на активни участъци от паралелен тип, на паралелно съединение на активни участъци от последователен тип, прехвърляне на идеален източник на ЕДН през възел и пренасяне на идеален източник на ток в контур.

По-долу последователно се разглеждат тези преобразувания:

а) преобразуване на последователно съединени активни участъци от последователен тип

Разглежда се активна верига, съставена от n последователно съединени активни участъци от последователен тип, съдържащи източници на ЕДН $E_1, E_2, \dots, E_n$



Фиг.3.1.7

и резистори със съпротивления $R_1, R_2, \dots, R_n$ (фиг. 3.1.7).

Въз основа на втория закон на Кирхоф се записва уравнението:

$$-U + \sum_{k=1}^n R_k I = \sum_{k=1}^n E_k, \quad (3.1.22)$$

откъдето за напрежението U се получава:

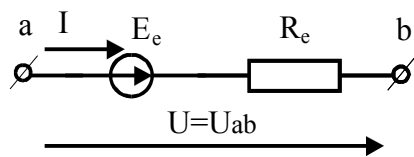
$$U = \phi_a - \phi_b = I \sum_{k=1}^n R_k - \sum_{k=1}^n E_k. \quad (3.1.23)$$

След полаганията:

$$R_e = \sum_{k=1}^n R_k \quad \text{и} \quad E_e = \sum_{k=1}^n E_k \quad (3.1.24)$$

се достига до израза:

$$U = IR_e - E_e, \quad (3.1.25)$$



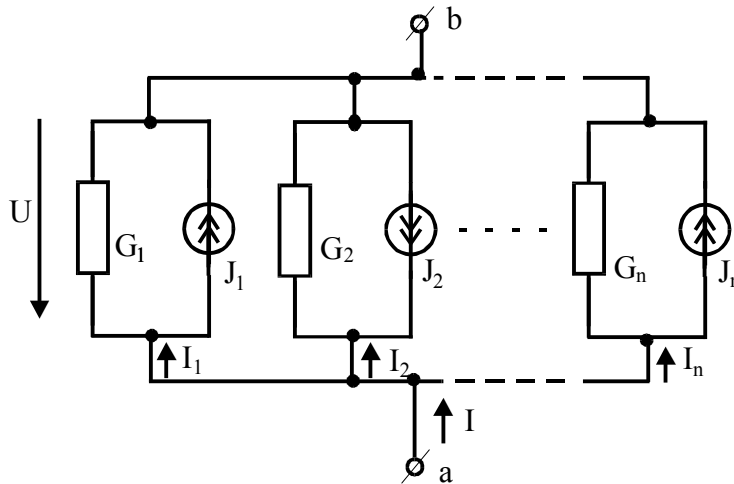
Фиг.3.1.8

на който съответствува схемата от фиг. 3.1.8.

Въз основа на разглежданото по-горе, може да се заключи, че последователното съединение на активни участъци от последователен тип може да бъде заменено с еквивалентен активен участък от последователен тип с източник ЕДН E_e , равно на алгебричната сума от ЕДН E_k на участъците, и съпротивление R_e , равно на сумата от съпротивленията R_k на участъците.

б) преобразуване на паралелно съединение на активни участъци от паралелен тип

Разглежда се активна верига, съставена от n паралелно съединени активни участъка от паралелен тип, съдържащи източници на ток $J_1, J_2, \dots, J_n$ и резистори с проводимостта $G_1, G_2, \dots, G_n$ (фиг. 3.1.9).



Фиг.3.1.9

Въз основа на първия закон на Кирхоф се записва уравнението:

$$I = \sum_{k=1}^n I_k = \sum_{k=1}^n J_k - \sum_{k=1}^n G_k U. \quad (3.1.26)$$

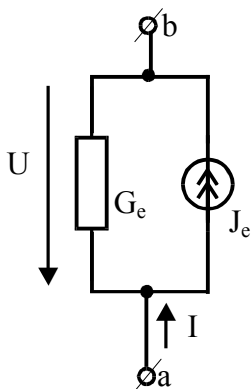
След полаганията :

$$G_e = \sum_{k=1}^n G_k \quad \text{и} \quad J_e = \sum_{k=1}^n J_k \quad (3.1.27)$$

се достига до израза:

$$I = J_e - G_e U, \quad (3.1.28)$$

на който съответствува схемата от фиг. 3.1.10.



Фиг.3.1.10

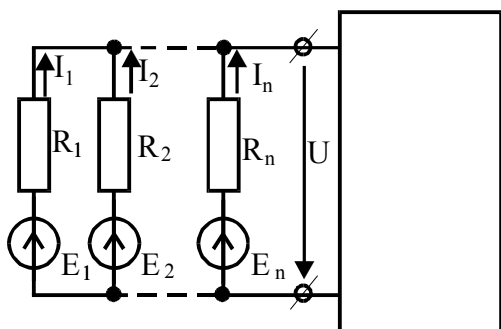
Въз основа на разглежданото по-горе може да се заключи, че паралелното съединение на активни участъци от паралелен тип може да бъде заменено с еквивалентен активен участък от паралелен тип с източник на ток J_e с ток, равен на алгебричната сума от токове J_k на участъците, и резистор с проводимост G_e , равна на сумата от проводимостите G_k на участъците.

в) преобразуване на паралелно съединение на активни участъци от последователен тип

Разглежда се активна верига, съставена от n паралелно съединени активни участъка от последователен тип, съдържащи източници на ЕДН $E_1, E_2, \dots, E_n$ и резистори със съпротивления $R_1, R_2, \dots, R_n$ (фиг. 3.1.11)

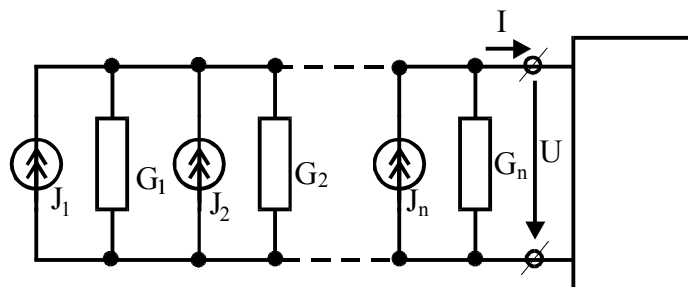
Заменят се източниците на ЕДН E_k с еквивалентни източници на ток с ток J_k и вътрешна проводимост G_k , които се определят по формулите:

$$J_k = E_k / R_k. \quad (3.1.29)$$



Фиг.3.1.11

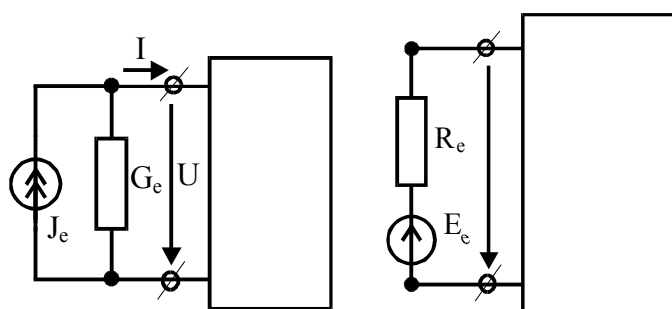
$$G_k = 1/R_k.$$



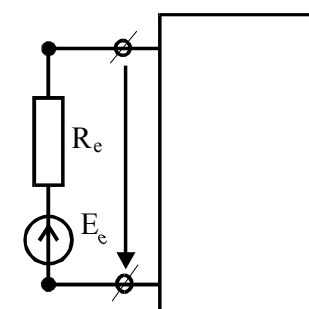
Фиг.3.1.12

$$(3.1.30)$$

Така се достига до веригата, чиято схема е показана на фиг. 3.1.12.



Фиг.3.1.13



Фиг.3.1.14

Източниците на ток J_k с вътрешни проводимости G_k от последната схема могат да бъдат обединени в един общ еквивалентен източник на ток с ток J_e и с вътрешна проводимост G_e (фиг. 3.1.13), които се определят по формулите:

$$J_e = \sum_{k=1}^n J_k = \sum_{k=1}^n E_k G_k; \quad (3.1.31)$$

$$G_e = \sum_{k=1}^n G_k. \quad (3.1.32)$$

По-нататък източникът на ток J_e с вътрешна проводимост G_e се заменя с еквивалентен източник на ЕДН E_e с вътрешно съпротивление R_e (фиг. 3.1.14) по формулите:

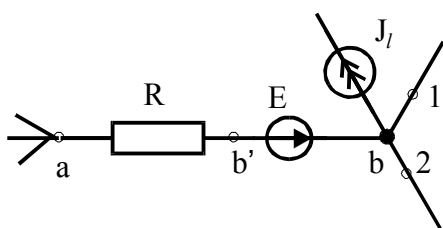
$$E_e = J_e / G_e = \sum_{k=1}^n E_k G_k / \sum_{k=1}^n G_k; \quad (3.1.33)$$

$$R_e = 1 / G_e = 1 / \sum_{k=1}^n G_k. \quad (3.1.36)$$

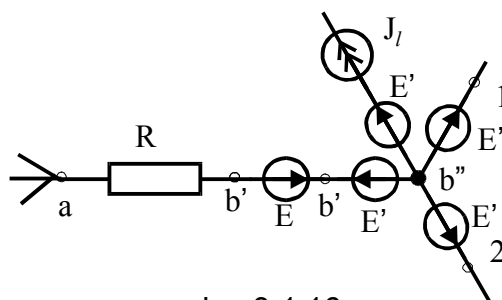
От последните формули може да се установи, че ЕДН E_e на еквивалентния източник зависи не само от ЕДН E_k на паралелните участъци, но и от проводимостите им G_k , докато еквивалентното съпротивление R_e зависи само от проводимостите G_k .

г) прехвърляне на идеален източник на ЕДН през възел

Преобразуването прехвърляне на идеален източник на ЕДН през възел ще бъде разгледано върху пример (фиг. 3.1.15). Прехвърлянето на източника на ЕДН E ще бъде извършено през възел b .



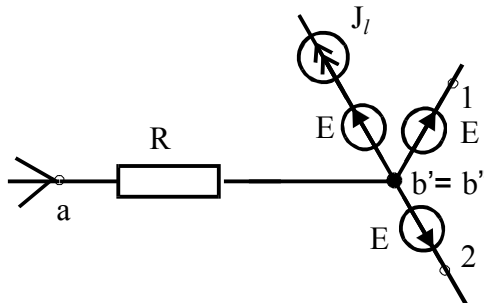
Фиг.3.1.15



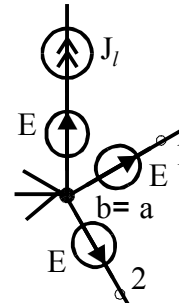
Фиг.3.1.16

За целта във всички клонове, свързани към възел b , се включват източници на ЕДН E' , еднакво ориентирани спрямо възела (в случая с посоката от възел b (фиг. 3.1.16)). Включването на източниците E' не изменя разпределението на токовете във веригата тъй като в уравненията, съставени по втория закон на Кирхоф за контурите, съдържащи възел b се добавят нулеви суми от вида: $E' - E' = 0$.

Ако ЕДН E' е равно на ЕДН E , то схемата от фиг. 3.1.16 може да бъде опростена (фиг. 3.1.17).



Фиг.3.1.17



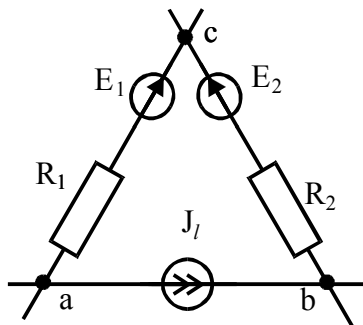
Фиг.3.1.18

В случай, че в изходната верига резисторът R отсъства, т.е.: $R = 0$, то схемата от фиг. 3.1.17 добива вида, показан на фиг.3.1.18.

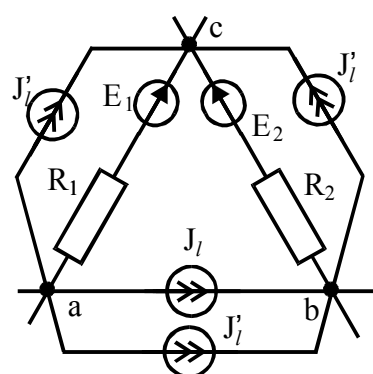
От последната схема може да се заключи, че чрез преобразуването прехвърляне на идеален източник на ЕДН през възел се намалява броят на възлите на веригата.

д) пренасяне на идеален източник на ток в контур

Преобразуването пренасяне на идеален източник на ток в контур също ще бъде разгледано върху пример (фиг. 3.1.19). За обосноваване на това



Фиг.3.1.19

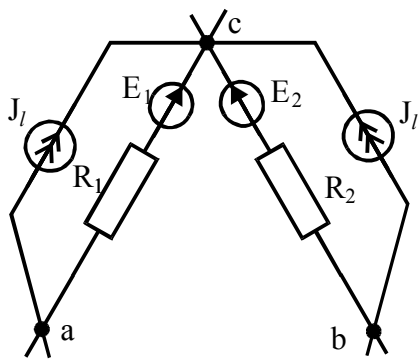


Фиг.3.1.20

преобразуване, паралелно на всички клонове, образуващи контура, се включват идеални източници на ток J'_l , еднакво ориентирани спрямо контура (в случая по посока на часовниковата стрелка – фиг. 3.1.20). Включването на източниците J'_l не изменя разпределението на токовете във веригата, тъй като в уравненията, съставени по първия закон на Кирхоф за възлите, съдържащи се в контура, се добавят нулеви суми от вида: $J'_l - J'_l = 0$.

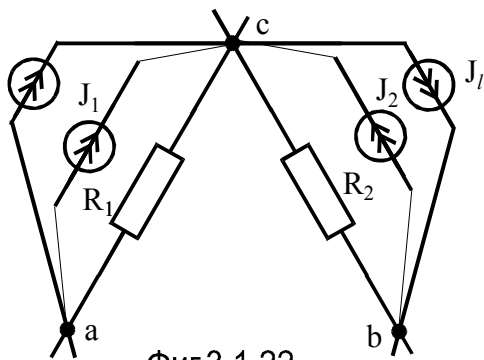
Ако токът J'_l е равен на тока J_l , то схемата от фиг. 3.1.20 може да бъде опростена (фиг. 3.1.21).

За по-нататъшно опростяване на веригата, то в схемата от фиг. 3.1.21 източниците на ЕДН E_1 и E_2 се заменят с еквивалентни източници на ток $J_1 = E_1/R_1$ и $J_2 = E_2/R_2$ (фиг. 3.1.22). Източниците на ток J_1 и J_l и съответно J_2 и J_l могат да бъдат обединени, т.е.: $J'_1 = J_1 + J_l = E_1/R_1 + J_l$ и $J'_2 = J_2 - J_l = E_2/R_2 - J_l$. Така се достига до схемата от фиг. 3.1.23.



Фиг.3.1.21

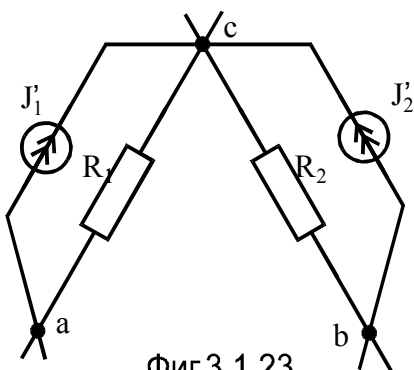
63



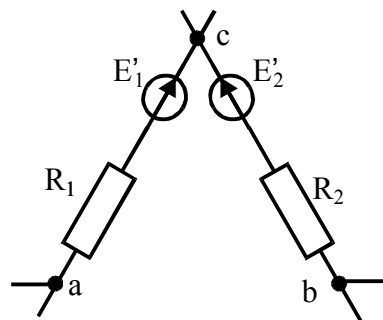
Фиг.3.1.22

В схемата от фиг. 3.1.23 е целесъобразно източниците на ток J'_1 и J'_2 да бъдат заменени с еквивалентни източници на ЕДН $E'_1 = R_1 J'_1 = E_1 + R_1 J_1$ и $E'_2 = R_2 J'_2 = E_2 + R_2 J_2$. Така се получава схемата от фиг. 3.1.24.

От сравняването на схемите от фиг. 3.1.19 и фиг. 3.1.24, може да се заключи, че чрез преобразуването пренасяне на идеален източник на ток в контур, се намалява броят на контурите на веригата.



Фиг.3.1.23



Фиг.3.1.24

3.2. Методи за изследване на сложни линейни електрически вериги

1. Общи сведения

Основните методи за изследване на сложни линейни електрически вериги могат да бъдат разделени на две групи.

Първата група обхваща общи методи, при които се съставя и решава система уравнения на изследваната верига. Към тази група се отнасят следните методи: метод с клонови токове, метод с контурни токове и метод с възлови потенциали. Тези методи позволяват изследването на каква да е сложна линейна електрическа верига.

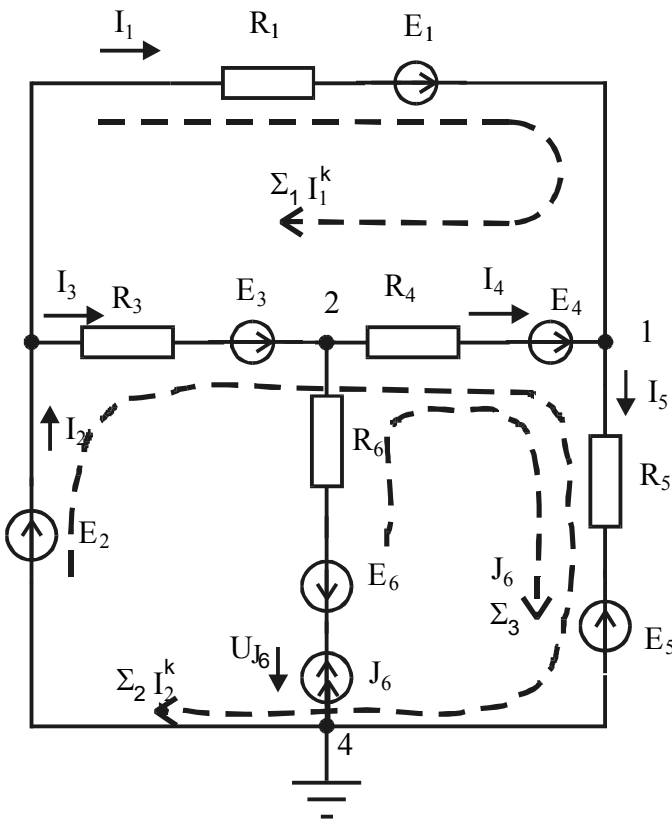
Втората група включва такива методи, при които изследването на някои сложни електрически вериги след съответни преобразувания се свежда до изследване на прости вериги. Към тази група се включват методи, основаващи се на използването на различните преобразувания на пасивни и активни електрически вериги, както и на използване на принципите и теоремите за електрическите вериги.

В по-нататъшното изложение ще бъдат дадени основните положения на методите от първата група. Тези методи ще бъдат разглеждани последователно.

2. Метод с клонови токове

Методът с клонови токове се основава на законите на Кирхоф. При този метод се съставя система уравнения, чийто брой е равен на броя на неизвестните клонови токове.

В случай на сложна верига с m клон и p възела, то по първия закон на Кирхоф се съставят $(p - 1)$ независими уравнения. Останалите уравнения се съставят по втория закон на Кирхоф.



Фиг.3.2.1

записват със знак плюс “+” в уравнението на контура. В противен случай знакът е минус “-”.

Ако разглежданата верига съдържа клонове с източници на ток и техният брой е $n_{\text{тг}}$, то броят на неизвестните клонови токове е: $m_x = m - n_{\text{тг}}$. В този случай броят на уравненията, които се съставят по втория закон на Кирхоф е: $q_x = q - n_{\text{тг}}$. Тук следва да се има предвид още, че за определяне на клоновите токове, то уравнения по втория закон на Кирхоф не се съставят за независими контури, съдържащи клонове с източници на ток. Уравнения по втория закон на Кирхоф за такива контури могат да бъдат съставени само в случай, че се търсят напреженията на тези източници (например, във връзка с пресмятане на мощността и проверка на баланса на мощностите).

За илюстрация на метода с клонови токове се разглежда веригата, чиято схема е показана на фиг. 3.2.1. За тази верига може да се запише: брой на клоновете $m = 6$; брой на възлите $p = 4$; брой на клоновете с източници на ток $n_{\text{тг}} = 1$ и брой неизвестните клонови токове $m_x = m - n_{\text{тг}} = 5$.

По първия закон на Кирхоф могат да бъдат съставени $p - 1 = 3$ независими уравнения. За възли 1, 2 и 3 тези уравнения са:

$$\text{в.1} \rightarrow I_1 - I_2 + I_3 = 0;$$

$$\text{в.2} \rightarrow -I_3 + I_4 - J_6 = 0;$$

$$\text{в.3} \rightarrow -I_1 - I_4 + I_5 = 0.$$

По втория закон на Кирхоф могат да бъдат съставени $q_x = q - n_{\text{тг}} = m - p + 1 - n_{\text{тг}} = 2$ независими уравнения. За контурите 1 и 2 тези уравнения са:

$$\text{к-р 1} \rightarrow R_1 I_1 - R_4 I_4 - R_3 I_3 = E_1 - E_4 - E_3;$$

$$\text{к-р 2} \rightarrow R_3 I_3 + R_4 I_4 + R_5 I_5 = E_3 + E_4 - E_5 + E_2.$$

За контура 3, съдържащ клон с източник на ток J_6 , по втория закон на Кирхоф се записва следното уравнение:

Във връзка със съставянето на системата уравнения по метода с клонови токове е необходимо предварително да бъдат зададени условни посоки на клоновите токове. Ако в резултат на пресмятанията за някой от клонови токове се получат отрицателни стойности, то това означава, че действителните посоки им са обратни на условно приетите.

Във връзка със съставянето на уравненията по втория закон на Кирхоф е необходимо да се изберат така наречените независими контури. Това са такива контури, всеки от които включва поне един клон, който не се съдържа в останалите контури. Необходимо е още да бъдат зададени посоки на сумиране (обход) на контурите. Ако ЕДН, действащи в даден контур, и напреженията на клоновете, съставлящи контура, съвпадат по посока с посоката на сумиране по контура, то те се

$k - p - 3 \rightarrow R_4 I_4 + R_5 I_5 - U_{J_6} + R_6 I_6 = E_4 - E_5 - E_6$, от което може да бъде определено напрежението U_{J_6} на източника на ток J_6 .

3. Метод с контурни токове

Както бе разгледано по-горе, по метода с клонови токове се съставя система уравнения, чийто брой е равен на неизвестните клонови токове. Методите с контурни токове и с възлови потенциали позволяват определянето на клоновите токове чрез съставяне на системи уравнения с по-малък брой уравнения от броя на неизвестните клонови токове. За целта се въвеждат нови неизвестни, чрез които се определят клоновите токове.

Методът с контурни токове се базира на втория закон на Кирхоф. Броят на уравненията, съставени по този метод, е равен на броя на неизвестните уравнения, съставени по втория закон на Кирхоф, т.е. този брой при верига с m клоната, p възела и $n_{\text{тр}}$ източници на ток е: $q_x = q - n_{\text{тр}} = m - p + 1 - n_{\text{тр}}$.

Методът с контурни токове се обосновава чрез законите на Кирхоф. За целта се избират независимите контури, задават се посоките на сумиране по тези контури и се записва системата уравнения по втория закон на Кирхоф. От тази система като се използва първия закон на Кирхоф, се изключват токовете в общите клонове на веригата. Така се получава система уравнения с неизвестни токове в клоновете на съответните контури, които не участват в останалите контури, т.е. условно се приема, че през всеки контур преминава съответен контурен ток.

В случай на верига с n независими контури по метода с контурни токове се записва следната система уравнения:

$$\begin{cases} R_{11} I_1^k + R_{12} I_2^k + \dots + R_{1k} I_k^k + \dots + R_{1n} I_n^k = E_{11}; \\ R_{21} I_1^k + R_{22} I_2^k + \dots + R_{2k} I_k^k + \dots + R_{2n} I_n^k = E_{22}; \\ R_{k1} I_1^k + R_{k2} I_2^k + \dots + R_{kk} I_k^k + \dots + R_{kn} I_n^k = E_{kk}; \\ R_{n1} I_1^k + R_{n2} I_2^k + \dots + R_{nk} I_k^k + \dots + R_{nn} I_n^k = E_{nn}. \end{cases} \quad (3.2.1)$$

Отделните означения в система (3.2.1) са както следва:

$R_{11}, R_{22}, \dots, R_{kk}, \dots, R_{nn}$ са собствените контурни съпротивления на съответните независими контури. Тези съпротивления са равни на сумите от съпротивленията на клоновете, съставляващи съответния контур;

$R_{kl} = R_{lk}$ - общите (взаимните) контурни съпротивления на независимите контури с номера k и l . Тези съпротивления са равни на алгебричната сума от съпротивленията на общите клонове за двата контура. При това в тази сума със знак "+" участвуват онези съпротивления на общи клонове, при които двата контурни тока имат еднакви посоки;

$I_1^k, I_2^k, \dots, I_k^k, \dots, I_n^k$ - контурните токове на съответните контури;

$E_{11}, E_{22}, \dots, E_{kk}, \dots, E_{nn}$ - контурните ЕДН на съответните независими контури. Тези ЕДН са равни на алгебричната сума от ЕДН, действащи в клоновете съставлящи съответния контур. В тази сума със знак плюс "+" се записват онези ЕДН, чиято посока съвпада с посоката на контурния ток на разглеждания контур.

Въз основа на система (3.2.1) за контурния ток I_k^x на k -тия контур се записва уравнението;

$$I_k^x = \frac{A_{1k}}{D} E_{11} + \frac{A_{2k}}{D} E_{22} + \dots + \frac{A_{kk}}{D} E_{kk} + \dots + \frac{A_{nk}}{D} E_{nn}. \quad (3.2.2)$$

В последното уравнение с D е означена детерминантата от коефициентите пред неизвестните контурни токове, т.е.:

$$D = \begin{vmatrix} R_{11} & R_{12} & \dots & R_{1k} & \dots & R_{1n} \\ R_{21} & R_{22} & \dots & R_{2k} & \dots & R_{2n} \\ R_{k1} & R_{k2} & \dots & R_{kk} & \dots & R_{kn} \\ R_{n1} & R_{n2} & \dots & R_{nk} & \dots & R_{nn} \end{vmatrix}. \quad (3.2.3)$$

В уравнение (3.2.2) величините $A_{lk} = A_{kl}$ ($l = 1, 2, \dots, n$) представляват адюнгираните количества на елементите на k -тия ред и l -тия стълб на детерминантата D , умножени с $(-1)^{l+k}$.

След определянето на контурните токове $I_1^k, I_2^k, \dots, I_k^k, \dots, I_n^k$ от системата (3.2.1), клоновете токове $I_1, I_2, \dots, I_k, \dots, I_n, \dots, I_m$ се представят като алгебрична сума от контурни токове, преминаващи през съответния клон. При това в тази сума със знак “+” се записват онези контурни токове, чиято посока съвпада с условно приетата посока на съответния клонов ток.

В случай, че във веригата се съдържат клонове с източници на ток и техния брой е $n_{\text{тг}}$, то се избират контури, през които преминават токовете $J_1, J_2, \dots, J_{n_{\text{тг}}}$ на тези източници. При това за тези контури не се записват уравнения по метода с контурни токове. При записването на уравненията за останалите контури, обаче трябва да се вземат предвид падовете на напрежения, дължащи се на токовете $J_1, J_2, \dots, J_{n_{\text{тг}}}$ в $I^{\text{то}}$ уравнение на системата (3.2.1) се добавят членовете:

$$R_{1\Gamma 1}J_1 + R_{1\Gamma 2}J_2 + \dots + R_{1\Gamma n_{\text{тг}}}J_{n_{\text{тг}}}.$$

Величините $R_{1\Gamma 1}, R_{1\Gamma 2}, \dots, R_{1\Gamma n_{\text{тг}}}$ представляват общите (взаимните) съпротивления на контура 1 и на контура през който преминава съответния ток $J_1, J_2, \dots, J_{n_{\text{тг}}}$. Тези съпротивления се определят по аналогичен начин, както съпротивленията R_{kl} .

За илюстрация на метода с контурни токове се разглежда веригата, чиято схема е показана на фиг. 3.2.1. За избраните независими контури с контурни токове I_1^k и I_2^k се записва следната система уравнения:

$$\begin{cases} R_{11}I_1^k + R_{12}I_2^k + R_{1\Gamma 6}J_6 = E_{11}; \\ R_{21}I_1^k + R_{22}I_2^k + R_{2\Gamma 6}J_6 = E_{22}. \end{cases}$$

Означенията в тази система са както следва:

$$R_{11} = R_1 + R_3 + R_4; R_{22} = R_3 + R_4 + R_5; R_{12} = R_{21} = -R_3 - R_4; R_{1\Gamma 6} = -R_4; R_{2\Gamma 6} = R_4 + R_5;$$

$$E_{11} = E_1 - E_3 - E_4 \text{ и } E_{22} = E_2 + E_3 + E_4 - E_5.$$

След определянето на контурните токове I_1^k и I_2^k от горната система за клоновете токове $I_1, I_2, \dots, I_5$ се записват изразите:

$$I_1 = I_1^k; I_2 = I_2^k; I_3 = I_2^k - I_1^k; I_4 = I_2^k + J_6 - I_1^k \text{ и } I_5 = I_2^k + J_6.$$

4. Метод с възлови потенциали

Методът с възлови потенциали се базира на първия закон на Кирхоф. Броят на уравненията, съставени по този метод, е равен на броя на независимите уравнения, съставени първия закон на Кирхоф, т.е. при верига с p възли този брой е равен на $(p-1)$.

Методът с възлови потенциали се обосновава чрез първия закон на Кирхоф и обобщения закон на Ом. За целта потенциалът на един от възлите се приема равен на нула, т.е. условно този възел се заземява. При това е целесъобразно да бъде заземен възел, към който са свързани максимален брой клонове. Заземяването на един от възлите на дадена верига не води до изменение на

разпределението на клоновете и токове, тъй като тези токове не зависят от абсолютните стойности на потенциалите на възлите, към които са свързани съответните клонове, а от потенциалната им разлика.

За останалите възли на веригата се записва система уравнения по първия закон на Кирхоф. От тази система, след като въз основа на обобщения закон на Ом се изразят чрез потенциалите на възлите на веригата, проводимостите на клоновете и ЕДН, действащи в тези клонове, се достига до система уравнения с неизвестни потенциали на възлите на веригата.

В случай на верига с $(n+1)$ възела след заземяване на $(n+1)$ -я възел, т.е. след като се приеме: $\varphi_{n+1} = 0$, се записва следната система уравнения:

$$\begin{cases} G_{11}\varphi_1 - G_{12}\varphi_2 - \dots - G_{1k}\varphi_k - \dots - G_{1n}\varphi_n = \sum_1 EG + \sum_1 J; \\ -G_{21}\varphi_1 + G_{22}\varphi_2 - \dots - G_{2k}\varphi_k - \dots - G_{2n}\varphi_n = \sum_2 EG + \sum_2 J; \\ -G_{k1}\varphi_1 - G_{k2}\varphi_2 - \dots + G_{kk}\varphi_k - \dots - G_{kn}\varphi_n = \sum_k EG + \sum_k J; \\ -G_{n1}\varphi_1 - G_{n2}\varphi_2 - \dots - G_{nk}\varphi_k - \dots + G_{nn}\varphi_n = \sum_n EG + \sum_n J. \end{cases} \quad (3.2.4)$$

Отделните означения в системата (3.2.4) са както следва:

$G_{11}, G_{22}, \dots, G_{kk}, \dots, G_{nn}$ - са собствените възлови проводимости на съответните възли. Тези проводимости са равни на сумите от проводимостите на клоновете, свързани към съответния възел.

$G_{kl} = G_{lk}$ - общите взаимните възлови проводимости на възлите с номера k и l . Тези проводимости са равни на сумата от проводимостите на клоновете, свързани между двата възела;

$\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_k, \dots, \varphi_n$ - потенциалите на съответните възли;

$\sum_1 EG, \sum_2 EG, \dots, \sum_k EG, \dots, \sum_n EG$ - алгебричните суми от произведения EG на

ЕДН и проводимости на клоновете, свързани към съответния възел. В тези суми със знак плюс "+" участвуват онези произведения EG , при които съответното ЕДН е с посока към разглеждания възел;

$\sum_1 J, \sum_2 J, \dots, \sum_k J, \dots, \sum_n J$ - алгебричните суми на токовете J на източниците на

ток, действащи в клоновете, свързани към съответния възел. В тези суми със знак плюс "+" участвуват онези токове J , чиято посока е към разглеждания възел.

След намиране на възловите потенциали $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_k, \dots, \varphi_n$ от система (3.2.4), клоновете токове се определят въз основа на обобщения закон на Ом.

Ако във веригата се съдържат клонове със идеални източници на ЕДН и техният брой е $n_{нг}$, то броят на уравненията, съставени по метода с възлови потенциали, се намалява. В случай на верига с p възли този брой може да е: $p_x = p - 1 - n_{нг}$.

Ако клоновете с идеални източници на ЕДН имат общ възел, то този възел се заземява. Така потенциалите на останалите възли, към които са свързани клоновете с идеални източници на ЕДН, стават известни и се определят от съответното ЕДН. За тези възли не се записват уравнения по метода с възлови потенциали, но потенциалите им се вземат предвид при записването на останалите уравнения.

Ако клоновете с идеални източници на ЕДН нямат общ възел, то методът с възлови потенциали не може да бъде приложен директно. Преди прилагането му е необходимо да бъде направено преобразуването прехвърляне на идеален източник на ЕДН през възел. Това преобразуване се извършва до достигане на еквивалентна верига, съдържаща само един клон с идеален източник на ЕДН.

При вериги, съдържащи клонове с идеални източници на ЕДН, след намирането на възловите потенциали и останалите клонови токове, то токовете в тези клонове се определят чрез първия закон на Кирхоф, приложен за единия от възлите, към които е свързан клонът.

За илюстрация на метода с възлови потенциали се разглежда веригата, чиято схема е показана на фиг. 3.2.1. При заземяване на възел 4, потенциалът на възел 3 става известен и равен на E_2 , т.е.: $\varphi_3 = E_2$. В такъв случай за потенциалите φ_1 и φ_2 на възли 1 и 2 се записва следната система уравнения:

$$\begin{cases} G_{11} \varphi_1 - G_{12} \varphi_2 - G_{13} \varphi_3 = \sum_1 EG + \sum_1 J; \\ -G_{21} \varphi_1 + G_{22} \varphi_2 - G_{23} \varphi_3 = \sum_2 EG + \sum_2 J. \end{cases}$$

Означенията в тази система са, както следва: $G_{11} = 1/R_1 + 1/R_4 + 1/R_5$; $G_{22} = 1/R_3 + 1/R_4 + 1/(R_6 + \infty)$; $G_{12} = G_{21} = 1/R_4$; $G_{13} = 1/R_1$; $G_{23} = 1/R_4$; $\sum_1 EG = E_1/R_1 + E_4/R_4 + E_5/R_5$; $\sum_1 J = 0$; $\sum_2 EG = E_3/R_3 - E_6/(R_6 + \infty) - E_4/R_4$; и $\sum_2 J = J_6$.

След определяне на възловите потенциали φ_1 и φ_2 от горната система, за клоновите токове I_1 , I_3 , I_4 и I_5 се записват изрази въз основа на обобщения закон на Ом:

$$I_1 = (\varphi_3 - \varphi_1 + E_1)/R_1; I_3 = (\varphi_3 - \varphi_2 + E_3)/R_3; I_4 = (\varphi_2 - \varphi_1 + E_4)/R_4 \text{ и } I_5 = (\varphi_1 - E_5)/R_5.$$

Клоновият ток I_2 се определя въз основа на първия закон на Кирхоф, например, от уравнението за възел 3: $I_2 = I_1 + I_3$.

Ако във веригата от фиг.3.2.1 съпротивлението R_5 отсъства, т.е.: $R_5 = 0$, то при заземяване на възел 4 потенциалът на възел 1 става известен и равен на E_5 , т.е.: $\varphi_1 = E_5$. В този случай се записва уравнение по метода с възлови потенциали за потенциала φ_2 на възел 2. След намиране на този потенциал, токовете I_1 , I_3 и I_4 се определят чрез обобщения закон на Ом, а токовете I_2 и I_5 чрез първия закон на Кирхоф.

Ако във веригата от фиг. 3.2.1 съпротивлението R_4 отсъства, т.е.: $R_4 = 0$, то методът с възлови потенциали не може да бъде приложен директно. В този случай е необходимо предварително да се направи преобразуването прехвърляне на идеален източник на ЕДН през възел, например на източника на ЕДН E_4 през възел 1. След извършване на това преобразуване потенциалите на възли 1 и 2 стават равни, т.е.: $\varphi_1 = \varphi_2$. След заземяване на възел 4 за потенциала на възли 1 и 2 се записва уравнение по метода с възлови потенциали. След намиране на този потенциал, токовете I_1 , I_3 и I_5 се определят чрез обобщения закон на Ом, а токовете I_2 и I_4 - чрез първия закон на Кирхоф.

5. Дуалност на електрическите вериги

Въз основа на методите с контурни токове и възлови потенциали може да бъде формулирано свойството дуалност на електрическите вериги. За целта се разглеждат две електрически вериги.

Първата верига съдържа n независими контура, като посоките на контурните токове са така избрани, че в общите клонове на контурите да бъдат противоположни. За контура с номер p за тази верига по метода с контурни токове се записва следното уравнение:

$$I_p^k R_{pp} - \sum_{\substack{q=1 \\ q \neq p}}^n I_q^k R_{pq} = E_{pp} + \sum_{\substack{q=1 \\ q \neq p}}^n J_{pq} R_{pq} = E'_{pq}. \quad (3.2.5)$$

Втората верига съдържа $(n + 1)$ възли. След заземяване на възела с номер $(n + 1)$, т.е.: $\varphi_{n+1} = 0$, то за потенциала на възела с номер p за тази верига по метода с възлови потенциали се записва следното уравнение:

$$\varphi_p G_{pp} - \sum_{\substack{q=1 \\ q \neq p}}^n \varphi_q G_{pq} = J_{pp} + \sum_{\substack{q=1 \\ q \neq p}}^n E_{pq} G_{pq} = J'_{pp}. \quad (3.2.6)$$

Ако се сравнят уравнения (3.2.5) и (3.2.6), може да се установи пълно сходство на начините на записване, а също така да бъдат установени следните съответствия:

$$I_p^k \leftrightarrow \varphi_p; R_{pp} \leftrightarrow G_{pp}; R_{pq} \leftrightarrow G_{pq}; E_{pp} \leftrightarrow J_{pp}; J_{pq} \leftrightarrow E_{pq}. \quad (3.2.7)$$

Въз основа на това сходство и тези съответствия се дефинира свойството дуалност на електрическите вериги. Ако за дадена електрическа верига уравненията, съставени по метода с контурни токове, са идентични с уравненията, съставени по метода с възлови потенциали, за друга верига, то двете вериги се наричат дуални.

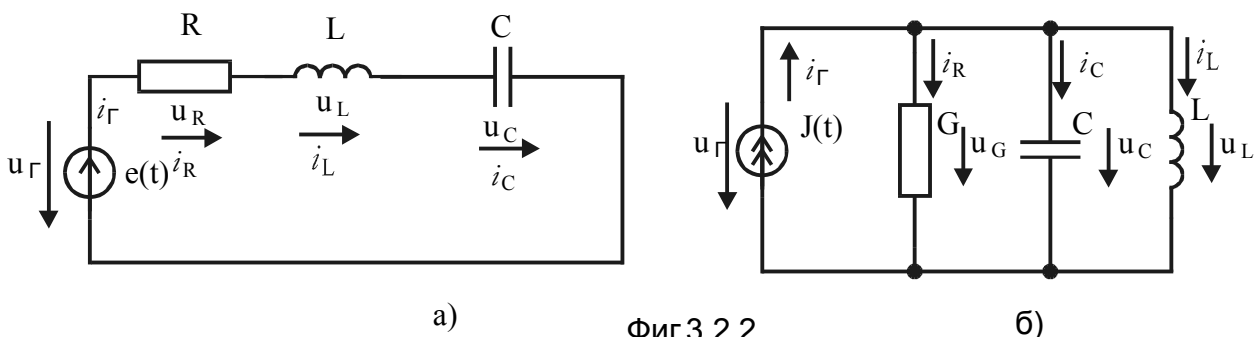
Свойството дуалност на електрическите вериги се свързва с дуалната форма на законите на Кирхоф. И действително, и според двата закона алгебричната сума на съответните електрически величини (токове или напрежения) е равна на алгебричната сума на съответните електродвижещи величини (токове на източници на ток или ЕДН), т.е.:

$$\sum i_k = \sum J_k \leftrightarrow \sum u_k = \sum e_k. \quad (3.2.7)$$

В първия случай се сумират токове за затворена повърхност и в частност, за възел, а във втория случай - напрежения в затворен контур. Ето защо величините ток и напрежение могат да бъдат разглеждани като дуални.

Свойството дуалност може да бъде разглеждано и по отношение на елементите на електрическите вериги. Ако два елемента се характеризират с еднотипни дуални зависимости между тока и напрежението, например, на линеен резистор със съпротивление R дуалният елемент е линеен резистор с проводимост G ; на бобина с индуктивност L дуалният елемент е кондензатор с капацитет C и обратно; на източник на ЕДН дуалният елемент е източник на ток.

Може да се докаже, че дуалните вериги имат еднакъв брой елементи. На



фиг. 3.2.2 са показани схемите на две елементарни дуални вериги.

Свойството дуалност на електрическите вериги позволява резултатите от анализа на дадена верига да бъдат използвани при анализа на дуалната верига. Тъй като възможностите за преобразуване на възловите вериги (под възлова верига се разбира веригата, за която се разглеждат уравненията по метода с възлови потенциали) са по-големи от тези на контурната верига (под контурна верига се

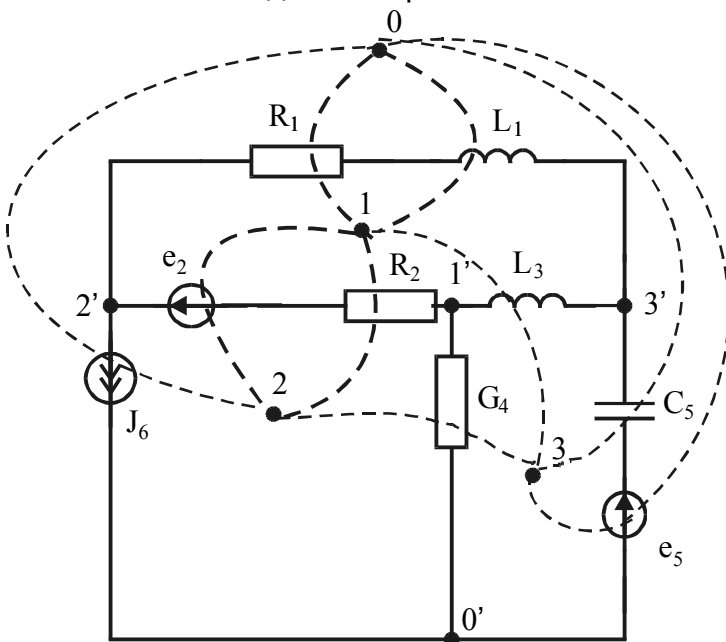
разбира веригата, за която се разглеждат уравненията по метода с контурни токове) – така, например, е възможно преобразуването на многолъчева звезда в еквивалентен триъгълник, но не и обратното, то по-просто е да бъде пресметната възловата верига, а след това полученото решение да се представи чрез режимните параметри (токове и напрежения) за контурната верига.

За съставяне на схемата на дуалната верига може да бъде използван графичният подход, предложен от Кауер. Алгоритъмът е следният:

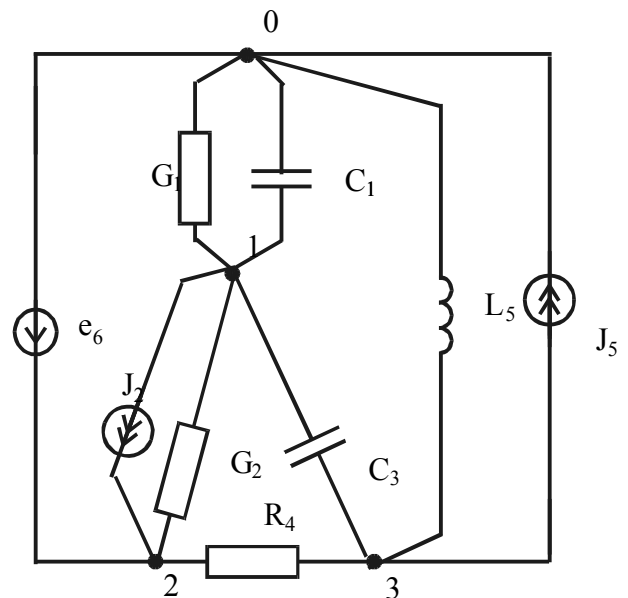
1. В схемата на изходната верига се избират независимите контури и се задават еднакви посоки на сумиране, съвпадащи с посоката на въртене на часовниковата стрелка.

2. Във вътрешността на всеки независим контур се определя точка, представляваща независим възел на дуалната верига. Нулевият възел (зависимият възел, за който не се съставя уравнение по първия закон на Кирхоф или по метода с възлови потенциали) се определя във външността на контурите.

3. Възлите се съединяват с линии, всяка от които пресича един елемент на схемата на изходната верига. Тези линии свързват точки (възли) на две съседни



Фиг.3.2.3



Фиг.3.2.4

области - две вътрешни точки или една вътрешна, а друга – външна.

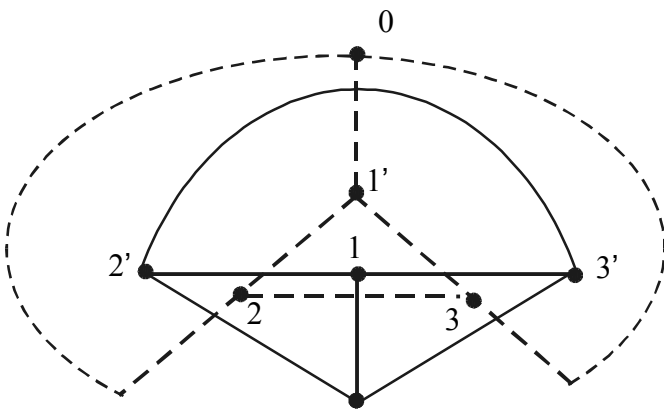
4. Клоновете на дуалната верига се получават, като в линията, пресичаща даден елемент на изходната верига, се включи съответният му дуален елемент.

5. Ако в изходната верига посоката на даден източник на ЕДН съвпада с посоката на сумиране по контура, то дуалният му източник на ток е с посока към вътрешността на контура.

6. Ако в изходната верига посоката на даден източник на ток е към вътрешността на новосформирания контур, то посоката на дуалния му източник на ток съвпада с посоката на въртене на часовниковата стрелка.

Изложеният по-горе графичен подход е приложен за веригата, чиято схема е показана на фиг. 3.2.3. Схемата на получената дуална верига е представена на фиг. 3.2.4.

Тук могат да бъдат отбелязани следните особености:



Фиг.3.2.5

илюстрация на фиг. 3.2.5 са представени топологичните схеми на автодуалните вериги от фиг. 3.2.3 и фиг. 3.2.4.

3.3. Някои принципи за линейни електрически вериги

Основните принципи за линейни електрически вериги са принцип на наслагването (суперпозицията), на пропорционалността, на взаимността и на обратимостта. Тези принципи намират широко приложение при изследването на сложни линейни електрически вериги.

1. Принцип на наслагването

Обосноваването на принципа на наслагването може да се извърши чрез метода с контурни токове. Както бе разглеждано в 3.2, при сложна електрическа верига, съдържаща n независими контури, контурният ток I_k^k на контура с номер k може да бъде определен от израза:

$$I_k^k = \frac{A_{1k}}{D} E_{11} + \frac{A_{2k}}{D} E_{22} + \dots + \frac{A_{kk}}{D} E_{kk} + \dots + \frac{A_{nn}}{D} E_{nn}. \quad (3.3.1)$$

Независимите контури и посоките на контурните им токове така могат да бъдат избрани, че търсеният клонов ток да бъде равен на съответен контурен ток (за разглеждания случай $I_k = I_k^k$). Като се има предвид, че контурните ЕДН $E_{11}, E_{22}, \dots, E_{kk}, \dots, E_{nn}$ представляват алгебрични суми от ЕДН, действащи в клоновете на веригата, то клоновият ток I_k може да бъде представен като алгебрична сума от частични токове, дължащи се на действието на отделните източници. Това положение изразява същността на принципа на наслагването.

На практика принципът на наслагването се прилага по следният начин: Последователно се определят частичните токове, дължащи се на действието на отделните източници. При това останалите източници на ЕДН се дават на късо, а източниците на ток се изключват, като се запазват техните вътрешни съпротивления, респективно – вътрешни проводимости. Клоновите токове се определят като алгебрична сума от съответните частични токове. Знакът, с който частичните токове участвуват в израза за даден клонов ток, се определя от своя страна от условната посока на клоновия ток.

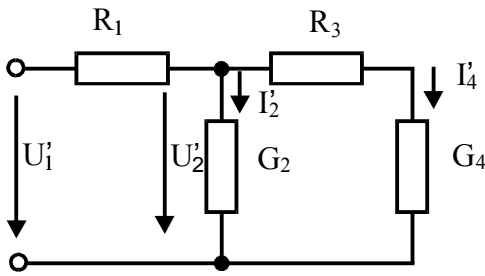
Принципът на наслагването е валиден не само за клоновите токове, но и за напреженията, което следва от линейността на системите уравнения, описващи процесите в линейните електрически вериги. Този принцип може да бъде използван и при определянето на други физични величини, свързани помежду си с линейни зависимости. Той, обаче е невалиден при мощностите, тъй като мощността в кой да е клон зависи от квадрата на тока или напрежението.

2. Принцип на пропорционалността

1. Ако се направи ново дуализиране на дуалната верига, съставена въз основа на подхода на Кауер, се получава изходната верига. Това може да се използва за проверка на правилността на съставяне на схемата на дуалната верига.

2. Ако изходната и дуалната верига имат еднакви конфигурации (топологични схеми), те се наричат автодуални (самодуални) вериги. Типичен пример в това отношение са четирираменните мостове. За

Свойството линейност на дадена електрическа верига се изразява не само в адитивност (наслагване) на реакциите от различните въздействия, но и в тяхната пропорционалност. Тук под въздействие се разбира действието на отделните



Фиг.3.3.1

електрически вериги с един източник. В случая се оказва, че е по-просто да се определи сигналът (ЕДН или токът) на източника, като се приеме, че търсената величина има фиксирана стойност.

За илюстрация на принципа на пропорционалността се разглежда веригата, чиято схема е показана на фиг. 3.3.1. За тази верига търсената величина е токът I_4 в товара. Приема се, че този ток има някаква стойност I'_4 . При тази стойност на тока $I_4 = I'_4$, като се използват законите на Кирхоф се определя входното напрежение U'_1 :

$$U'_2 = (R_3 + 1/G_4)I'_4; \quad I'_2 = G_2 U'_2 = G_2 (R_3 + 1/G_4)I'_4; \quad I'_1 = I'_4 + I'_2 = [1 + G_2 (R_3 + 1/G_4)]I'_4;$$

$$U'_1 = R_1 I'_1 + U'_2 = R_1 [1 + G_2 (R_3 + 1/G_4)]I'_4 + (R_3 + 1/G_4)I'_4.$$

За коефициента на пропорционалност k при входно напрежение U_1 се записва: $k = U_1 / U'_1 = U_1 / [R_1 + (1 + R_1 G_2)(R_3 + 1/G_4)]I'_4$.

Ако коефициентът k е известен, търсеният ток I_4 се определя по следният начин: $I_4 = kI'_4$. Пресмятането може да се опрости ако се приеме: $I'_4 = 1A$.

3. Принцип на взаимността

Във връзка с принципа на взаимността е необходимо да се дефинират величините входни и взаимни проводимости (съпротивления). За целта се изхожда от израз (3.3.1). Величините A_{1K}/D , A_{2K}/D , ..., A_{KK}/D , ..., A_{nK}/D в този израз имат размерност на проводимост.

Приема се, че контурният ток I_K^k е равен на клоновия ток I_K , т.е.: $I_K^k = I_K$ и се заменят контурните ЕДН $E_{11}, E_{22}, \dots, E_{KK}, \dots, E_{nn}$ с клонови ЕДН $E_1, E_2, \dots, E_K, \dots, E_n$ и така за клоновия ток I_K се достига до израза:

$$I_K = G'_{K1} E_1 + G'_{K2} E_2 + \dots + G'_{KK} E_K + \dots + G'_{Kn} E_n. \quad (3.3.2)$$

Величината G'_{KK} носи названието входна проводимост на клонa с номер k , а реципрочната ѝ величина $R'_{KK} = 1/G'_{KK}$ - входно съпротивление на същия клон. За определяне на входната проводимост G'_{KK} в разглежданата верига се приема, че всички ЕДН с изключение на ЕДН E_K са равни на нула. В такъв случай за тока I_K се получава: $I_K = G'_{KK} E_K$, откъдето за проводимостта G'_{KK} се записва:

$$G'_{KK} = I_K / E_K = 1/R'_{KK}. \quad (3.3.3)$$

ЕДН E_K , включено в клонa с номер k , предизвиква в общия случай токове във всички клонове на веригата. Токът I_ℓ в клонa с номер ℓ може да бъде определен от израз, аналогичен на израз (3.3.2), като при равни на нула всички ЕДН, освен E_K , за тока I_ℓ се получава: $I_\ell = G_{\ell K} E_K$, откъдето се записва:

$$G'_{\ell k} = I_{\ell} / E_k = 1 / R_{\ell k} . \quad (3.3.4)$$

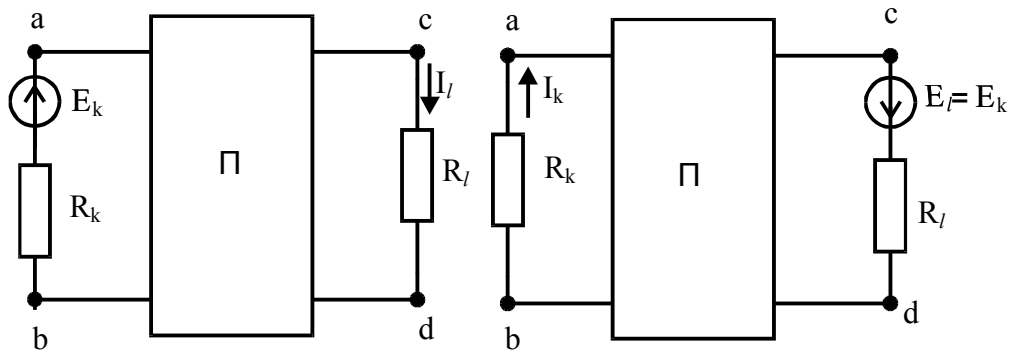
Величината $G'_{\ell k}$ се нарича взаимна проводимост между клоновете с номера ℓ и k , а величината $R_{\ell k}$ - взаимно съпротивление между същите клонове. За взаимните проводимости $G'_{\ell k}$ и $G''_{k\ell}$, респективно за взаимните съпротивления $R_{\ell k}$ и $R_{k\ell}$, са в сила равенствата:

$$G'_{\ell k} = G''_{k\ell} \text{ и } R_{\ell k} = R_{k\ell} . \quad (3.3.5)$$

Равенства (3.3.5) представляват математическия израз на принципа на взаимността, който гласи, че в линейните електрически вериги взаимните проводимости (съпротивления) с разменяем ред на индексите са равни помежду си. Този принцип има и по-обща формулировка, а именно в линейните електрически вериги отношението реакция/сигнал е инвариантно при размяна на местата на консуматор и източник.

4. Принцип на обратимостта

Принципът на обратимостта може да бъде обоснован чрез метода с контурни токове. За целта се разглежда пасивна верига, в чийто клон с номер k и съпротивление R_k , действа източник на ЕДН E_k с посока от точка a , към точка b



Фиг.3.3.2

Фиг.3.3.3

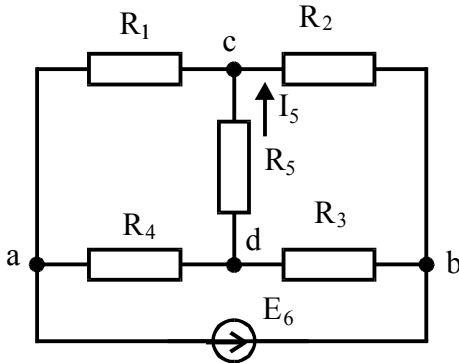
(фиг. 3.3.2). ЕДН E_k предизвиква в клон с номер ℓ и съпротивление R_{ℓ} ток I_{ℓ} с посока от точка c към точка d , който се определя от израза:

$$I_{\ell} = \frac{A_{k\ell}}{D} E_k . \quad (3.3.6)$$

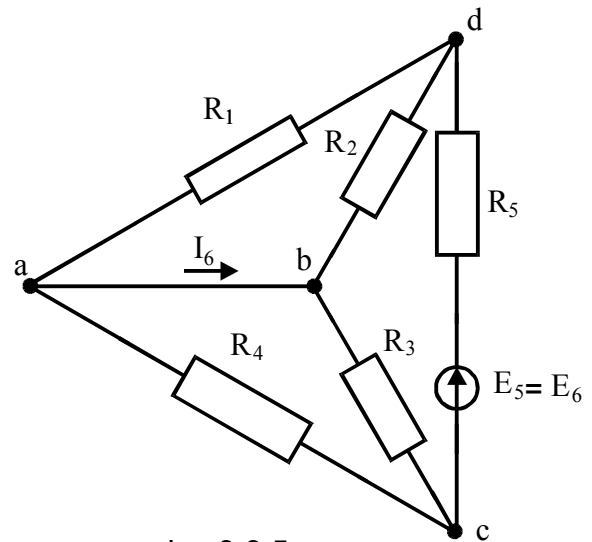
Източникът на ЕДН E_k се премества в клон с номер ℓ и съпротивление R_{ℓ} и действа с посока от точка c към точка d . Този източник предизвиква в клон с номер k и съпротивление R_k ток I_k с посока от точка a към точка b , който се определя от израза:

$$I_k = \frac{A_{\ell k}}{D} E_{\ell} = \frac{A_{\ell k}}{D} E_k . \quad (3.3.7)$$

Като се има предвид, че величините $A_{\ell k}$ и $A_{k\ell}$ са адюнктираните количества на елементите $R_{\ell k}$ и $R_{k\ell}$, които са равни помежду си, т.е. $R_{\ell k} = R_{k\ell}$, то следва



Фиг.3.3.4



Фиг.3.3.5

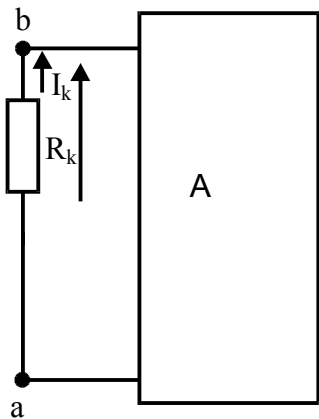
равенството: $A_{\ell k} = A_{k\ell}$. Оттук се установява, че при равни ЕДН E_k и E_ℓ , то и токовете I_ℓ и I_k са равни, т.е.: $I_\ell = I_k$.

Равенството $I_\ell = I_k$ е математическият израз на принципа на обратимостта. Този принцип е валиден не само за токовете, но и за напреженията, което може да се обоснове чрез законите на Кирхоф или чрез метода с възлови потенциали.

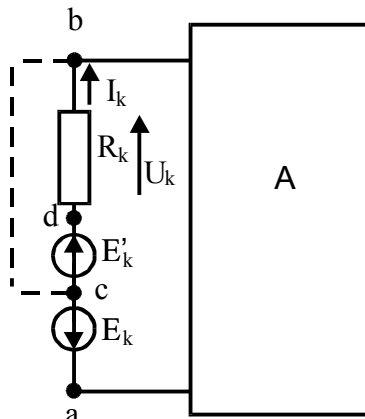
Принципът на обратимостта позволява в някои случаи задачата за определянето на ток в сложна верига да бъде заменена със задача за пресмятане на проста верига. Такъв случай се илюстрира със схемите от фиг. 3.3.4 и фиг. 3.3.5. Чрез принципа на обратимостта определянето на тока I_5 в сложната верига, показана на фиг. 3.3.4, се заменя с пресмятането на тока I_6 във веригата, показана на фиг. 3.3.5. Последната верига спрямо източника на ЕДН $E_5 = E_6$ представлява смесено съединение на пасивни участъци.

3.4. Теорема за линейни електрически вериги

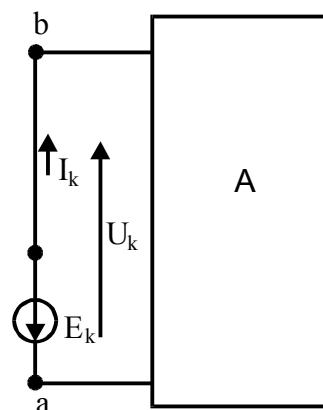
Основните теореми за линейни електрически вериги са теоремите за компенсацията, за активния двуполусник (еквивалентния генератор) и за вариациите. Тези теореми намират широко приложение при изследване на процесите в даден клон на сложни линейни електрически вериги.



Фиг.3.4.1



Фиг.3.4.2



Фиг.3.4.3

1. Теорема за компенсацията

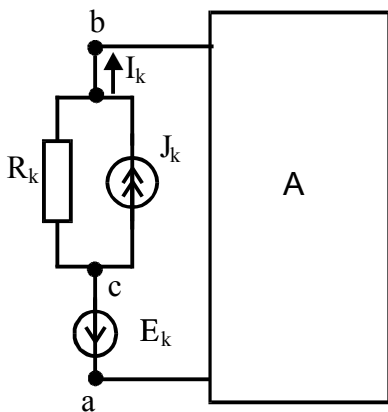
Исходната постановка на теоремата за компенсацията се илюстрира със схемата от фиг. 3.4.1. В пасивен клон, съдържащ резистор със съпротивление R_k , преминава ток I_k и върху резистора се установява напрежение U_k .

Поставя се задачата резисторът със съпротивление R_k да се замени с източник на ЕДН. За целта в клона се включват два източника на ЕДН E_k и E'_k с напрежения, равни на напрежението U_k и действащи в противоположни посоки (фиг. 3.4.2). При указаните условия тези източници не изменят разпределението на токовете във веригата.

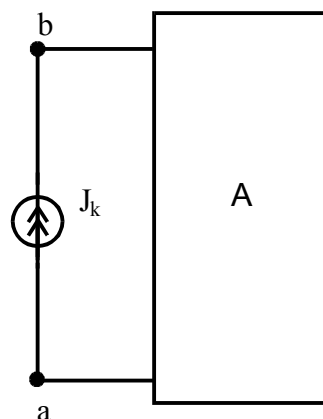
При преминаване от точка c към точка d потенциалът нараства със стойност U_k , а при преминаване от точка d към точка b , той намалява със същата стойност. Това означава, че точки c и b имат еднакъв потенциал и могат да бъдат свързани (показано е на фиг. 3.4.2 с пунктирна линия). Така се достига до веригата, чиято схема е представена на фиг. 3.4.3.

От сравняването на схемите от фиг. 3.4.1 и фиг. 3.4.3 може да се заключи, че резистор със съпротивление R_k , през който преминава ток I_k и върху който се установява напрежение U_k , може да бъде заменен с източник на ЕДН E_k с напрежение, равно на напрежението U_k и с посока, обратна на посоката на тока I_k .

Теоремата за компенсацията има дуална формулировка, а именно, че



Фиг.3.4.4



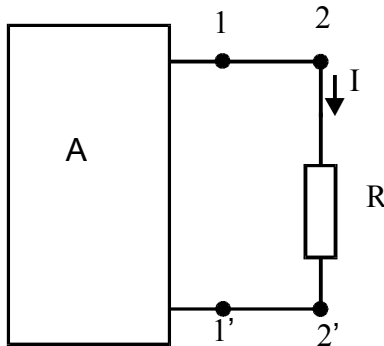
Фиг.3.4.5

резистор със съпротивление R_k , през който преминава ток I_k , може да бъде заменен с източник на ток J_k с ток, равен на тока I_k и с посока, съвпадаща с посоката на тока I_k . За обосноваването на тази формулировка, източникът на ЕДН E_k от схемата на фиг. 3.4.2 се заменя с еквивалентен източник на ток $J_k = E'_k / R_k$ (фиг. 3.4.4). Тъй като при тази замяна потенциалите на точки c и b остават неизменни и равни помежду си, то през резистора със съпротивление R_k няма да преминава ток. В такъв случай този резистор може да бъде изключен от схемата. Освен това източникът на ЕДН E_k може да бъде включен в състава на източника на ток J_k , което няма да измени разпределението на токовете във веригата. Така се достига до веригата, чиято схема е показана на фиг. 3.4.5. Последната схема потвърждава направената по-горе дуална формулировка на теоремата за компенсацията.

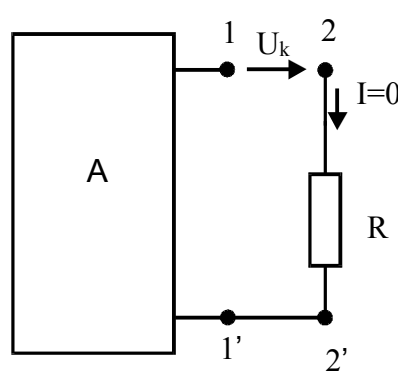
2. Теорема за активния двуполусник

Теоремата за активния двуполусник, наречена още теорема за еквивалентния генератор, има две формулировки: теорема за еквивалентния генератор на ЕДН и теорема за еквивалентния генератор на ток. Първата формулировка се нарича още теорема на Тевенен, а втората формулировка – теорема на Нортън.

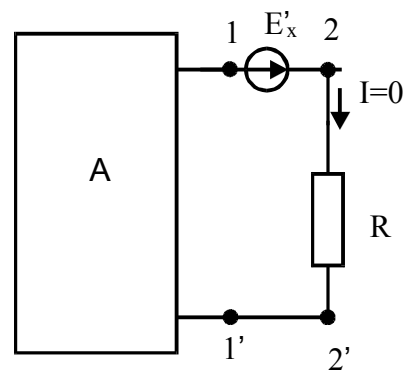
Изходната постановка на теоремата за активния двуполусник се илюстрира със схемата от фиг. 3.4.6. През пасивен клон, съдържащ резистор със



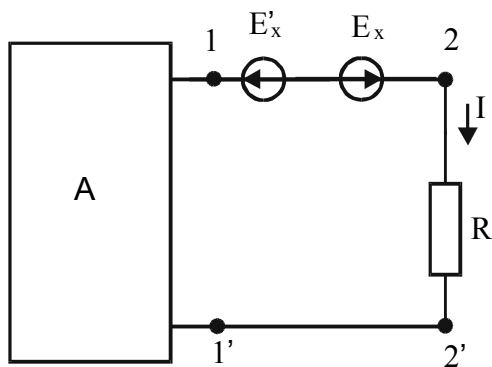
Фиг.3.4.6



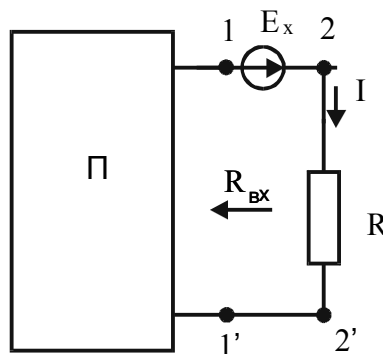
Фиг.3.4.7



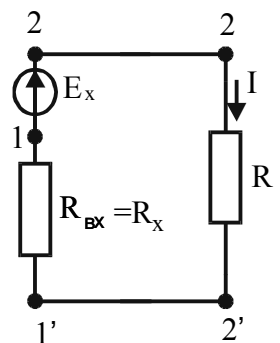
Фиг.3.4.8



Фиг.3.4.9



Фиг.3.4.10



Фиг.3.4.11

съпротивление R , преминава ток I . Поставя се задачата токът I да бъде определен, като активният двуполусник A , към който е включен клонът, бъде заменен с еквивалентен генератор.

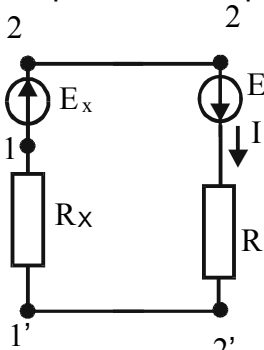
За доказване на теоремата на Тевенен се прави прекъсване на веригата между точки 1 и 2 и се определя напрежението на празен ход U_0 (фиг. 3.4.7). При това прекъсване на токът I става равен на нула. Същият резултат по отношение на тока I се получава ако между точки 1 и 2 се включи източник на ЕДН E'_x с напрежение, равно на напрежението U_0 и с посока от точка 2 към точка 1 (фиг. 3.4.8). По този начин източникът на ЕДН E'_x превръща активния двуполусник в пасивен спрямо разглеждания клон. За да преминава през клона действителният ток I , между точки 1 и 2 се включва допълнителен източник на ЕДН E_x с напрежение, равно на напрежението U_0 , но с посока, обратна на посоката на източника на ЕДН E'_x (фиг. 3.4.9).

За веригата, показана на последната схема, се прилага принципът на наслагването по отношение на тока I . Отначало се приема, че действуват източниците в активния двуполусник и източникът на ЕДН E'_x . Този случай бе разгледан по-горе за схемата от фиг. 3.4.8. Във втория случай се приема, че действа само източникът на ЕДН E_x (фиг. 3.4.10). При това през разглеждания клон преминава действителният ток I .

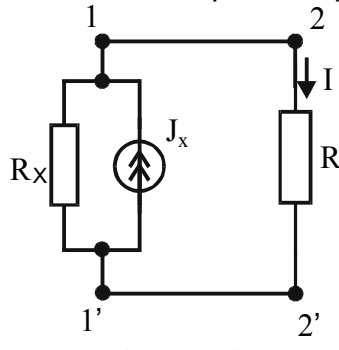
Схемата от фиг. 3.4.10 може да бъде опростена като пасивният двуполусник Π се замени с резистор със съпротивление R_x , равно на входното му съпротивление $R_{вх}$, т.е.: $R_x = R_{вх}$. Така се получава схемата от фиг. 3.4.11. За тока I от последната схема може да се запише:

$$I = E_x / (R_x + R) = U_0 / (R_{вх} = R). \quad (3.4.1)$$

Израз (3.4.1) представлява математическата формулировка на теоремата на Тевенен, която гласи следното: Токът I в клон на сложна верига, съдържащ резистор със съпротивление R , може да бъде определен, като останалата част на веригата се разгледа като активен двуполусник A и този двуполусник се замени с еквивалентен източник на ЕДН E_x с вътрешно съпротивление R_x . ЕДН E_x се намира чрез разкъсване на клона и напрежението му е равно на напрежението U_0 на празен ход, а вътрешното съпротивление R_x на еквивалентния източник на ЕДН е равно на входното съпротивление $R_{вх}$ на пасивния двуполусник Π . Последният се получава от активния двуполусник A чрез даване на късо на източниците на ЕДН и изключване на източниците на ток при запазване на техните вътрешни съпротивления, респективно вътрешни проводимости.



Фиг.3.4.12



Фиг.3.4.13

Теоремата на Тевенен може да бъде разглеждана и за активен клон (клон, съдържащ източник на ЕДН E). В този случай се достига до схемата от фиг. 3.4.12, за тока I на която се записва:

$$I = (E_x + E) / (R_x + R). \quad (3.4.2)$$

Последният израз представлява математическата формулировка на така наречената обобщена теорема на Тевенен.

Ако източникът на ЕДН E_x с вътрешно съпротивление R_x на схемата от фиг. 3.4.11 се замени с еквивалентен източник на ток $J_x = E_x / R_x$ с вътрешно съпротивление R_x , се достига до схемата от фиг. 3.4.13. За тока I от последната схема може да се запише:

$$I = J_x R_x / (R_x + R). \quad (3.4.3)$$

От израз (3.4.1) може да се установи, че токът J_x на еквивалентния източник на ток представлява всъщност тока на късо съединение, т. е.:

$$J_x = I_k = E_x / R_x = U_0 / R_{вх}. \quad (3.4.4)$$

Формула (3.4.3) изразява математическата формулировка на теоремата на Нортън, която гласи следното: Токът I в пасивен клон, свързан към активен двуполусник A , може да бъде определен като активният двуполусник A се замени с еквивалентен източник на ток J_x с вътрешно съпротивление R_x . Токът J_x се намира чрез даване на късо на клона и е равен на тока I_k на късо съединение. Вътрешното съпротивление R_x на еквивалентния източник на ток съответствува на вътрешното съпротивление R_x на еквивалентния източник на ЕДН E_x при теоремата на Тевенен и се определя по същия начин.

От формула (3.4.4) може да се запише:

$$R_x = R_{вх} = U_0 / I_k. \quad (3.4.5)$$

От израз (3.4.5) може да се заключи, че входното съпротивление $R_{вх}$ на пасивния двуполусник може да бъде определено експериментално като с активния

двуполюсник се направят опити на празен ход и късо съединение спрямо разглеждания клон.

На практика теоремата на Тевенен (Нортън) се прилага в следната последователност:

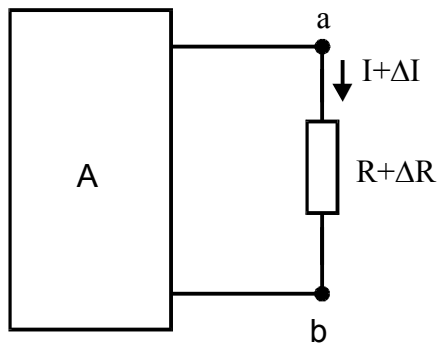
1. Определя се ЕДН E_x (токът J_x) на еквивалентният генератор. За целта се пресмята напрежението на празен ход U_0 (токът на късо съединение I_k) на активния двуполюсник спрямо разглеждания клон.

2. Определя се вътрешното съпротивление R_x на еквивалентния генератор на ЕДН E_x (ток J_x). За целта се пресмята входното съпротивление $R_{вх}$ на пасивния двуполюсник, който се получава от активния двуполюсник чрез даване на късо на източниците на ЕДН и изключване на източниците на ток при запазване на вътрешните им съпротивления, респективно вътрешните им проводимости.

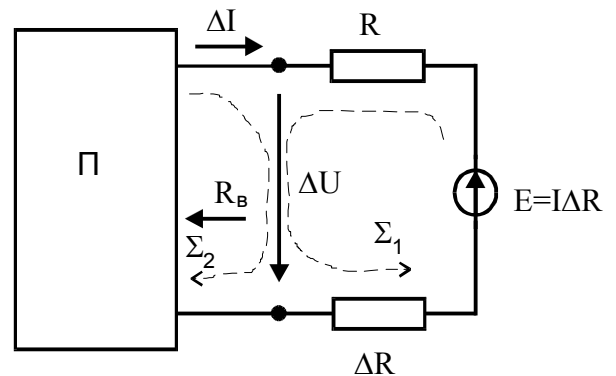
3. Пресмята се търсения ток по формула (3.4.1) (формула (3.4.3)).

3. Теорема за вариациите

Чрез теоремата за вариациите могат да бъдат определени токовете в сложна



Фиг.3.4.14



Фиг.3.4.15

линейна електрическа верига, в която съпротивлението R на даден клон се е изменило с ΔR , т.е. е получило стойност $R + \Delta R$. Тази изходна постановка се илюстрира чрез схемата от фиг. 3.4.14.

За определяне на токовия нарастък ΔI в клона, чието съпротивление се е изменило, може да бъде използвана теоремата на Тевенен, въз основа на която се записват равенствата:

$$I = U_0 / (R_b + R) \text{ и } I + \Delta I = U_0 / (R_b + R + \Delta R) . \quad (3.4.6)$$

От тези равенства за нарастка ΔI се получава:

$$\Delta I = I \Delta R / (R_b + R + \Delta R) . \quad (3.4.7)$$

На формула (3.4.7) отговаря еквивалентната схема, представена на фиг. 3.4.15. В същата формула участва знак минус “-”, който показва, че двете величини ΔI и ΔR се изменят противоположно, т.е. на увеличението на съпротивлението R съответствува намаление на тока I . Това е отразено при избора на положителните посоки на величините от схемата на фиг. 3.4.15. Токът I не може да надвиши граничната си стойност I_k , съответстваща на режима на късо съединение.

За изменението ΔU на напрежението U на клона, дължащо се на изменението ΔR на съпротивлението му, може да се запише :

$$\Delta U = (R + \Delta R)(I + \Delta I) - RI = (R + \Delta R)\Delta I + \Delta R . \quad (3.4.7)$$

Ако се вземе предвид израз (3.4.7), за нарастка ΔU се получава:

$$\Delta U = -R_b \Delta I . \quad (3.4.9)$$

От схемата на фиг. 3.4.15 може да се установи, че до формули (3.4.8) и (3.4.9) може да се достигне чрез прилагане на втория закон на Кирхоф за посоките на сумиране Σ_1 и съответно Σ_2

Отрицателният знак във формула (3.4.9) показва, че величините ΔU и ΔI се изменят противоположно, т.е. на увеличението на тока I съответствува намаление на напрежението U . До този резултат се достига тъй като съгласно формула (3.4.7) нарастването на тока I се дължи на намаляване на съпротивлението R . И така двете величини ΔU и ΔR се изменят еднопосочно – на увеличението на съпротивлението R съответствува увеличение на напрежението U . При това напрежението U не може да надвиши граничната си стойност U_0 , съответстваща на режима на празен ход.

За илюстрация на теоремата за вариациите се разглежда влиянието на вътрешното съпротивление R_A на амперметър върху точността на измерване на тока, преминаващ в клон със съпротивление R . Включването на амперметъра в клона води до нарастване на съпротивлението му с $\Delta R = R_A$. В такъв случай за показанието на уреда се записва: $I_A = I + \Delta I = I - IR_A / (R_b + R + R_A)$, откъдето се достига до зависимостта: $I = I_A (1 + R_A) (R_e + R) Y$. От тази зависимост може да се установи, че при условието: $R_A \ll R_b + R$, показанието на амперметъра се различава незначително от действителния ток I . На практика се изисква $R_A \ll R$, което е по-строго. Това изискване представлява достатъчно условие.

Този пример е частен случай на по-общия проблем за чувствителността на характеристиките на техническите устройства при вариации на параметрите на елементите им. Такива вариации касаят не само експлоатацията на устройствата, но имат отношение и при проектирането им. Във връзка с последното може да се отбележи, че от една страна използването на елементи с по-малки отклонения на параметрите им от номиналните им стойности осигурява по-голяма вероятност за постигане на зададените характеристики на устройството, но го оскъпява. От друга страна по-евтините елементи (елементи с по-големи отклонения на параметрите им от номиналните им стойности) могат да доведат до значителни различия между зададените при проектирането и постигнатите характеристики на устройството при реализацията му.

IV. УСТАНОВЕНИ СИНУСОИДАЛНИ РЕЖИМИ В ЛИНЕЙНИ ЕЛЕКТРИЧЕСКИ ВЕРИГИ БЕЗ ИНДУКТИВНА ВРЪЗКА

Встъпителни бележки

В раздела се разглеждат основни понятия, величини и закони за променливотокови линейни електрически вериги без индуктивна връзка. Разглеждат се също и установени синусоидални режими в последователна и паралелна R, L, C верига. В раздела се отделя внимание на комплексния метод и на приложението му за анализ на установени синусоидални режими в последователна и паралелна R, L, C верига, както и в сложни вериги. Разглеждат се и въпроси, свързани с мощности в електрическите вериги, както и теоремата за предаване на максимална активна мощност на консуматор.

4.1. Променливотокови линейни електрически вериги – основни понятия и величини. Основни закони

1. Променливотокови величини

Променливият ток е намерил широко приложение, което се свързва с появата на централизирано производство на електромагнитна енергия и предаването ѝ на разстояние. Основните променливотокови величини са ЕДН, токове и напрежения. Ако стойностите на променливотоковите величини се повтарят през равни интервали от време, те се наричат периодични. Най-малкият интервал от време, през който се наблюдава такава повторемост носи названието период и се означава с T. Реципрочната на периода величина $f = 1/T$ се нарича честота. Честотата е равна на броя на периодите за единица време. Размерността ѝ е [Hz].

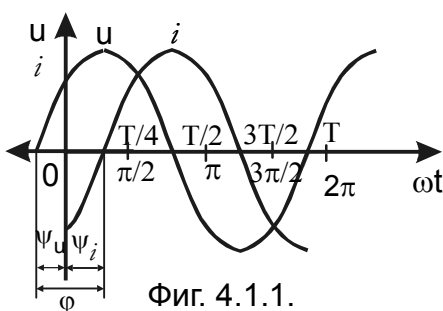
В техниката са намерили приложение променливотокови величини с честота в изключително широк диапазон – от части от херца до мегахерци. В енергийните системи на повечето страни се използва честота 50 Hz. Освен това в енергетиката най-широко приложение са намерили синусоидалните ЕДН, токове и напрежения, което се дължи на обстоятелството, че при друга форма могат да възникнат нежелателни явления като пренапрежения и свръхтокове, нарастване на загубите на енергия, смущения върху работа на линиите за предаване на информация. Освен това различните периодични несинусоидални и апериодични ЕДН, токове и напрежения, които са намерили приложение в техниката, могат да бъдат разложени в ред на Фурие, съставен в общия случай от постоянна съставка и синусоидални съставки. Ето защо е целесъобразно електрическите вериги да бъдат изследвани при синусоидални ЕДН, токове и напрежения. Тези въпроси са обект на разглеждане в по-нататъшното изложение.

Синусоидалните ЕДН, токове и напрежения могат да бъдат записани по следния начин:

$$e = E_m \sin(\omega t + \psi_e); i = I_m \sin(\omega t + \psi_i); u = U_m \sin(\omega t + \psi_u), \quad (4.1.1)$$

където e , i и u са моментните им стойности;

E_m , I_m , U_m - максималните (амплитудните) им стойности.



Фиг. 4.1.1.

Аргументът на синуса (например, на тока - $(\omega t + \psi_i)$), който се отчита от най-близката предхождаща точка на преминаване на синусоидалната величина през нулата от отрицателни към положителни стойности се нарича фаза на величината (в случая на тока). Величината ψ_i носи названието начална фаза (в случая на тока), а величината $\omega = 2\pi/T = 2\pi f$ - ъглова честота. Размерността на фазата е радиан [rad], а на ъгловата

честота - [rad/s].

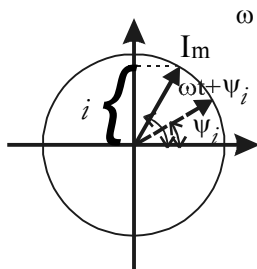
2. Изобразяване на синусоидалните величини

а) графично изобразяване

Графичното изобразяване на синусоидални напрежение и ток е показано на фиг. 4.1.1. По абсцисата на координатната система се нанася времето t или пропорционалната му величина ωt , а по ординатата - моментните стойности на синусоидалните величини. Началната фаза се отчита от нулевата стойност на величината при преминаването ѝ от отрицателни към положителни стойности до началото на отчитане на времето, т.е. от момента $t = 0$. Положителните начални фази се нанасят вляво от координатното начало, а отрицателните - вдясно. За разглеждания случай (фиг. 4.1.1) напрежението има положителна начална фаза ψ_u , а токът - отрицателна начална фаза ψ_i .

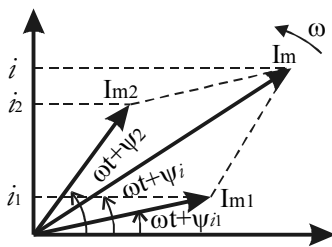
Разликата между началните фази на напрежението и тока се отбелязва с φ , т.е.: $\varphi = \psi_u - \psi_i$ и се нарича фазова разлика. Прието е фазовата разлика да се смята за положителна, ако напрежението изпреварва тока. При $\varphi = 0$ напрежението и токът съвпадат по фаза; при $\varphi = \pm\pi$ те са в противофаза, а при $\varphi = \pm\pi/2$ те се намират в квадратура.

б) изобразяване с вектори



Фиг. 4.1.2.

Синусоидалните ЕДН, напрежения и токове могат да бъдат изобразени с вектори, въртящи се с ъглова скорост, равна на ъгловата честота ω . Дължината на вектора се приема равна в съответния мащаб на амплитудната стойност на синусоидалната величина. За илюстрация на фиг. 4.1.2 токът $i = I_m \sin(\omega t + \psi_i)$ е изобразен с вектор с дължина I_m , въртящ се с ъглова скорост ω . При отчитане на ъгъла $(\omega t + \psi_i)$ от абсцисната ос, проекцията на вектор I_m върху ординатната ос дава моментната стойност на тока.



Фиг. 4.1.3.

Изобразяването с вектори има редица удобства в сравнение с графичното, особено при сумирането на две синусоидални величини, например, на токовете: $i_1 = I_{m1} \sin(\omega t + \psi_{i1})$ и $i_2 = I_{m2} \sin(\omega t + \psi_{i2})$. Определянето на синусоида, представлява сумата от синусоидите на токовете i_1 и i_2 т.е.: $i = i_1 + i_2 = I_{m1} \sin(\omega t + \psi_{i1}) + I_{m2} \sin(\omega t + \psi_{i2}) = I_m \sin(\omega t + \psi_i)$ е значително по-трудно от векторното изобразяване на токовете i_1 , i_2 и i . На фиг. 4.1.3 са показани векторите на трите тока с дължини I_{m1} , I_{m2} и I_m , въртящи се с една и съща ъглова скорост ω . Векторът I_m представлява геометрична сума на векторите I_{m1} и I_{m2} . И действително, тъй като проекцията върху коя да е ос на геометричната сума на два вектора е равна на алгебричната сума на проекциите на двата вектора върху същата ос, то токът i може да бъде изобразен с вектор, равен на геометричната сума на векторите, изобразяващи токовете i_1 и i_2 .

При векторното изобразяване трябва да се има предвид следното: Началната фаза на една величина, т.е. началното положение на изобразяващия я вектор, се избира произволно (обикновено тази начална фаза се избира равна на нула). Векторите на останалите величини трябва да бъдат отместени от този вектор на ъгли, равни на разликите във фазите им.

Съвкупността от вектори, характеризиращи извършващите се процеси в дадена променливотокова електрическа верига, които са построени при спазването на определена ориентация един спрямо друг, носи названието векторна диаграма. Кривите на моментните стойности на величините се наричат временни диаграми.

в) изобразяване с комплексни числа

Известно е, че всяка синусоидална величина – ЕДН, ток и напрежение при зададена ъглова честота ω се определя напълно от две величини – амплитудна стойност и начална фаза. Известно е също, че всяко комплексно число $\dot{A}$ се характеризира с две величини – модул A и аргумент ψ_A или реална и имагинерна съставки a_1 и a_2 , т.е.:

$$\dot{A} = Ae^{j\psi_A} = A \cos \psi_A + jA \sin \psi_A = a_1 + ja_2, \quad (4.1.2)$$

където $e = 2,718$ е неперовото число (основата на натуралните логаритми);

$j = \sqrt{-1}$ - имагинерната единица;

Ако се сравни комплексното число $\dot{a}$:

$$\dot{a} = Ae^{j(\omega t + \psi_A)} = A \cos(\omega t + \psi_A) + jA \sin(\omega t + \psi_A) \quad (4.1.3)$$

със синусоидалния ток:

$$i = I_m \sin(\omega t + \psi_i), \quad (4.1.3)$$

се установява следната аналогия: на модула A съответства амплитудната стойност I_m , на аргумента $(\omega t + \psi_A)$ – фазата $(\omega t + \psi_i)$. Тази аналогия показва, че синусоидалният ток може да бъде изобразен като имагинерна част на комплексно число. И действително, ако се запише комплексното число:

$$\dot{i} = I_m e^{j(\omega t + \psi_i)} = I_m \cos(\omega t + \psi_i) + j I_m \sin(\omega t + \psi_i), \quad (4.1.4)$$

то имагинерната му част ще представлява синусоидалния ток, т.е.:

$$i = I_m \sin(\omega t + \psi_i) = \text{Im} \left[I_m e^{j(\omega t + \psi_i)} \right]. \quad (4.1.5)$$

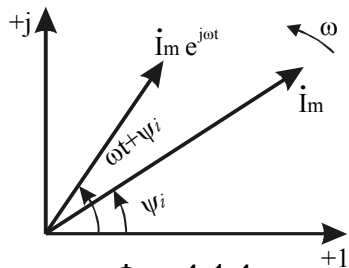
Комплексното число $\dot{i}$ може да бъде записано по следния начин:

$$\dot{i} = I_m e^{j(\omega t + \psi_i)} = I_m e^{j\psi_i} e^{j\omega t} = \dot{I}_m e^{j\omega t}, \quad (4.1.6)$$

където $\dot{I}_m = I_m e^{j\psi_i}$ е комплексната амплитуда на тока.

Въз основа на разгледаното по-горе, може да се заключи, че комплексното число $\dot{i} = I_m e^{j(\omega t + \psi_i)}$ изобразява синусоидалния ток $i = I_m \sin(\omega t + \psi_i)$. Прието е синусоидалната величина да се нарича оригинал, а комплексното число – комплексен образ. Двете величини – оригиналът и образът се свързват с знака за изобразяване (съответствие) така:

$$i = I_m \sin(\omega t + \psi_i) \quad \equiv \quad \dot{i} = I_m e^{j(\omega t + \psi_i)} = \dot{I}_m e^{j\psi_i}. \quad (4.1.7)$$



Фиг. 4.1.4.

Може да се установи, че между изобразяването на синусоидалните величини с въртящи се вектори и с комплексни числа съществува връзка. За целта се разглежда представянето на комплексните числа в така наречената комплексна равнина. Положителната посока на реалната ос на тази равнина се означава с $+1$, а положителната посока на имагинерната ѝ ос – с $+j$. Комплексните числа се нанасят в комплексната равнина,

като по реалната ос се нанасят реалните им части, а по имагинерната ос – имагинерните им части.

Комплексното число $\dot{I}_m = I_m e^{j\psi_i} = I_m \cos \psi_i + j I_m \sin \psi_i$; изобразява точка от

комплексната равнина с абсциса $I_m \cos \psi_i$ и ордината $I_m \sin \psi_i$ (фиг. 4.1.4). Тази точка се разглежда като край на вектор, свързващ координатното начало 0 с точката. При такова разглеждане на всяко комплексно число съответствува вектор, а на всеки вектор – комплексно число. Ако от момента $t = 0$ векторът $\dot{I}_m$ започне да се върти в указаната посока с ъглова скорост ω , то ще му съответствува комплексната функция на времето: $\dot{i} = \dot{I}_m e^{j\omega t} = I_m e^{j(\omega t + \psi_i)} = I_m \cos(\omega t + \psi_i) + j I_m \sin(\omega t + \psi_i)$, чиято имагинерна част е равна на синусоидално изменящия се ток $i = I_m \sin(\omega t + \psi_i)$.

3. Стойности на променливотоковите величини

а) ефективна стойност

Известно е, че механичната сила на взаимодействие между два проводника през които преминава един и същ ток е пропорционална на квадрата на моментната стойност на тока. Топлинното действие на тока също е пропорционално на квадрата на моментната му стойност. Въз основа на тези съображения за големината на променливия ток може да се съди по средноквадратичната му стойност, която носи названието ефективна.

За дефиниране на понятието ефективна стойност на променливия ток се разглежда мощността, която се отделя във вид на топлина в проводник със съпротивление R за един период на тока. Тази мощност се дава с формулата:

$$\frac{1}{T} \int_0^T p_R dt = \frac{1}{T} \int_0^T R i^2 dt = R \frac{1}{T} \int_0^T i^2 dt = R I^2. \quad (4.1.8)$$

Въз основа на формула (4.1.8) може да се заключи, че ефективната стойност на променливия ток числено е равна на стойността на такъв постоянен ток, който за време равно на периода на променливия ток отделя в проводник със съпротивление R същото количество топлина, както и променливият ток, т.е.:

$$I = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T i^2 dt}. \quad (4.1.9)$$

По формули, аналогични на формула (4.1.9) се определят ефективните стойности на ЕДН и напрежението:

$$E = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T e^2 dt} \quad \text{и} \quad U = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T u^2 dt}. \quad (4.1.10)$$

В случай, че токът i се изменя по синусоидален закон, т.е.: $i = I_m \sin(\omega t + \psi_i)$, то между ефективната му стойност I и амплитудната му стойност I_m се установява следната връзка:

$$I^2 = \frac{1}{T} \int_0^T i^2 dt = \frac{1}{T} \int_0^T I_m^2 \sin^2(\omega t + \psi_i) dt = I_m^2 \frac{1}{T} \int_0^T \frac{1 - \cos(2\omega t + 2\psi_i)}{2} dt = \frac{I_m^2}{2}. \quad (4.1.11)$$

Оттук се достига до формулата:

$$I = I_m / \sqrt{2}. \quad (4.1.12)$$

Аналогично за ЕДН и напрежението се записва:

$$E = E_m / \sqrt{2} \quad \text{и} \quad U = U_m / \sqrt{2}. \quad (4.1.13)$$

б) средна стойност

Известно е, че голяма част от измервателните уреди, използвани при

променливотоковите вериги, показват ефективната стойност на променливотоковите величини. Освен ефективните стойности на тези величини интерес представляват и средните им стойности.

В случай, че променливотоковите величини са синусоидални функции на времето, то средната им стойност за период е равна на нула, тъй като те са симетрични спрямо оста на времето. Ето защо при синусоидални ЕДН, токове и напрежения се дефинира средната стойност за полупериод.

За връзката между средната стойност за синусоидалния ток за полупериод I_{av} и амплитудната му стойност се получава следната формула (за удобство е приета началната фаза на тока ψ_i равна на нула, т.е.: $\psi_i = 0$):

$$I_{av} = \frac{2}{T} \int_0^{T/2} i dt = \frac{2}{T} \int_0^{T/2} I_m \sin \omega t dt = \frac{2I_m}{\omega T} (-\cos \omega t) \Big|_0^{T/2} = \frac{4I_m}{\omega T} = \frac{2}{\pi} I_m. \quad (4.1.14)$$

Аналогично за средните стойности E_{av} , U_{av} на ЕДН и напрежението се записва:

$$E_{av} = 2E_m/\pi \text{ и } U_{av} = 2U_m/\pi. \quad (4.1.15)$$

4. Основни закони

При променливотоковите електрически вериги освен токовете на проводимостта трябва да се отчитат променливите магнитни полета и токовете на разсейването, т.е. освен източниците на ЕДН и на ток и резисторите трябва да се отчита още наличието на индуктивни и капацитивни елементи. Връзките между тока напрежението за резистор, индуктивен, капацитивен и взаимноиндуктивен елемент са разгледани в раздел II. Тук се дават само законите на Кирхоф.

а) първи закон на Кирхоф

Законът е валиден за кой да е възел на променливотоковата електрическа верига и гласи следното: Алгебричната сума от моментните стойности на токовете за възел на променливотокова електрическа верига е нула, т.е.

$$\sum_{k=1}^n i_k = 0. \quad (4.1.16)$$

б) втори закон на Кирхоф

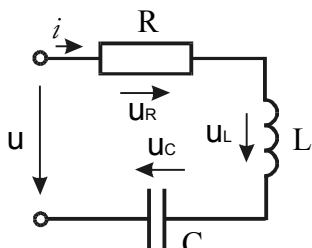
Законът се отнася за кой да е затворен контур на променливотокова електрическа верига и гласи следното: Алгебричната сума от моментните стойности на ЕДН в затворен контур на променливотокова електрическа верига е равна на алгебричната сума от моментните стойности на напреженията върху всички елементи, съставляващи контура, т.е.:

$$\sum_{k=1}^n e_k = \sum_{k=1}^n u_k. \quad (4.1.17)$$

Съставянето на уравненията по законите на Кирхоф за променливотоковите електрически вериги е аналогично, както при постояннотоковите вериги. Единствената разлика се състои в това, че уравненията се отнасят за моментните стойности на ЕДН, токовете и напреженията.

4.2. Установен синусоиден режим в последователна R, L, C верига

1. Общи положения



Фиг. 4.2.1

Електрическата схема на последователната R, L, C верига е показана на фиг. 4.2.1. Към веригата е подадено синусоидално напрежение $u = U_m \sin(\omega t + \psi_u)$.

По втория закон на Кирхоф за напрежението u се записва следното уравнение:

$$u = u_R + u_L + u_C. \quad (4.2.1)$$

Напрежението върху отделните елементи се изразява чрез

тока, съгласно формулите (вж. раздел II):

$$u_R = Ri; \quad u_L = L \frac{di}{dt} \quad \text{и} \quad u_C = \frac{1}{C} \int_0^t i dt + u_C(0). \quad (4.2.2)$$

Интеграционната константа $u_C(0) = q(0)/C$ в последната формула е стойността на напрежението върху кондензаторния елемент в началния момент $t = 0$.

След заместване на изразите за напреженията u_R , u_L и u_C във формула (4.2.1) се достига до следното уравнение:

$$Ri + L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int_0^t i dt + u_C(0) = u. \quad (4.2.3)$$

От последния израз може да се установи, че процесът напрежение – ток във веригата се описва от интегродиференциално уравнение по отношение на тока. Общото решение $i(t)$ на това уравнение може да бъде представено като сума от две съставки $i'(t)$ и $i''(t)$, т.е.:

$$i(t) = i'(t) + i''(t).$$

Съставката $i'(t)$ е частно решение на уравнение (4.2.3). Тази съставка се определя от вида на напрежението $u(t)$ и от вида на веригата.

Съставката $i''(t)$ е общо решение на однородното уравнение, което се получава, ако в уравнение (4.2.3) се приеме, че напрежението $u(t) = 0$, т.е. без въздействието на външния източник. Тази съставка се определя от вида на веригата и се дължи на енергийни запаси в полетата ѝ. При наличието във веригата на резистор със съпротивление R , енергийните запаси се изразходват в него във вид на топлина. Ето защо съставката $i''(t)$ постепенно затихва, което се извършва за сравнително кратък интервал от време. Така във веригата се установява съставката $i'(t)$, която е токът на установения ѝ режим.

2. Уравнение на установения синусоиден режим

При синусоидално входно напрежение $u(t)$, както е в случая, токът на установения режим във веригата също ще бъде синусоиден, т.е.: $i = I_m \sin(\omega t + \psi_i)$. При анализа на установения синусоиден режим е удобно началната фаза на напрежението или тока да бъде приета равна на нула. За разглежданата верига обща величина е токът. Ето защо за случая е целесъобразно началната му фаза да бъде приета равна на нула, т.е.: $\psi_i = 0$. Като се има предвид, че фазовата разлика между напрежението и тока е: $\varphi = \varphi_u - \varphi_i$, то началната фаза на напрежението ще бъде: $\psi_u = \varphi$. И така, за напрежението $u(t)$ и тока $i(t)$ се записва:

$$u(t) = U_m \sin(\omega t + \varphi) \quad \text{и} \quad i(t) = I_m \sin \omega t. \quad (4.2.4)$$

Ако последният израз за тока се замени във формула (4.1.2), за напреженията u_R , u_L и u_C се получава:

$$u_R = Ri = RI_m \sin \omega t; \quad (4.2.5)$$

$$u_L = L \frac{di}{dt} = \omega LI_m \cos(\omega t) = \omega LI_m \sin(\omega t + \pi/2); \quad (4.2.6)$$

$$u_C = \frac{1}{C} \int_0^t i dt + u_C(0) = -\frac{I_m}{\omega C} \cos \omega t \Big|_0^t + u_C(0) = \frac{I_m}{\omega C} \sin(\omega t - \pi/2) + \frac{I_m}{\omega C} + u_C(0). \quad (4.2.7)$$

От израз (4.2.6) може да се констатира, че диференцирането на синусоидална функция е равнозначно на умножаването ѝ с ω и увеличаване на фазата ѝ с $\pi/2$. По отношение на интегрирането на синусоидална функция, от израз (4.2.7) може да се установи, че тази операция е равнозначна на деление на функцията с ω и намаляване на фазата ѝ с $\pi/2$.

След заместване на изрази (4.2.5) ... (4.2.7) в уравнение (4.2.3) се достига до

формулата:

$$R I_m \sin \omega t + \omega L I_m \sin(\omega t + \pi/2) + \frac{I_m}{\omega C} \sin(\omega t - \pi/2) + \frac{I_m}{\omega C} + u_C(0) = U_m \cdot \sin(\omega t + \varphi). \quad (4.2.8)$$

Тъй като в случая се разглежда установен синусоиден режим във веригата, то в последната формула сумата от постоянните съставки се приема равна на нула, т.е.: $I_m / \omega C + u_C(0) = 0$. Така се получава уравнението:

$$R I_m \sin \omega t + \omega L I_m \sin(\omega t + \pi/2) + \frac{I_m}{\omega C} \sin(\omega t - \pi/2) = U_m \cdot \sin(\omega t + \varphi). \quad (4.2.9)$$

Последното уравнение описва установения синусоиден режим в последователната R, L, C верига.

3. Пълно съпротивление и фазова разлика

Уравнение (4.2.9) е валидно за кой да е момент от време. В частност за моментите от време, при които $\omega t = \pi/2$ и $\omega t = 0$, се записва:

$$\begin{cases} R I_m = U_m \cos \varphi; \\ (\omega L - 1/\omega C) I_m = U_m \sin \varphi. \end{cases} \quad (4.2.10)$$

След повдигане на квадрат и сумиране на левите и десните страни на уравненията на системата (4.2.10) се получава:

$$[R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2] I_m^2 = U_m^2. \quad (4.2.11)$$

Оттук за връзката между амплитудните стойности на тока I_m и напрежението U_m се записва:

$$I_m = U_m / \sqrt{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2}. \quad (4.2.12)$$

След разделяне на лявата и дясната страна на уравнение (4.2.12) на $\sqrt{2}$ се получава аналогична връзка между ефективните стойности на тока I и на напрежението U :

$$I = U / \sqrt{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2}. \quad (4.2.13)$$

Величината в знаменателя на десните страни на уравнения (4.2.12) и (4.2.13) има размерност на съпротивление. Тази величина се означава с z и се нарича пълно съпротивление на веригата, т.е.:

$$z = U_m / I_m = U / I = \sqrt{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2}. \quad (4.2.14)$$

Тъй като приложеното напрежение u има три съставки u_R , u_L и u_C , то пълното съпротивление z в общия случай ще бъде по-голямо от съпротивлението R на резистора. Последното определя необратимото преобразуване на електромагнитната енергия в топлина и се нарича активно съпротивление.

Величината $(\omega L - 1/\omega C)$, характеризираща реакцията на индуктивния и капацитивния елемент, има размерност също на съпротивление. Тази величина се нарича реактивно съпротивление и се означава с X . Респективно, величината ωL , характеризираща реакцията на индуктивния елемент се нарича индуктивно съпротивление и се означава с X_L , а величината $1/\omega C$, характеризираща реакцията на капацитивния елемент, се нарича капацитивно съпротивление и се означава с X_C .

Тук следва да се отбележи, че съпротивлението на резистора при постоянен ток носи названието омическо. Активното съпротивление е по-голямо от омическото съпротивление, което се свързва с повърхностния ефект. При това, с увеличаване на честотата, активното съпротивление нараства.

Въз основа на изложеното по-горе, за отделните съпротивления се записва:

$$\begin{cases} X_L = \omega L; \quad X_C = 1/\omega L; \quad X = \omega L - 1/\omega C = X_L - X_C; \\ z = \sqrt{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2} = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} = \sqrt{R^2 + X^2}. \end{cases} \quad (4.2.15)$$

Ако второто уравнение на система (4.2.10) се раздели на първото й уравнение, се получава:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\omega L - 1/\omega C}{R} = \frac{X_L - X_C}{R} = \frac{X}{R}, \quad (4.2.16)$$

откъдето за фазовата разлика φ между приложеното напрежение и тока се достига до израза:

$$\varphi = \operatorname{arctg} \frac{X}{R}. \quad (4.2.17)$$

Като се отчете, че: $z^2 = R^2 + X^2$ и се умножи с I^2 се получава:

$$U^2 = z^2 \cdot I^2 = R^2 \cdot I^2 + X^2 \cdot I^2 = U_R^2 + U_X^2 = U_R^2 + (U_L - U_C)^2. \quad (4.2.18)$$

В последния израз са направени полаганията:

$$U_R = R \cdot I \text{ и } U_X = X \cdot I = (X_L - X_C) \cdot I = U_L - U_C. \quad (4.2.19)$$

Величините U_R , U_X , U_L и U_C , аналогично на съпротивления R , X , X_L и X_C , се наричат съответно, активно, реактивно, индуктивно и капацитивно напрежения.

Ако в уравнение (4.2.17) изразът X/R се умножи и раздели на тока I , за фазовата разлика φ се получава:

$$\varphi = \operatorname{arctg} \frac{X}{R} \frac{I}{I} = \operatorname{arctg} \frac{U_X}{U_R} = \operatorname{arctg} \frac{U_L - U_C}{U_R}. \quad (4.2.20)$$

Последният израз показва, че фазовата разлика φ между приложеното напрежение и тока може да бъде определена и чрез отношението от ефективните стойности на реактивната и активната съставки на напрежението.

От уравнение (4.2.18) може да се запише:

$$U = \sqrt{U_R^2 + U_X^2} = \sqrt{U_R^2 + (U_L - U_C)^2}, \quad (4.2.21)$$

откъдето следва, че ефективните стойности на активното и реактивното напрежения се сумират геометрично. Това се обяснява с наличието на разлики във фазите между тока и напреженията. И действително, от уравнения (4.2.5) ... (4.2.7) може да се установи, че активното напрежение съвпада по фаза с тока; индуктивното напрежение изпреварва тока на ъгъл $\pi/2$; капацитивното напрежение изостава от тока на ъгъл $\pi/2$. Последното означава, че двете реактивни напрежения във всеки момент от време са в противофаза.

По отношение на общото реактивно напрежение са възможни следните случаи:

1. Общото реактивно напрежение изпреварва тока на ъгъл $\pi/2$, т.е.: $U_X = U_L - U_C > 0$. Това се получава, когато реактивното съпротивление $X = \omega L - 1/\omega C > 0$, т.е.: $X_L = \omega L > X_C = 1/\omega C$. При този случай фазовата разлика $\varphi > 0$.

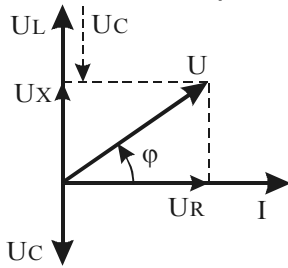
2. Общото реактивно напрежение изостава от тока на ъгъл $\pi/2$, т.е.: $U_X = U_L - U_C < 0$. Това се получава, когато реактивното съпротивление $X = \omega L - 1/\omega C < 0$, т.е.: $X_L = \omega L < X_C = 1/\omega C$. При този случай фазовата разлика $\varphi < 0$.

3. Общото реактивно напрежение е равно на нула, т.е. $U_X = U_L - U_C = 0$. Това е възможно, когато реактивното съпротивление $X = \omega L - 1/\omega C = 0$, т.е.: $X_L = \omega L = X_C = 1/\omega C$. По отношение на фазовата разлика φ се получава $\varphi = 0$, т.е. независимо от наличието на индуктивен и капацитивен елементи във веригата пълното й съпротивление z е чисто активно и е равно на активното й съпротивление R , т.е.: $z = R$, а приложеното напрежение и токът са във фаза. Този случай е известен под названието резонанс в последователна R , L , C верига и е обект на специално разглеждане в следващия раздел.

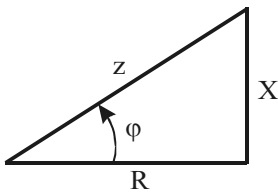
4. При верига без загуби, т.е. резисторът отсъства ($R = 0$), то отношението X/R ще клони към $\pm\infty$, т.е.: $X/R \rightarrow \pm\infty$. В такъв случай фазовата разлика φ ще клони към $+\pi/2$, т.е.: $\varphi \rightarrow +\pi/2$, ако преобладава индуктивното съпротивление $X_L = \omega L$, или

фазовата разлика φ ще клони към $-\pi/2$, т.е.: $\varphi \rightarrow -\pi/2$, ако преобладава капацитивното съпротивление $X_C = 1/\omega C$. При този случай приложеното напрежение и токът ще бъдат в квадратура.

4. Векторна диаграма и триъгълник на съпротивленията



Фиг. 4.2.2.



Фиг. 4.2.3.

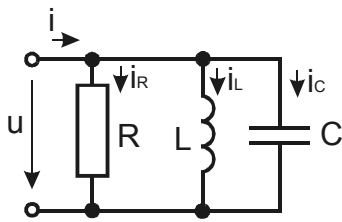
Графичното изобразяване на връзките между тока и напреженията върху отделните елементи, както и на връзката между тока и приложеното напрежение ще бъде разгледано при анализа на мощностите в последователната R, L, C верига. Тук ще бъде представена само векторната диаграма на тока и напреженията. Видът на тази диаграма в случай, че преобладава индуктивното напрежение, т.е. $U_X = U_L - U_C > 0$ и $\varphi > 0$, е показана на фиг. 4.2.2. От фигурата може да се види, че векторите, изобразяващи напреженията U_R , U_X и U , образуват правоъглен триъгълник. Този триъгълник носи названието триъгълник на напреженията.

Като се имат предвид формули (4.2.19), то ако страните на триъгълника на напреженията се разделят на тока, се получава подобен на него триъгълник (фиг. 4.2.3), който се нарича триъгълник на съпротивленията. При еднакви мащаби на напреженията и съпротивленията, може да се използва

един и същи триъгълник.

4.3. Установен синусоиден режим в паралелна R, L, C верига

1. Общи положения



Фиг. 4.3.1.

Електрическата схема на паралелната R, L, C верига е показана на фиг. 4.3.1. Към веригата е подадено синусоидално напрежение $u = U_m \sin(\omega t + \psi_u)$.

По първия закон на Кирхоф за токовете се записва следното уравнение:

$$i = i_R + i_L + i_C. \quad (4.3.1)$$

Токовете през отделните елементи се изразяват чрез напрежението съгласно формулите (вж. раздел II):

$$i_R = \frac{1}{R}u = Gu = i_G; \quad i_L = \frac{1}{L} \int_0^t u dt + i_L(0); \quad i_C = C \frac{du}{dt}. \quad (4.3.2)$$

Интеграционната константа $i_L(0) = \Psi_L(0)/L$ във втората формула е стойността на тока през индуктивния елемент в началния момент $t = 0$.

След заместване на изразите за токовете i_R , i_L и i_C във формула (4.3.1) се достига до следното уравнение:

$$Gu + C \frac{du}{dt} + \frac{1}{L} \int_0^t u dt + i_L(0) = i. \quad (4.3.3)$$

От последното уравнение може да се види, че процесът в паралелната R, L, C верига, както и в последователната R, L, C верига, се описва също от интегродиференциално уравнение, в случая по отношение на напрежението.

2. Уравнение на установения синусоиден режим

При синусоидално входно напрежение $u(t)$ във веригата се установява също синусоидален ток $i(t)$, т.е.: $i = I_m \sin(\omega t + \psi_i)$. В разглежданата верига обща величина е напрежението. Ето защо в случая е удобно началната му фаза ψ_u да бъде приета равна на нула, т.е.: $\psi_u = 0$. Тогава за началната фаза на тока ψ_i се получава: $\psi_i = -\varphi$. И така за напрежението $u(t)$ и тока $i(t)$ се записва:

$$u(t) = U_m \sin \omega t \quad \text{и} \quad i(t) = I_m \sin(\omega t - \varphi). \quad (4.3.4)$$

Ако последният израз за напрежението u се замести във формули (4.3.2), за токовете i_G , i_C и i_L се получава:

$$i_G = Gu = G U_m \sin \omega t ; \quad (4.3.5)$$

$$i_C = C \frac{du}{dt} = \omega C U_m \cos \omega t = \omega C U_m \sin(\omega t + \pi/2) ; \quad (4.3.6)$$

$$i_L = \frac{1}{L} \int u dt + i_L(0) = -\frac{U_m}{\omega L} \cos \omega t \Big|_0^t + i_L(0) = \frac{U_m}{\omega L} \sin(\omega t - \frac{\pi}{2}) + \frac{U_m}{\omega L} + i_L(0). \quad (4.3.7)$$

След заместване на изрази (4.3.5) ... (4.3.7) в уравнение (4.3.3) се достига до формулата:

$$G U_m \sin \omega t + \omega C U_m \sin(\omega t + \pi/2) + \frac{U_m}{\omega L} \sin(\omega t - \pi/2) + \frac{U_m}{\omega L} + i_L(0) = I_m \sin(\omega t - \varphi). \quad (4.3.8)$$

За установен синусоиден режим за сумата от постоянните съставки се записва: $U_m/\omega L + i_L(0) = 0$ и се получава уравнението:

$$G U_m \sin \omega t + \omega C U_m \sin(\omega t + \pi/2) + \frac{U_m}{\omega L} \sin(\omega t - \pi/2) = I_m \sin(\omega t - \varphi), \quad (4.3.9)$$

което описва този режим в паралелната R, L, C верига.

3. Пълна проводимост и фазова разлика

Уравнение (4.3.9) е в сила за кой да е момент от време. За моментите от време, за които $\omega t = \pi/2$ и $\omega t = 0$ се получава:

$$\left| \begin{aligned} G U_m &= I_m \cos \varphi ; \\ (\omega C - 1/\omega L) U_m &= -I_m \sin \varphi \text{ или } (1/\omega L - \omega C) U_m = I_m \sin \varphi . \end{aligned} \right. \quad (4.3.10)$$

След повдигане на квадрат и сумиране на уравненията на система (4.3.10) се достига до изказа:

$$[G^2 + (1/\omega L - \omega C)^2] U_m^2 = I_m^2. \quad (4.3.11)$$

Оттук за връзката между амплитудните стойности на тока и напрежението се записва:

$$I_m = U_m \sqrt{G^2 + (1/\omega L - \omega C)^2}. \quad (4.3.12)$$

След разделяне на лявата и дясната части на последното равенство на $\sqrt{2}$ се получава аналогична зависимост между ефективните стойности на тока и напрежението:

$$I = U \sqrt{G^2 + (1/\omega L - \omega C)^2}. \quad (4.3.13)$$

Величината, с която в уравнения (4.3.12) и (4.3.13) е умножено напрежението, има размерност на проводимост. Тази величина се нарича пълна проводимост на веригата и се означава с y , т.е.:

$$y = I_m / U_m = I/U = \sqrt{G^2 + (1/\omega L - \omega C)^2}. \quad (4.3.14)$$

Пълната проводимост y , аналогично на пълното съпротивление z , има активна съставка G , определяща необратимото преобразуване на електромагнитната енергия в топлинна в резистора, и реактивна съставка $(1/\omega L - \omega C) = B$, характеризираща реакцията на индуктивния и капацитивния елементи. Респективно, величината $1/\omega L = B_L$ се нарича индуктивна проводимост, а величината $\omega C = B_C$ – капацитивна проводимост.

Въз основа на изложеното по-горе за отделните проводимости се записва:

$$\left| \begin{aligned} B_L &= 1/\omega L ; B_C = \omega C ; B = 1/\omega L - \omega C = B_L - B_C ; \\ y &= \sqrt{G^2 + (1/\omega L - \omega C)^2} = \sqrt{G^2 + (B_L - B_C)^2} = \sqrt{G^2 + B^2} . \end{aligned} \right. \quad (4.3.15)$$

Ако второто уравнение на система (4.3.10) се раздели на първото й уравнение, се получава:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{1/\omega L - \omega C}{G} = \frac{B_L - B_C}{G} = \frac{B}{G}. \quad (4.3.16)$$

Оттук за фазовата разлика φ между приложеното напрежение и тока на входа на веригата се достига до израза:

$$\varphi = \arctg(B/G). \quad (4.3.17)$$

Като се има предвид, че $y^2 = G^2 + B^2$ и се умножи с U^2 , се получава:

$$I^2 = y^2 U^2 = G^2 U^2 + B^2 U^2 = I_G^2 + I_B^2 = I_G^2 + (I_L - I_C)^2. \quad (4.3.18)$$

В последния израз са направени полаганията:

$$I_G = GU; I_B = BU = (B_L - B_C)U = I_L - I_C. \quad (4.3.19)$$

Величините I_G , I_B , I_L и I_C , аналогично на проводимостите G , B , B_L и B_C се наричат съответно, активен, реактивен, индуктивен и капацитивен токове.

Ако в уравнение (4.3.17) изразът B/G се умножи и раздели на напрежението U , за фазовата разлика φ се получава:

$$\varphi = \arctg \frac{B U}{G U} = \arctg \frac{I_B}{I_G} = \arctg \frac{I_L - I_C}{I_G}. \quad (4.3.20)$$

От израз (4.3.20), може да се установи, че фазовата разлика φ между приложеното напрежение и тока на входа на веригата може да бъде определена и чрез отношението от ефективните стойности на реактивната и активната съставки на тока.

От уравнение (4.3.18) може да се запише:

$$I = \sqrt{I_G^2 + I_B^2} = \sqrt{I_G^2 + (I_L - I_C)^2}. \quad (4.3.21)$$

От последния израз може да се установи, че ефективните стойности на реактивния и активния токове, аналогично както активното и реактивното напрежения при последователната R , L , C верига се сумират геометрично. И тук обяснението е аналогично, а именно това се свързва с наличието на фазови разлики между приложеното напрежение и токовете. От уравнения (4.3.6) . . . (4.3.7) може да се установи, че активният ток съвпада по фаза с напрежението; капацитивният ток изпреварва напрежението на ъгъл $\pi/2$; индуктивният ток изостава от напрежението на ъгъл $\pi/2$. Последното означава, че двата реактивни тока във всеки момент от време са в противофаза.

По отношение на общия реактивен ток са възможни следните случаи:

1. Общият реактивен ток изостава от напрежението на ъгъл $\pi/2$, т.е.: $I_B = I_L - I_C > 0$. Това се получава, когато реактивната проводимост $B = 1/\omega L - \omega C > 0$, т.е.: $B_L = 1/\omega L > B_C = \omega C$. При този случай фазовата разлика $\varphi > 0$.

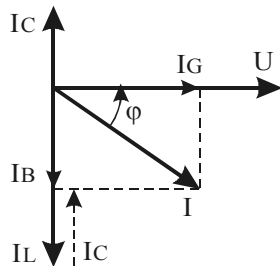
2. Общият реактивен ток изпреварва напрежението на ъгъл $\pi/2$, т.е.: $I_B = I_L - I_C < 0$. Това се получава, когато реактивната проводимост $B = 1/\omega L - \omega C < 0$ т.е.: $B_L = 1/\omega L < B_C = \omega C$. При този случай фазовата разлика $\varphi < 0$.

3. Общият реактивен ток е равен на нула, т.е.: $I_B = I_L - I_C = 0$. Това е възможно, когато реактивната проводимост $B = 1/\omega L - \omega C = 0$, т.е.: $B_L = 1/\omega L = B_C = \omega C$. За фазовата разлика φ се получава $\varphi = 0$. Последното означава, че независимо от наличието на индуктивен и капацитивен елементи във веригата, пълната й проводимост y е чисто активна и е равна на активната й проводимост G , т.е.: $y = G$, а приложеното напрежение и токът на входа на веригата са във фаза. Този случай е известен под названието резонанс в паралелна R , L , C верига и е обект на специално разглеждане в следващия раздел.

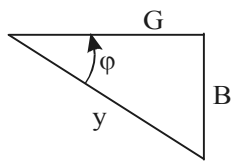
4. При верига без загуби, т.е. резисторът отсъства ($G = 0$), то отношението B/G ще клони към $\pm \infty$, т.е.: $B/G \rightarrow \pm \infty$. В такъв случай фазовата разлика φ ще клони

към $+\pi/2$, т.е.: $\varphi \rightarrow +\pi/2$, ако преобладава индуктивната проводимост $B_L = 1/\omega L$, или фазовата разлика φ ще клони към $-\pi/2$, т.е.: $\varphi \rightarrow -\pi/2$, ако преобладава капацитивната проводимост $B_C = \omega C$. При този случай приложеното напрежение и токът на входа на веригата ще бъдат в квадратура.

4. Векторна диаграма и триъгълник на проводимостите



Фиг. 4.3.2.



Фиг. 4.3.3.

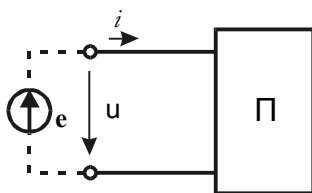
Видът на векторната диаграма на приложеното напрежение и токовете за паралелна R, L, C верига в случай, че преобладава индуктивният ток, т.е.: $I_B = I_L - I_C > 0$ и $\varphi > 0$ е показан на фиг. 4.3.2. От фигурата може да се констатира, че векторите, изобразяващи токовете I_G , I_B и I образуват правоъгълен триъгълник. Този триъгълник се нарича триъгълник на токовете.

Като се имат предвид формули (4.3.19), то ако страните на триъгълника на токовете се разделят на напрежението, се получава подобен на него триъгълник (фиг. 4.3.3), който носи названието триъгълник на проводимостите. При еднакви мащаби на токовете и проводимостите може да се използва един и същ триъгълник.

4.4. Мощност при установен синусоиден режим, моментна мощност и колебания на енергията във верига с последователно съединени R, L, C елементи

1. Моментна мощност

За дефиниране на понятието моментна мощност се разглежда пасивен участък на електрическа верига, към който е подадено напрежение u (фиг. 4.4.1). Приема се, че под действието на източника на ЕДН през участъка за елементарен



Фиг. 4.4.1.

интервал от време dt преминава заряд dq , при което се извършва работа $dA = u \cdot dq$.

Скоростта на извършената работа определя моментната мощност, отдавана от източника в участъка, т.е.:

$$\frac{dA}{dt} = u \frac{dq}{dt} = u \cdot i = p. \quad (4.4.1)$$

В случай на синусоиден режим за напрежението u и

тока i се записва:

$$u = U_m \sin(\omega t + \varphi) \text{ и } i = I_m \sin \omega t. \quad (4.4.2)$$

Във формула (4.4.2) за началната фаза на тока е прието $\psi_i = 0$, т.е. $\psi_u = \varphi$.

За моментната мощност p се получава:

$$p = u \cdot i = U_m I_m \sin(\omega t + \varphi) \cdot \sin \omega t = \frac{U_m I_m}{2} [\cos \varphi - \cos(2\omega t + \varphi)] = U I \cos \varphi - U I \cos(2\omega t + \varphi). \quad (4.4.3)$$

От последната формула може да се установи, че моментната мощност p има постоянна съставка и хармонична съставка, изменяща се с удвоена честота. Това означава, че в общия случай мощността p може да бъде, както положителна, така и отрицателна.

Моментната мощност $p > 0$ за интервалите от време, за които напрежението u и токът i имат еднакви знаци, т.е. когато действителните им посоки за участъка са еднакви. Ако напрежението u и токът i имат различни знаци, т.е. действителните им посоки за участъка са противоположни, то мощността $p < 0$.

Разгледаното по-горе се отнася за участъци, които освен резистори съдържат и реактивни елементи – бобини и кондензатори, в чиито полета се запасява енергия.

За интервалите от време, за които моментната мощност $p > 0$, от източника към участъка постъпва енергия, а за интервалите от време, за които мощността

$p < 0$, от полетата на реактивните елементи на участъка се връща енергия към източника.

Ако участъкът се състои само от резистори, то в тях не може да се запасява енергия. В този случай напрежението u и токът i са във фаза и са винаги с еднакъв знак. Тогава мощността $p \geq 0$ и отсъствуват интервали от време, през които се връща енергия от участъка към източника.

По-подробно въпросът за колебанията на енергията ще бъде разгледан в по-нататъшното изложение за случая на последователна R, L, C верига.

2. Активна мощност

Средната стойност на моментната мощност p за период T дефинира величината активна мощност P , т.е.:

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T p dt = \frac{1}{T} \int_0^T u i dt. \quad (4.4.4)$$

При синусоиден режим за активната мощност P се получава:

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T U_m \sin(\omega t + \varphi) \cdot I_m \sin \omega t dt = \frac{U_m I_m}{2T} \int_0^T [\cos \varphi - \cos(2\omega t + \varphi)] dt = UI \cos \varphi. \quad (4.4.5)$$

От формули (4.4.3) и (4.4.5) може да се констатира, че активната мощност P е равна на постоянната съставка на моментната мощност p .

Множителят $\cos \varphi$ носи названието коефициент или фактор на мощността. Той показва каква част от отдаваната от източника мощност UI е активната мощност. Тъй като обикновено $\cos \varphi < 1$, то $P < UI$. Ако $\varphi = 0$, то $\cos \varphi = 1$ и цялата отдавана от източника мощност е активна мощност, т.е.: $P = UI$. Когато $\varphi = \pm \pi/2$, то $\cos \varphi = 0$ и източникът не отдава активна мощност, т.е.: $P = 0$.

Максимално използване на източниците и устройствата за преобразуване на електромагнитната енергия се постига, когато факторът на мощността $\cos \varphi = 1$. Ето защо при експлоатацията на устройствата стремежът е да се реализира такъв режим на работа, при който да се осъществи максимално доближаване на $\cos \varphi$ до единица.

В промишлените предприятия товарът обикновено има активно-индуктивен характер. В този случай за повишаване на фактора на мощността $\cos \varphi$ се прилага компенсиране на индуктивната съставка на товара чрез паралелно включване на кондензаторни батерии към консуматорите.

Размерността на активната мощност P е ват (W), т.е.: $\dim P = W$.

Като се имат предвид формулите: $U \cos \varphi = U_R = RI$ и $I \cos \varphi = I_G = GU$, за активната мощност P може да се запише:

$$P = UI \cos \varphi = RI^2 = GU^2. \quad (4.4.6)$$

3. Пълна мощност

Произведението от ефективните стойности на напрежението U и на тока I определя пълната мощност S , т.е.:

$$S = UI. \quad (4.4.7)$$

Пълната мощност S е равна на най-голямата възможна стойност на активната мощност P при зададени стойности на напрежението и тока, т.е.: $S = P = UI$ при $\cos \varphi = 1$.

Размерността на пълната мощност S е волт-ампер (V.A), т.е.: $\dim S = V.A$.

Въз основа на формулите $U = z.I$ и $I = y.U$ за пълната мощност може да се запише:

$$S = UI = zI^2 = yU^2. \quad (4.4.8)$$

4. Реактивна мощност

При проектирането и експлоатацията на електрическите вериги и мрежи за променлив ток се използва и така наречената реактивна мощност Q . Мощността Q

се дефинира по следния начин:

$$Q = UI \sin \varphi. \quad (4.4.9)$$

Смисълът от въвеждането на понятието реактивна мощност може да бъде илюстриран със следния пример: Отдаваната на консуматор енергия се измерва чрез електромер за активна енергия W , чието показание за интервал от време τ е:

$$W = \int_0^{\tau} P dt = \int_0^{\tau} UI \cos \varphi dt. \quad (4.4.10)$$

От показанието на този електромер не може да се съди при какъв $\cos \varphi$ е работил консуматорът. Ето защо се включва електромер за реактивна енергия W_P , чието показание за същия интервал от време τ е:

$$W_P = \int_0^{\tau} Q dt = \int_0^{\tau} UI \sin \varphi dt. \quad (4.4.11)$$

От разгледаното по-горе може да се установи, че колкото показанието на електромера за реактивна енергия е по-голямо, толкова е по-ниска средната стойност на $\cos \varphi$ за разглеждания интервал от време τ .

Размерността на реактивната мощност Q е волт-ампер реактивен, съкратено (VAr), т.е.: $\dim Q = \text{VAr}$.

Като се използват формулите: $U \sin \varphi = U_X = X \cdot I$ и $I \sin \varphi = I_B = B \cdot U$, за реактивната мощност Q се записва:

$$Q = UI \sin \varphi = XI^2 = BU^2. \quad (4.4.12)$$

Тук следва да се отбележи, че докато активната мощност P и пълната мощност S за консуматор са винаги положителни величини, то реактивната мощност Q е положителна само при активно-индуктивен товар, т.е.: $Q > 0$ при $\varphi > 0$. При активно-капацитивен товар мощността Q е отрицателна, т.е.: $Q < 0$ при $\varphi < 0$. При частния случай $\varphi = \pm \pi/2$, то $P = 0$ и $|Q| = S$.

Тук следва да се има предвид още, че докато понятието активна мощност, дефинирана като средна стойност на моментната мощност за период T , е валидно в общия случай на периодични несинусоидални режими, то понятията активна мощност P и реактивна мощност Q , дефинирани чрез изразите: $P = UI \cos \varphi$ и $Q = UI \sin \varphi$, са валидни само при синусоидални режими.

Като се имат предвид формулите: $P = UI \cos \varphi$, $Q = UI \sin \varphi$ и $S = UI$, между активната, реактивната и пълната мощности могат да бъдат установени следните връзки:

$$P = S \cos \varphi \text{ и } Q = S \sin \varphi; \quad (4.4.13)$$

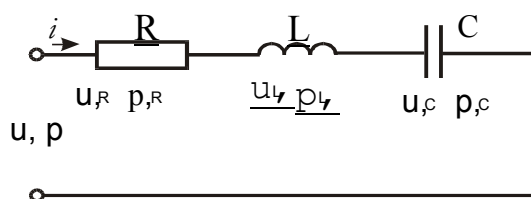
$$S^2 = P^2 + Q^2 \text{ и } S = \sqrt{P^2 + Q^2}; \quad (4.4.14)$$

$$\tan \varphi = Q/P. \quad (4.4.15)$$

5. Моментна мощност и колебания на енергията в последователна R, L, C верига

Както бе разгледано по-горе, моментната мощност $p = ui$ във веригите за променлив ток е функция на времето.

Разглеждат се енергийните процеси последователна R, L, C верига (фиг. 4.4.2).



Фиг. 4.4.2.

По втория закон на Кирхоф за напреженията се записва уравнението:

$$u = u_R + u_L + u_C = Ri + L \frac{di}{dt} + \frac{q}{C}. \quad (4.4.16)$$

Съответно за моментните мощности на входа на веригата и на отделните елементи се

достига до израза:

$$P = ui = p_R + p_L + p_C = u_R i + u_L i + u_C i = Ri^2 + iL \frac{di}{dt} + \frac{q}{C} \frac{dq}{dt} = Ri^2 + \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} Li^2 \right) + \frac{d}{dt} \frac{q^2}{C} =$$

$$= Ri^2 + \frac{d}{dt} (W_M) + \frac{d}{dt} (W_e). \quad (4.4.17)$$

От последния израз може да се установи, че мощността $p_R = Ri^2$ на резистора е винаги положителна величина и характеризира необратимия процес на поглъщане на енергията. Мощността $p_L = \frac{d}{dt}(W_M)$ на индуктивния елемент при $p_L > 0$ определя скоростта на постъпване на енергията в магнитното поле на елемента, а при $p_L < 0$ - скоростта на връщане на енергията от това поле. Мощността $p_C = \frac{d}{dt}(W_e)$ на капацитивния елемент при $p_C > 0$ определя скоростта на постъпване на енергията в електрическото поле на елемента, а при $p_C < 0$ – скоростта на връщане на енергията от това поле.

При синусоидален режим за напрежението u и токът i се записват изразите:

$$u = U_m \sin(\omega t + \varphi) \text{ и } i = I_m \sin \omega t. \quad (4.4.18)$$

Тъй като токът е общ за всички елементи във веригата, то в израз (4.4.18) е прието $\psi_i = 0$ и $\psi_u = \varphi$.

За моментните стойности на напреженията на отделните елементи се получават формулите:

$$u_R = Ri = R I_m \sin \omega t; \quad (4.4.19)$$

$$u_L = L \frac{di}{dt} = \omega L I_m \cos \omega t; \quad (4.4.20)$$

$$u_C = \frac{1}{C} \int i dt + u_C(0) = -\frac{I_m}{\omega C} \cos \omega t. \quad (4.4.21)$$

За моментните мощности на отделните елементи на веригата се достига до изразите:

$$p_R = u_R i = R I_m^2 \sin^2 \omega t = R I_m^2 \frac{1 - \cos 2\omega t}{2} = R I^2 (1 - \cos 2\omega t) =$$

$$= U_R I (1 - \cos 2\omega t) = UI \cos \varphi (1 - \cos 2\omega t); \quad (4.4.22)$$

$$p_L = u_L i = \omega L I_m^2 \sin \omega t \cos \omega t = \omega L I_m^2 \frac{1}{2} \sin 2\omega t = \omega L I^2 \sin 2\omega t =$$

$$= U_L I \sin 2\omega t; \quad (4.4.23)$$

$$p_C = u_C i = -\frac{1}{\omega C} I_m^2 \sin \omega t \cos \omega t = -\frac{1}{\omega C} I_m^2 \frac{1}{2} \sin 2\omega t = -\frac{1}{\omega C} I^2 \sin 2\omega t =$$

$$= -U_C I \sin 2\omega t. \quad (4.4.24)$$

За общата моментна мощност p_X на индуктивния и капацитивния елементи се получава:

$$p_X = p_L + p_C = (U_L - U_C) I \sin 2\omega t = U_X I \sin 2\omega t = UI \sin \varphi \sin 2\omega t. \quad (4.4.25)$$

За моментната мощност на изводите на веригата се записва:

$$p = p_R + p_L + p_C = UI \cos \varphi (1 - \cos 2\omega t) + UI \sin \varphi \sin 2\omega t =$$

$$= UI \cos \varphi - UI \cos(2\omega t + \varphi). \quad (4.4.26)$$

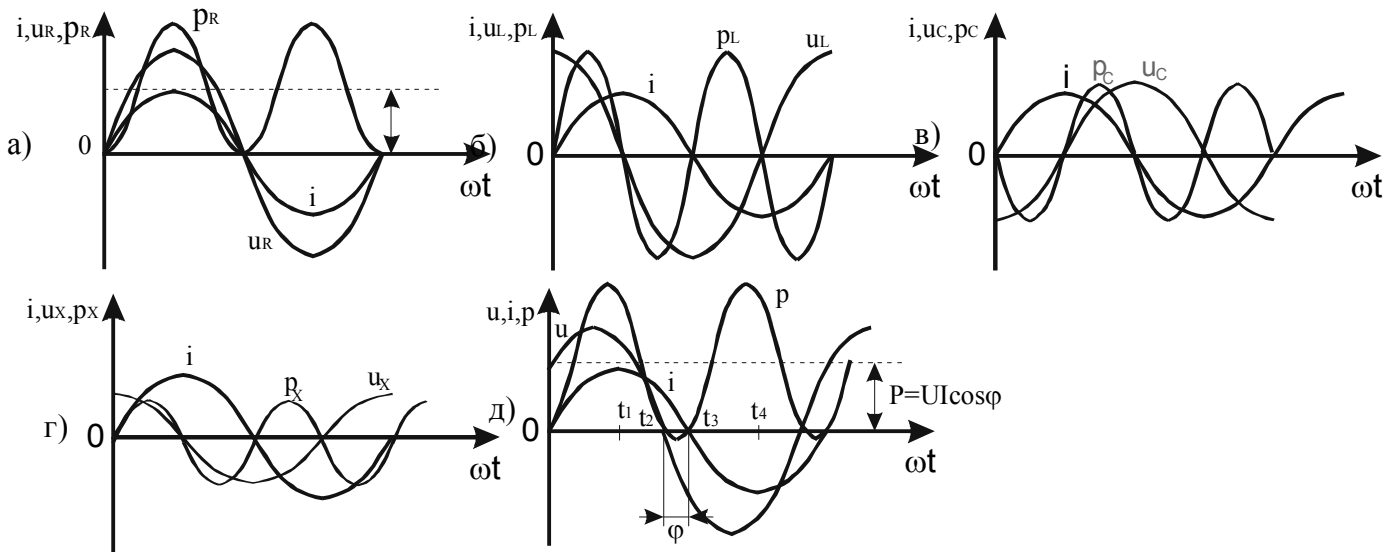
т.е. за мощността p се достига до същия израз, както израз (4.4.3).

От изрази (4.4.22) ... (4.4.26) могат да бъдат направени следните заключения:

1. Всички моментни мощности се изменят с удвоена честота.
2. Средните стойности на мощностите p_L , p_C и p_X за период T са равни на нула.

Амплитудата на мощността p_X е равна на абсолютната стойност на реактивната мощност $Q = UI \sin \varphi$.

3. Средните стойности на мощностите p_R и p за период T са равни помежду си и са равни на активната мощност $P = UI \cos \varphi$.



Фиг. 4.4.3.

Временните диаграми на тока i , напреженията u_R , u_L , u_C и u и мощностите p_R , p_L , p_C , p_X и p са представени на фиг. 4.4.3. Кривите се отнасят за случай, при който веригата има активно-индуктивен характер, т.е.: $\varphi > 0$.

От фиг. 4.4.3 могат да бъдат направени следните заключения:

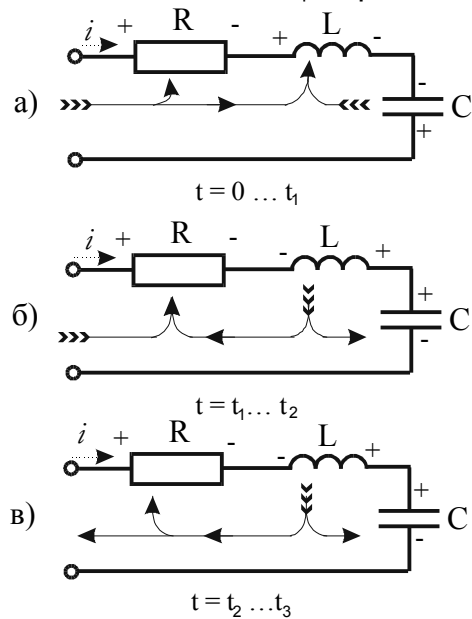
1. Моментната мощност p_R на резистора във всеки момент от време е положителна ($p_R \geq 0$) и се колебае с удвоена честота около средната си стойност $P = UI \cos \varphi$.

2. Двете моментни мощности p_L и p_C също се изменят с удвоена честота, но се колебаят около нулата. През първата четвърт на периода $p_L > 0$, а $p_C < 0$, което означава, че магнитното поле получава енергия, а електрическото поле отдава енергията си. През втората четвърт на периода p_L и p_C си сменят знаците. През тази четвърт на периода магнитното поле отдава запасената през първата четвърт на периода енергия, а електрическото поле получава енергия. Тъй като в случая $p_L > p_C$, то моментната мощност p_X има знака на p_L , т.е. през първата четвърт на периода $p_X > 0$, а през втората четвърт - $p_X < 0$.

3. През всяка четвърт на периода двете мощности p_L и p_C имат противоположни знаци, което означава, че енергията се колебае между двете полета – магнитно и електрическо. Така например, през първата четвърт на периода електрическото поле отдава енергията си на магнитното поле, а през втората четвърт на периода – то получава енергия от магнитното поле. Тъй като магнитното поле се нуждае от повече енергия, то дозапасяването му с енергия през първата четвърт на периода се извършва от източника. Ето защо през тази четвърт на периода мощността $p_X > 0$. Тъй като електрическото поле се нуждае от по-малко енергия, то през втората четвърт на периода то получава енергия от магнитното поле, като останалата част от енергията на магнитното поле се връща към източника. Ето защо през втората четвърт на периода мощността $p_X < 0$.

4. Между електрическото и магнитното поле се извършва непрекъснат обмен на енергия. В зависимост от това, енергията на кое поле е по-голяма, се осъществява и обмен на енергия между източника и съответното поле, в случая магнитното поле.

5. Моментната мощност p се колебае с удвоена честота около средната си стойност $P = UI \cos \varphi$. При това малка част от мощността p е отрицателна, като тази



Фиг. 4.4.4.

от електрическото поле на кондензаторния елемент, чието напрежение намалява по абсолютна стойност, поради което към индуктивния елемент постъпва допълнителна енергия и от източника. От източника постъпва енергия и към резистора.

Схемата от фиг. 4.4.4б съответства на интервала от време $t = t_1 \dots t_2$. През този интервал токът намалява и енергия се връща от магнитното поле на индуктивния елемент. Тази енергия частично постъпва в кондензаторния елемент, който при това се зарежда с обратна полярност, и частично се превръща в топлина в резистора. Тъй като токът има все още достатъчно голяма стойност и съответно мощността $p_R = Ri^2$ е значителна, то източникът, както в предишния интервал от време отдава енергия във веригата, която постъпва в резистора. В момента $t = t_2$ мощността $p_R = Ri^2$ е намаляла дотолкова, че скоростта на намаляване на енергията на индуктивния елемент осигурява скоростта на постъпване на енергията в кондензаторния елемент и в резистора. В този момент от време мощността на изводите на веригата е равна на нула, т.е.: $p = 0$.

Схемата от фиг. 4.4.4в съответства на интервала от време $t = t_2 \dots t_3$, през който токът продължава да намалява и при $t = t_3$ става равен на нула. През този интервал от време енергията продължава да се връща от индуктивния елемент, като постъпва в кондензаторния елемент, в резистора и в източника, поради което през интервала мощността $p < 0$.

Целият разгледан интервал $t = 0 \dots t_3$ съответства на полупериод на изменение на тока ($T/2$). През този интервал се осъществява един напълно завършен цикъл на колебанията на енергията във веригата, тъй като периодът на моментните мощности е два пъти по-малък от периода на тока. През следващия полупериод на изменение на тока енергийният процес се повтаря и само действителните посоки на тока и всички напрежения се сменят с противоположните.

4.5. Приложение на комплексното изобразяване на синусоидалните величини за анализ на установените синусоидални режими в последователна и паралелна R, L, C вериги. Комплексна мощност

1. Общи положения

част е по-малка от мощността p_x . Последното се свързва с обстоятелството, че част от енергията на магнитното поле, която се връща към източника, се преобразува в резистора R в топлина. Ето защо отрицателната част на мощността p е по-малка от мощността p_x .

На фиг. 4.4.4 за различни интервали от време с прекъснатата стрелка е показана действителната посока на тока, а със знаците плюс(+) и минус(-) – действителните посоки на напреженията на изводите на веригата и на отделните й елементи. На същата фигура стрелките с опашки показват посоката на потоците на енергия за съответния интервал от време.

Схемата от фиг. 4.4.4а съответствува на интервала от време $t = 0 \dots t_1$, през който токът нараства от нула до максималната си стойност. През този интервал постъпва енергия в магнитното поле на индуктивния елемент. Това се осъществява

При анализа на установените синусоидални режими в последователна и паралелна R, L, C вериги бе показано (вж. 4.2 и 4.3), че процесите напрежение-ток се описват с интегродиференциални уравнения, които се съставят по законите на Кирхоф. Тези уравнения за последователната, респективно за паралелната R, L, C вериги имат вида:

$$Ri + L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int_0^t i dt + u_C(0) = u; \quad (4.5.1)$$

$$Gu + C \frac{du}{dt} + \frac{1}{L} \int_0^t u dt + i_L(0) = i. \quad (4.5.2)$$

Както бе разгледано в 4.2 и 4.3, определянето на напреженията, респективно на токовете, се свежда до намирането на частното решение на нееднородното диференциално уравнение. Това в общия случай е равнозначно на сумиране на синусоидални напрежения или токове с неизвестни амплитуди и начални фази, а също така на производните и интегралите им, които след разлагане на синусни и косинусни съставки могат да бъдат приведени до удобен за пресмятане вид. Тази задача е свързана с много изчисления. Пресмятането може да се облекчи, ако се използва векторното изобразяване на синусоидалните величини. Това обаче намалява точността на решението.

Оказва се, че при анализа на установените синусоидални режими е твърде удобно използването на комплексното изобразяване на синусоидалните величини. На базата на такова изобразяване е разработен така нареченият комплексен или символичен метод за анализ на установените синусоидални режими. Същността на метода се състои в замяна на действителните функции на времето (ЕДН, токове и напрежения), производните и интегралните им с техните комплексни образи. По този начин алгебричните операции и операциите диференциране и интегриране върху оригиналите се заменят с алгебрични операции върху комплексните им образи, т.е. комплексният метод представлява фактически метод на алгебризиране на диференциалните уравнения.

При разглеждане на изобразяването на синусоидалните величини бе показано (вж.4.3.1), че синусоидалният ток може да бъде изобразен с комплексно число по следния начин:

$$i = I_m \sin(\omega t + \psi_i) \stackrel{.}{=} I_m e^{j(\omega t + \psi_i)} = \dot{I}_m e^{j\omega t}. \quad (4.5.3)$$

За комплексните образи на производната и интеграла на тока могат да бъдат получени следните формули:

$$\frac{di}{dt} = \omega I_m \sin(\omega t + \psi_i + \pi/2) \stackrel{.}{=} j\omega \dot{I}_m e^{j\omega t}; \quad (4.5.4)$$

$$\int i dt = \frac{I_m}{\omega} \sin(\omega t + \psi_i - \pi/2) \stackrel{.}{=} \frac{\dot{I}_m}{j\omega} e^{j\omega t}. \quad (4.5.5)$$

Тези формули показват, че комплексният образ на производната на оригинала се получава като комплексният образ на оригинала се умножи с $j\omega$; респективно комплексният образ на интеграла на оригинала се получава като комплексният образ на оригинала се раздели на $j\omega$.

За комплексния образ на n-тата производна на тока може да се запише:

$$\frac{d^n i}{dt^n} \stackrel{.}{=} (j\omega)^n \dot{I}_m e^{j\omega t}. \quad (4.5.6)$$

2. Анализ на установения синусоиден режим в последователна R, L, C

верига чрез комплексния метод

Към последователна R, L, C верига е подадено синусоидално напрежение $u = U_m \sin(\omega t + \psi_u)$, под действието на което във веригата се установява също синусоидален ток $i = I_m \sin(\omega t + \psi_i)$.

По втория закон на Кирхоф се записва уравнението:

$$u = u_R + u_L + u_C. \quad (4.5.7)$$

Намират се комплексните образи на тока и напреженията:

$$i = I_m \sin(\omega t + \psi_i) \equiv \dot{I}_m e^{j\omega t}; \quad (4.5.8)$$

$$u = U_m \sin(\omega t + \psi_u) \equiv \dot{U}_m e^{j\omega t}; \quad (4.5.9)$$

$$u_R = Ri = R I_m \sin(\omega t + \psi_i) \equiv R \dot{I}_m e^{j\omega t}; \quad (4.5.10)$$

$$u_L = L \frac{di}{dt} = \omega L I_m \sin(\omega t + \psi_i + \frac{\pi}{2}) \equiv j\omega L \dot{I}_m e^{j\omega t}; \quad (4.5.11)$$

$$u_C = \frac{1}{C} \int i dt + u_C(0) = -\frac{I_m}{\omega C} \sin(\omega t + \psi_i - \frac{\pi}{2}) + \frac{I_m}{\omega C} + u_C(0) \equiv \frac{\dot{I}_m}{j\omega C} e^{j\omega t}. \quad (4.5.12)$$

След заместване на комплексните образи в уравнение (4.5.7) се получава зависимостта:

$$(R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}) \dot{I}_m e^{j\omega t} = \dot{U}_m e^{j\omega t}. \quad (4.5.13)$$

След съкращаване на $e^{j\omega t}$ и $\sqrt{2}$, за връзката между комплексните ефективни стойности на тока $\dot{I}$ и напрежението $\dot{U}$ се записва:

$$(R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}) \dot{I} = \dot{U}. \quad (4.5.14)$$

Оттук за тока $\dot{I}$ се достига до изказа:

$$\dot{I} = \dot{U} / (R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}). \quad (4.5.15)$$

Израз (4.5.15) се нарича закон на Ом в комплексна форма. Величината $(R + j\omega L + 1/j\omega C)$ се означава със Z и носи названието комплексно съпротивление на веригата, т.е.:

$$Z = R + j\omega L + 1/j\omega C = R + j(\omega L - 1/\omega C) = R + j(X_L - X_C) = R + jX. \quad (4.5.16)$$

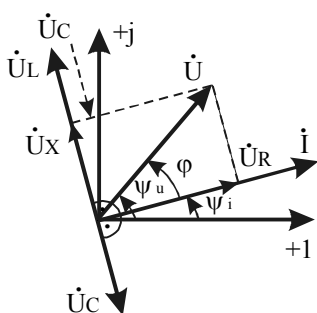
За комплексното съпротивление Z може още да се запише:

$$Z = \dot{U} / \dot{I} = U e^{j\psi_u} / I e^{j\psi_i} = \frac{U}{I} e^{j(\psi_u - \psi_i)} = z e^{j\varphi} = z \cos \varphi + jz \sin \varphi = R + jX. \quad (4.5.17)$$

Последният израз показва, че комплексното съпротивление Z от една страна има модул, равен на пълното съпротивление z и аргумент, равен на фазовата

разлика φ между приложеното напрежение и тока, а от друга страна – реална част, равна на активното съпротивление R на веригата и имагинерна част, равна на реактивното съпротивление X на веригата.

Тук следва да се отбележи, че реактивното съпротивление X е алгебрична величина. То може да бъде положително, отрицателно или нула. Индуктивното и капацитивното съпротивления са аритметични величини, тъй като те свързват ефективни или амплитудни стойности на напрежението и тока за съответния елемент, т.е.: $U_{mL} = \omega L I_m$



Фиг. 4.5.1.

и $U_L = \omega L I$; $U_{mC} = I_m / \omega C$ и $U_C = I / \omega C$.

На фиг. 4.5.1 е представено комплексното изобразяване на тока и напреженията за случая, когато фазовата разлика φ е положителна, т.е.: $\varphi > 0$. От фигурата може да се установи, че намирането на комплексните образи на производна и интеграл се свежда до завъртане на съответния комплексен вектор на ъгъл $+\pi/2$ при изобразяването на производната и на ъгъл $-\pi/2$ при изобразяването на интеграла.

3. Анализ на установения синусоиден режим в паралелна R, L, C верига чрез комплексния метод

Към паралелна R, L, C верига е подадено синусоидално напрежение $u = U_m \sin(\omega t + \psi_u)$. Под действието на това напрежение във веригата се установяват също синусоидални токове, за които по първия закон на Кирхоф се записва уравнението:

$$i_G + i_L + i_C = i. \quad (4.5.18)$$

За комплексните образи на напрежението и токовете се записва:

$$u = U_m \sin(\omega t + \psi_u) \equiv \dot{U}_m e^{j\omega t}; \quad (4.5.19)$$

$$i = I_m \sin(\omega t + \psi_i) \equiv \dot{I}_m e^{j\omega t}; \quad (4.5.20)$$

$$i_G = G u = G U_m \sin(\omega t + \psi_u) \equiv G \dot{U}_m e^{j\omega t}; \quad (4.5.21)$$

$$i_L = \frac{1}{L} \int_0^t u dt + i_L(0) = \frac{U_m}{\omega L} \sin(\omega t + \psi_u - \frac{\pi}{2}) + \frac{U_m}{\omega L} + i_L(0) \equiv \frac{\dot{U}_m}{j\omega L} e^{j\omega t}; \quad (4.5.22)$$

$$i_C = C \frac{du}{dt} = \omega C U_m \sin(\omega t + \psi_u + \frac{\pi}{2}) \equiv j\omega C \dot{U}_m e^{j\omega t}. \quad (4.5.23)$$

Заместват се комплексните образи в уравнение (4.5.18) и се получава зависимостта:

$$(G + 1/j\omega L + j\omega C) \dot{U}_m e^{j\omega t} = \dot{I}_m e^{j\omega t}. \quad (4.5.24)$$

Съкращава се на $e^{j\omega t}$ и $\sqrt{2}$ и за връзката между комплексните ефективни стойности на напрежението $\dot{U}$ и тока $\dot{I}$ се записва:

$$(G + 1/j\omega L + j\omega C) \dot{U} = \dot{I}. \quad (4.5.25).$$

Величината, с която е умножено напрежението $\dot{U}$, се нарича комплексна проводимост и се означава с Y, т.е.:

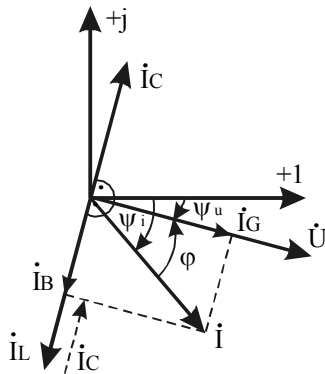
$$Y = G + 1/j\omega L + j\omega C = G - j(1/\omega L - \omega C) = G - j(B_L - B_C) = G - jB. \quad (4.5.26)$$

За комплексната проводимост Y може да се запише:

$$Y = \dot{I} / \dot{U} = I e^{j\psi_u} / U e^{j\psi_i} = \frac{I}{U} e^{-j(\psi_u - \psi_i)} = y e^{-j\varphi} = y \cos\varphi - jy \sin\varphi = G - jB. \quad (4.5.27)$$

От израз (4.5.27) може да се установи, че комплексната проводимост Y от една страна има модул, равен на пълната проводимост на веригата и аргумент, равен на фазовата разлика φ между приложеното напрежение и общия ток, а от друга – реална част, равна на активната проводимост на веригата и имагинерна част, равна на реактивната проводимост на веригата.

Тук, както и при последователната R, L, C верига, следва да се отбележи, че реактивната проводимост B е алгебрична величина, докато индуктивната и капацитивната проводимости са аритметични величини. И действително, индуктивната проводимост $B_L = 1/\omega L$ свързва амплитудните или ефективните стойности на индуктивния ток и напрежението, т.е.: $I_{mL} = U_m/\omega L$ и $I_L = U/\omega L$, а капацитивната проводимост $B_C = \omega C$ – амплитудните или ефективните стойности на



Фиг. 4.5.2.

капацитивния ток и напрежението, т.е.: $I_{mC} = \omega C U_m$ и $I_C = \omega C U$.

На фиг. 4.5.2 е представено комплексното изобразяване на напрежението и токовете за случая, когато фазовата разлика е положителна, т.е.: $\varphi > 0$.

4. Комплексна мощност

Както бе разгледано в 4.4, за изчисляване на активната и реактивна мощности е необходимо освен ефективните стойности на напрежението U и тока I да се знае и фазовата разлика φ между тях. Величината φ е равна на разликата между началните фази на напрежението и тока, т.е.: $\varphi = \psi_u - \psi_i$. При използване на комплексните

записи на напрежението и тока, за да се получи фазовата разлика φ е необходимо комплексната ефективна стойност на напрежението $\dot{U}$ да се умножи със спрегнатата комплексна ефективна стойност на тока $\dot{I}^*$. Така се дефинира величината $\dot{S}$, която носи названието комплексна мощност, т.е.:

$$\dot{S} = \dot{U} \dot{I}^* = U e^{j\psi_u} I e^{-j\psi_i} = UI e^{j(\psi_u - \psi_i)} = UI e^{j\varphi} = UI \cos\varphi + jUI \sin\varphi = P + jQ = S e^{j\varphi}. \quad (4.5.28)$$

Този запис на комплексната мощност е приет в повечето страни в света, включително и у нас. В някои страни, например в САЩ, е възприет следният запис на комплексната мощност:

$$\dot{S}' = \dot{U}^* \dot{I} = U e^{-j\psi_u} I e^{j\psi_i} = UI e^{-j(\psi_u - \psi_i)} = UI e^{-j\varphi} = UI \cos\varphi - jUI \sin\varphi = P - jQ. \quad (4.5.29)$$

Разликата се дължи на различните постановки, възприети по отношение на напрежението и тока. При първата постановка се смята, че ако напрежението изпреварва тока, то фазовата разлика $\varphi > 0$, а при втората постановка - $\varphi > 0$ ако токът изпреварва напрежението.

4. 6. Закони на Ом и Кирхоф в комплексен вид. Приложение. Еквивалентни параметри при последователно, паралелно и смесено съединение на комплексни съпротивления

1. Закони на Ом и Кирхоф в комплексен вид

Законите на Ом и Кирхоф в комплексен вид се записват по аналогичен начин, както при постоянни режими. Разликата е в това, че записът тук се отнася за комплексни токове, ЕДН, напрежения, съпротивления и проводимости.

а) закон на Ом

За пасивен участък законът на Ом в комплексен вид се записва по следния начин:

$$\dot{I} = \dot{U}/Z; \dot{I} = Y \dot{U}; \dot{U} = Z \dot{I} \text{ и } \dot{U} = \dot{I}/Y, \quad (4.6.1)$$

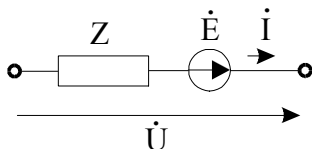
където $\dot{I}$ и $\dot{U}$ са комплексните ефективни стойности на тока и напрежението за участъка;

Z и Y – комплексното съпротивление и комплексната проводимост на участъка.

Записът на закона на Ом за активен участък (обобщен закон на Ом) в комплексен вид е следният:

$$\dot{U} + \dot{E} = Z \dot{I}, \quad (4.6.2)$$

където $\dot{U}$, $\dot{E}$ и $\dot{I}$ са комплексните ефективни стойности на напрежението, ЕДН и тока за участъка;
 Z – комплексното му съпротивление.



Фиг. 4.6.1.

Записът (4.6.2) на обобщения закон на Ом се отнася за еднаква посока на трите величини $\dot{U}$, $\dot{E}$ и $\dot{I}$ (фиг. 4.6.1)

б) първи закон на Кирхоф

Законът в комплексен вид се записва така:

$$\sum_{k=1}^n \dot{I}_k = 0, \quad (4.6.3)$$

където $\dot{I}_k$ е комплексната ефективна стойност на тока в к-тия клон, свързан към разглеждания възел.

в) втори закон на Кирхоф

Записът на този закон в комплексен вид е следният:

$$\sum_{k=1}^n \dot{E}_k = \sum_{k=1}^n \dot{U}_k = \sum_{k=1}^n Z_k \dot{I}_k, \quad (4.6.4)$$

където $\dot{E}_k$, $\dot{U}_k$ и $\dot{I}_k$ са комплексните ефективни стойности на ЕДН, напрежение и ток за к-тия клон, участващ в разглеждания контур;

Z_k - комплексното съпротивление на клона.

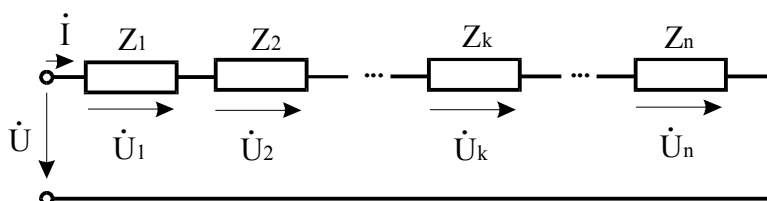
Забележки:

1. В по-нататъшното изложение, за краткост вместо понятието комплексна ефективна стойност на ток, ЕДН и напрежение ще се използва понятието комплекс.

2. Законите на Ом и Кирхоф в комплексен вид могат да бъдат записани и за комплексните амплитудни стойности. За целта комплексите на токовете, ЕДН и напреженията в уравнения (4.5.1) ... (4.5.4) се умножават с $\sqrt{2}$.

2. Приложение на законите на Ом и Кирхоф в комплексен вид при последователно, паралелно и смесено съединение на пасивни участъци. Еквивалентни параметри

а) последователно съединение на пасивни участъци



Фиг. 4.6.2.

Разглежда се верига, съставена от n последователно съединени пасивни участъка с комплексни съпротивления: $Z_1 = R_1 + jX_1$, $Z_2 = R_2 + jX_2$, ..., $Z_k = R_k + jX_k$, ..., $Z_n = R_n + jX_n$. (фиг. 4.6.2). За тази верига по втория закон на Кирхоф се

записва:

$$\dot{U} = \sum_{k=1}^n \dot{U}_k = \sum_{k=1}^n Z_k \dot{I}_k = \dot{I} \sum_{k=1}^n Z_k = \dot{I} Z. \quad (4.6.5)$$

В израз (4.6.5) със Z е означено комплексното съпротивление на веригата, което се определя така:

$$Z = \sum_{k=1}^n Z_k = \sum_{k=1}^n R_k + j \sum_{k=1}^n X_k = R + jX. \quad (4.6.6)$$

Последният израз показва, че за намирането на комплексното съпротивление Z на веригата трябва алгебрично да се сумират поотделно активните и реактивните съпротивления на участъците ѝ. Така се получават общото ѝ активно и общото ѝ реактивно съпротивления, т.е.:

$$R = \sum_{k=1}^n R_k \text{ и } X = \sum_{k=1}^n X_k. \quad (4.6.7)$$

За фазовата разлика φ между приложеното напрежение $\dot{U}$ и тока $\dot{I}$ се

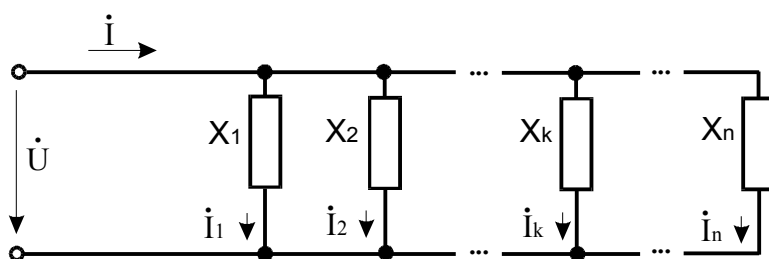
записва:

$$\varphi = \arctg(X/R) = \arctg\left(\sum_{k=1}^n X_k / \sum_{k=1}^n R_k\right). \quad (4.6.8)$$

За определяне на активната и реактивната мощност P и Q на веригата трябва алгебрично да се сумират активните, респективно, реактивните мощности на участъците ѝ, т.е.:

$$P = I^2 R = I^2 \sum_{k=1}^n R_k = \sum_{k=1}^n I^2 R_k = \sum_{k=1}^n P_k; \quad (4.6.9)$$

$$Q = I^2 X = I^2 \sum_{k=1}^n X_k = \sum_{k=1}^n I^2 X_k = \sum_{k=1}^n Q_k. \quad (4.6.10)$$



Фиг. 4.6.3.

б) паралелно съединение на пасивни участъци

Разглежда се верига, съставена от n паралелно съединени пасивни участъка с комплексни проводимости $Y_1 = G_1 - jB_1$, $Y_2 = G_2 - jB_2$, ..., $Y_k = G_k - jB_k$, ..., $Y_n = G_n - jB_n$. За тази верига по първия закон на Кирхоф се записва:

$$i = \sum_{k=1}^n i_k = \sum_{k=1}^n \dot{U} Y_k = \dot{U} \sum_{k=1}^n Y_k = \dot{U} Y. \quad (4.6.11)$$

В израз (4.6.11) с Y е означена комплексната проводимост на веригата. Проводимостта Y се определя по следния начин:

$$Y = \sum_{k=1}^n Y_k = \sum_{k=1}^n G_k - j \sum_{k=1}^n B_k = G - jB. \quad (4.6.12)$$

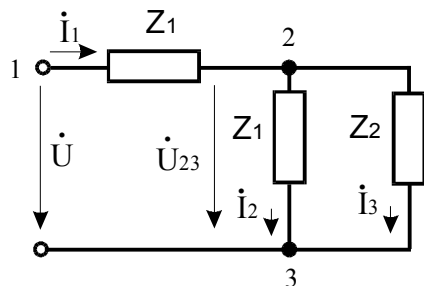
От израз (4.6.12) може да се установи, че за определяне на комплексната проводимост Y на веригата трябва алгебрично да се сумират поотделно активните и реактивните проводимости на участъците ѝ. Така се намират общата ѝ реактивна и общата ѝ активна проводимости, т.е.:

$$G = \sum_{k=1}^n G_k \text{ и } B = \sum_{k=1}^n B_k. \quad (4.6.13)$$

За фазовата разлика φ между приложеното напрежение $\dot{U}$ и общия ток $\dot{I}$ се записва:

$$\varphi = \arctg(B/G) = \arctg\left(\sum_{k=1}^n B_k / \sum_{k=1}^n G_k\right). \quad (4.6.14)$$

За определяне на активната и реактивната мощности P и Q на веригата трябва алгебрично да се сумират активните, респективно реактивните мощности на участъците ѝ, т.е.:



Фиг. 4.6.4.

$$P = U^2 G = U^2 \sum_{k=1}^n G_k = \sum_{k=1}^n U^2 G_k = \sum_{k=1}^n P_k;$$

$$Q = U^2 B = U^2 \sum_{k=1}^n B_k = \sum_{k=1}^n U^2 B_k = \sum_{k=1}^n Q_k.$$

в) смесено съединение на пасивни участъци

Получените по-горе резултати при последователно и паралелно съединение на пасивни

участъци могат да бъдат използвани при разглеждането на смесено съединение на такива участъци. За илюстрация на фиг. 4.6.4 е показана верига, съставена от три смесено съединени пасивни участъка като участъкът с комплексно съпротивление $Z_1 = R_1 + jX_1$ е съединен последователно с паралелно съединените участъци с комплексни съпротивления $Z_2 = R_2 + jX_2$ и $Z_3 = R_3 + jX_3$.

Към веригата е подадено напрежение $\dot{U}$, под действието на което в клоновете ѝ преминават токове $\dot{I}_1$, $\dot{I}_2$ и $\dot{I}_3$. За определяне на токовете може да бъде използван следния подход:

1. Намира се комплексното съпротивление Z на веригата като се започне от края ѝ към входа ѝ.

За целта за съпротивлението Z се записва:

$$Z = Z_1 + Z_{23}, \quad (4.6.17)$$

където $Z_{23} = Z_2 Z_3 / (Z_2 + Z_3)$ е общото комплексно съпротивление на двата паралелни участъка със съпротивления Z_2 и Z_3 .

За определянето на съпротивлението Z_{23} е целесъобразно да се намери общата комплексна проводимост Y_{23} на двата паралелно съединени участъка. И действително, величините Z_{23} и Y_{23} са реципрочни, т.е.:

$$Z_{23} = 1 / Y_{23}. \quad (4.6.18)$$

За проводимостта Y_{23} се записва:

$$Y_{23} = Y_2 + Y_3, \quad (4.6.19)$$

където Y_2 и Y_3 са комплексните проводимости на двата паралелно съединени участъка.

Проводимостите Y_2 и Y_3 се определят като реципрочни величини на съответните комплексни съпротивления Z_2 и Z_3 , т.е.:

$$Y_2 = \frac{1}{Z_2} = \frac{1}{R_2 + jX_2} = \frac{R_2}{R_2^2 + X_2^2} - j \frac{X_2}{R_2^2 + X_2^2} = G_2 - jB_2; \quad (4.6.20)$$

$$Y_3 = \frac{1}{Z_3} = \frac{1}{R_3 + jX_3} = \frac{R_3}{R_3^2 + X_3^2} - j \frac{X_3}{R_3^2 + X_3^2} = G_3 - jB_3. \quad (4.6.21)$$

Съгласно изрази (4.6.19) ... (4.6.21) за комплексната проводимост Y_{23} се получава:

$$Y_{23} = G_2 + G_3 - j(B_2 + B_3) = G_{23} - jB_{23}. \quad (4.6.22)$$

Въз основа на изрази (4.6.19) и (4.6.23) за комплексното съпротивление Z_{23} се записва:

$$Z_{23} = \frac{1}{G_{23} - jB_{23}} = \frac{G_{23}}{G_{23}^2 + B_{23}^2} + j \frac{B_{23}}{G_{23}^2 + B_{23}^2} = R_{23} + jX_{23}. \quad (4.6.23)$$

Като се използват изрази (4.6.17) и (4.6.23) за комплексното съпротивление Z на веригата се достига до израза:

$$Z = R_1 + R_{23} + j(X_1 + X_{23}) = R + jX. \quad (4.6.24)$$

2. Определя се общият ток $\dot{I}_1$.

За целта се използва формулата:

$$\dot{I}_1 = \dot{U} / Z. \quad (4.6.25)$$

3. Намират се токовете $\dot{I}_2$ и $\dot{I}_3$, като се използват зависимостта при последователно и паралелно съединение на пасивни участъци.

За целта отначало се определя напрежението $\dot{U}_1$ върху комплексното съпротивление Z_1 :

$$\dot{U}_1 = Z_1 \dot{I}_1. \quad (4.6.26)$$

По-нататък се намира напрежението $\dot{U}_{23}$:

$$\dot{U}_{23} = \dot{U} - \dot{U}_1, \quad (4.6.27)$$

откъдето за токовете $\dot{I}_2$ и $\dot{I}_3$ се записва:

$$\dot{I}_2 = \frac{\dot{U}_{23}}{Z_2} = Y_2 \dot{U}_{23} \text{ и } \dot{I}_3 = \frac{\dot{U}_{23}}{Z_3} = Y_3 \dot{U}_{23}. \quad (4.6.28)$$

При известен ток $\dot{I}_1$, токовете $\dot{I}_2$ и $\dot{I}_3$ могат да бъдат определени като токове в два паралелно съединени пасивни участъка (вж. раздел III), т.е.:

$$\dot{I}_2 = \dot{I}_1 \frac{Z_3}{Z_2 + Z_3} \text{ и } \dot{I}_3 = \dot{I}_1 \frac{Z_2}{Z_2 + Z_3}. \quad (4.6.29)$$

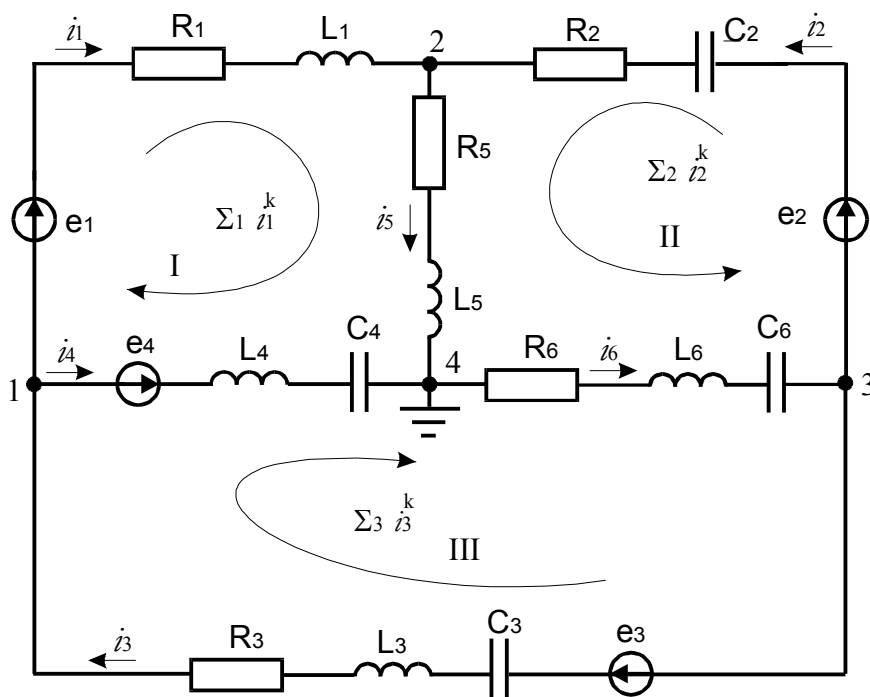
За фазовата разлика φ между приложеното напрежение $\dot{U}$ и общия ток $\dot{I}$ се записва:

$$\varphi = \arctg(X/R). \quad (4.6.30)$$

Активната и реактивна мощности на веригата P и Q се определят чрез зависимостите:

$$P = R_1 I_1^2 + G_{23} U_{23}^2 = R_1 I_1^2 + (G_2 + G_3) U_{23}^2 = \sum_{k=1}^3 P_k; \quad (4.6.31)$$

$$Q = X_1 I_1^2 + B_{23} U_{23}^2 = X_1 I_1^2 + (B_2 + B_3) U_{23}^2 = \sum_{k=1}^3 Q_k.$$



Фиг. 4.7.1.

4.7. Методи за анализ на сложни електрически вериги в комплексен вид. Матричен запис. Баланс на мощностите

1. Приложение на комплексния метод за анализ на сложни вериги

Методите за анализ на сложни електрически вериги, както и основните принципи и теореми за електрическите вериги са разгледани в раздел III при постоянни режими. Тези методи, принципи и теореми са валидни и при синусоидални

режими. При това е удобно уравненията да се записват не по отношение на действителните токове ЕДН и напрежения, а по отношение на техните комплексни образи. Така диференциалните уравнения за оригиналите се заменят с алгебрични уравнения за комплексните токове, ЕДН и напрежения. Начинът на съставяне на уравненията, независимо по кой метод, е аналогичен, както при постоянни режими. Разликата е в това, че всички ЕДН, токове, напрежения, съпротивления и проводимости се записват в комплексен вид.

За илюстрация за веригата, чиято схема е показана на фиг.4.7.1, ще бъдат съставени системите уравнения по законите на Кирхоф и по методите с контурни токове и възлови потенциали.

Приема се, че ЕДН $e_1 \dots e_4$ са синусоидални величини с една и съща ъглова честота ω , т.е.:

$$e_1 = E_{m1} \sin(\omega t + \psi_{e1}); e_2 = E_{m2} \sin(\omega t + \psi_{e2});$$

$$e_3 = E_{m3} \sin(\omega t + \psi_{e3}); e_4 = E_{m4} \sin(\omega t + \psi_{e4}).$$

В такъв случай, комплексният им запис е следният:

$$e_1 \equiv \sqrt{2} \dot{E}_1 e^{j\omega t}; e_2 \equiv \sqrt{2} \dot{E}_2 e^{j\omega t};$$

$$e_3 \equiv \sqrt{2} \dot{E}_3 e^{j\omega t}; e_4 \equiv \sqrt{2} \dot{E}_4 e^{j\omega t}.$$

Комплексните съпротивления на отделните клонове на веригата са :

$$Z_1 = R_1 + j\omega L; Z_2 = R_2 + 1/j\omega C_2; Z_3 = R_3 + j\omega L_3 + 1/j\omega C_3; Z_4 = j\omega L_4 + 1/j\omega C_4;$$

$$Z_5 = R_5 + j\omega L_5; Z_6 = R_6 + j\omega L_6 + 1/j\omega C_6.$$

По законите на Кирхоф се съставя следната система уравнения:

По първия закон на Кирхоф:

$$\text{за възел 1} \quad \dot{I}_1 - \dot{I}_3 + \dot{I}_4 = 0;$$

$$\text{за възел 2} \quad -\dot{I}_1 - \dot{I}_2 + \dot{I}_5 = 0;$$

$$\text{за възел 3} \quad \dot{I}_2 + \dot{I}_3 - \dot{I}_6 = 0;$$

По втория закон на Кирхоф:

$$\text{за контур I} \quad Z_1 \dot{I}_1 + Z_5 \dot{I}_5 - Z_4 \dot{I}_4 = \dot{E}_1 - \dot{E}_4;$$

$$\text{за контур II} \quad Z_2 \dot{I}_2 + Z_5 \dot{I}_5 + Z_6 \dot{I}_6 = \dot{E}_2;$$

$$\text{за контур III} \quad Z_4 \dot{I}_4 + Z_6 \dot{I}_6 + Z_3 \dot{I}_3 = \dot{E}_3 + \dot{E}_4.$$

Системата уравнения, съставена по метода с контурни токове, изглежда по следния начин:

$$\begin{cases} Z_{11} \dot{I}_1^k + Z_{12} \dot{I}_2^k + Z_{13} \dot{I}_3^k = \dot{E}_{11}; \\ Z_{21} \dot{I}_1^k + Z_{22} \dot{I}_2^k + Z_{23} \dot{I}_3^k = \dot{E}_{22}; \\ Z_{31} \dot{I}_1^k + Z_{32} \dot{I}_2^k + Z_{33} \dot{I}_3^k = \dot{E}_{33}, \end{cases}$$

където за собствените Z_{kk} и общите Z_{kl} контурни съпротивления и за контурните

ЕДН $\dot{E}_{kk}$ се записва:

$$Z_{11} = Z_1 + Z_4 + Z_5; Z_{22} = Z_2 + Z_5 + Z_6; Z_{33} = Z_3 + Z_4 + Z_6;$$

$$Z_{12} = Z_{21} = Z_5; Z_{13} = Z_{31} = -Z_4; Z_{23} = Z_{32} = Z_6.$$

$$\dot{E}_{11} = \dot{E}_1 - \dot{E}_4; \dot{E}_{22} = \dot{E}_2; \dot{E}_{33} = \dot{E}_3 - \dot{E}_4.$$

По метода с възлови потенциали системата уравнения е следната:

$$\begin{cases} \dot{\varphi}_1 Y_{11} - \dot{\varphi}_2 Y_{12} - \dot{\varphi}_3 Y_{13} = \sum_1 \dot{E} Y; \\ -\dot{\varphi}_1 Y_{21} + \dot{\varphi}_2 Y_{22} - \dot{\varphi}_3 Y_{23} = \sum_2 \dot{E} Y; \\ -\dot{\varphi}_1 Y_{31} - \dot{\varphi}_2 Y_{32} + \dot{\varphi}_3 Y_{33} = \sum_3 \dot{E} Y, \end{cases}$$

където величините Y_{kk} , Y_{kl} и $\sum_k \dot{E}Y$ се определят от изразите:

$$Y_{11} = Y_1 + Y_3 + Y_4; Y_{22} = Y_1 + Y_2 + Y_5; Y_{33} = Y_2 + Y_3 + Y_6; Y_{12} = Y_{21} = Y_1; Y_{13} = Y_{31} = Y_3; Y_{23} = Y_{32} = Y_2;$$

$$\sum_1 \dot{E}Y = -\dot{E}_1 Y_1 + \dot{E}_3 Y_3 - \dot{E}_4 Y_4; \sum_2 \dot{E}Y = \dot{E}_1 Y_1 + \dot{E}_2 Y_2 \text{ и } \sum_3 \dot{E}Y = -\dot{E}_2 Y_2 - \dot{E}_3 Y_3.$$

В последните изрази величините $Y_1 \dots Y_6$ са комплексните проводимости на отделните клонове на веригата. Те са реципрочни величини на комплексните съпротивления на клоновете y , т.е.: $Y_1 = 1/Z_1 \dots Y_6 = 1/Z_6$.

2. Матричен запис на системите уравнения, съставени по методите с контурни токове и с възлови потенциали.

При анализа на сложни електрически вериги е удобно системите уравнения да бъдат записани в матрична форма. Това дава по-голяма прегледност на записа, улеснява операциите с уравненията и позволява решаването им с компютърна техника.

За сложна верига с n независими контура и несъдържаща източници на ток, системата уравнения, съставена по метода с контурни токове, изглежда по следния начин:

$$\begin{aligned} Z_{11} \dot{I}_1 + Z_{12} \dot{I}_2 + \dots + Z_{1k} \dot{I}_k + \dots + Z_{1n} \dot{I}_n &= \dot{E}_{11}; \\ Z_{21} \dot{I}_1 + Z_{22} \dot{I}_2 + \dots + Z_{2k} \dot{I}_k + \dots + Z_{2n} \dot{I}_n &= \dot{E}_{22}; \\ \dots &\dots \\ Z_{k1} \dot{I}_1 + Z_{k2} \dot{I}_2 + \dots + Z_{kk} \dot{I}_k + \dots + Z_{kn} \dot{I}_n &= \dot{E}_{kk}; \\ \dots &\dots \\ Z_{n1} \dot{I}_1 + Z_{n2} \dot{I}_2 + \dots + Z_{nk} \dot{I}_k + \dots + Z_{nn} \dot{I}_n &= \dot{E}_{nn}. \end{aligned} \quad (4.7.1)$$

Система (4.7.1) в матрична форма се представя по следния начин:

$$\underline{Z} \dot{\underline{I}} = \underline{\dot{E}}, \quad (4.7.2)$$

където $\underline{Z}$ е матрицата на контурните съпротивления;

$\dot{\underline{I}}$ матрицата на контурните токове;

$\underline{\dot{E}}$ матрицата на контурните ЕДН.

Матриците $\underline{Z}$, $\dot{\underline{I}}$ и $\underline{\dot{E}}$ се записват така:

$$\underline{Z} = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} & \dots & Z_{1k} & \dots & Z_{1n} \\ Z_{21} & Z_{22} & \dots & Z_{2k} & \dots & Z_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ Z_{k1} & Z_{k2} & \dots & Z_{kk} & \dots & Z_{kn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ Z_{n1} & Z_{n2} & \dots & Z_{nk} & \dots & Z_{nn} \end{bmatrix}; \dot{\underline{I}} = \begin{bmatrix} \dot{I}_1 \\ \dot{I}_2 \\ \dots \\ \dot{I}_k \\ \dots \\ \dot{I}_n \end{bmatrix}; \underline{\dot{E}} = \begin{bmatrix} \dot{E}_{11} \\ \dot{E}_{22} \\ \dots \\ \dot{E}_{kk} \\ \dots \\ \dot{E}_{nn} \end{bmatrix}. \quad (4.7.2)$$

За решаване на матричното уравнение (4.7.2) се определя обратната матрица

$$\underline{Y} = \begin{bmatrix} Y_{11} & -Y_{12} & \dots & -Y_{1k} & \dots & -Y_{1n} \\ -Y_{21} & Y_{22} & \dots & -Y_{2k} & \dots & -Y_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -Y_{k1} & -Y_{k2} & \dots & Y_{kk} & \dots & -Y_{kn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -Y_{n1} & -Y_{n2} & \dots & -Y_{nk} & \dots & Y_{nn} \end{bmatrix}; \quad \underline{\dot{\varphi}} = \begin{bmatrix} \dot{\varphi}_1 \\ \dot{\varphi}_2 \\ \dots \\ \dot{\varphi}_k \\ \dots \\ \dot{\varphi}_n \end{bmatrix}; \quad \underline{\dot{J}} = \begin{bmatrix} \dot{J}_1 \\ \dot{J}_2 \\ \dots \\ \dot{J}_k \\ \dots \\ \dot{J}_n \end{bmatrix}. \quad (4.7.10)$$

При записа на матрицата $\underline{\dot{J}}$ трябва да се има предвид, че елементите $\dot{J}_k$ са:

$$\dot{J}_k = \sum_k \dot{E} Y + \sum_k \dot{J}, \quad k = 1 \dots n.$$

3. Баланс на мощностите. Теорема на Ланжвен и Теледжен.

От закона за съхранение на енергията следва, че за всяка електрическа верига е в сила балансът, както на моментните, така и на активните мощности. Сумата на всички отдадени (моментни и активни) мощности е равна на сумата на всички консумирани (съответно моментни или активни) мощности.

Балансът на активните мощности се дава с равенството:

$$\sum P_{\text{отд}} = \sum P_{\text{конс}}. \quad (4.7.11)$$

Може да се докаже, че балансът на мощностите е в сила и за комплексните, а следователно и за реактивните мощности, т.е.:

$$\sum \dot{S}_{\text{отд}} = \sum \dot{S}_{\text{конс}}; \quad (4.7.12)$$

$$\sum Q_{\text{отд}} = \sum Q_{\text{конс}}. \quad (4.7.13)$$

Равенство (4.7.12), изразяващо балансът на комплексните мощности, носи названието теорема на Ланжвен. То може да бъде записано в следния разгънат вид:

$$\sum_{r=1}^{n_E} \dot{E}_r I_r^* + \sum_{\ell=1}^{n_J} \dot{E}_\ell J_\ell^* = \sum_{m=1}^n Z_m I_m^2, \quad (4.7.14)$$

където n_E е броят на източниците на ЕДН;

n_J – броят на източниците на ток;

n – броят на клоновете на веригата.

Теоремата на Ланжвен може да бъде разглеждана като частен случай на теоремата на Теледжен, която е в сила за всякакви електрически вериги със съсредоточени параметри – линейни или нелинейни, пасивни или активни, с постоянни или променливи параметри. Единствените ограничения към веригите са системите им напрежения и токове да удовлетворяват законите на Кирхоф, без обезателно тези величини да си съответствуват. Последното означава, че напреженията и токовете в клоновете могат да бъдат взаимно обусловени. Такива напрежения u_s и токове i_s се наричат виртуални, а произведението: $p_s = u_s i_s$ – квазимощност.

Теоремата на Теледжен се изразява със следното равенство:

$$\sum u_s i_s = 0, \quad (4.7.15)$$

т.е. алгебричната сума от квазимощностите в една електрическа верига е равна на нула.

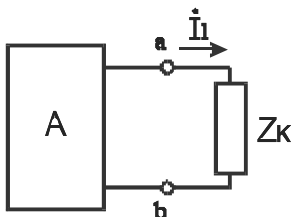
В случай, че част от клоновете, на брой $n_{\text{вх}}$, са приети за входове, а останалите клонове $n_{\text{в}}$ са вътрешни, от теоремата на Теледжен се записва равенството:

$$\sum_{k=1}^{n_{BX}} u_k i_k = \sum_{s=1}^{n_B} u_s i_s \quad (4.7.16)$$

Ако участвуват действителните напрежения и токове, то произведението $u_s i_s$ представлява моментната мощност p_s в клонa с номер s , а зависимостта (4.7.16) отразява закона за съхранение на енергията и представлява баланса на моментните мощности, т.е. алгебричната сума от постъпващите в една електрическа верига моментни мощности е равна на алгебричната сума от изразходваните във вътрешните ѝ клонове моментни мощности.

4.8. Предаване на максимална активна мощност на консуматор

Разглеждането се прави при следната постановка: Към активен двуполусник е включен консуматор Z_k с параметри R_k и X_k (фиг. 4.8.1).



Фиг. 4.8.1.

Търсят се условията, при които активната мощност P_k на консуматора ще бъде максимална. За целта активният двуполусник се заменя, съгласно теоремата на Тевенен, с генератор на ЕДН с параметри: $\dot{E} = \dot{U}_{ab0}$ и $Z = Z_{abBX} = R + jX$.

За активната мощност P_k на консуматора се записва изразът:

$$P_k = R_k I^2 = R_k E^2 / [(R_k + R)^2 + (X_k + X)^2].$$

Последният израз се изследва за

максимум. Тук са възможни следните четири случая:

I случай – съпротивлението Z на еквивалентния генератор е равно на нула, т.е.: $Z = 0$.

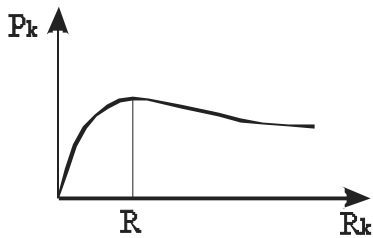
В такъв случай от израз (4.8.1) за мощността P_k се записва:

$$P_k = R_k E^2 / (R_k^2 + X_k^2). \quad (4.8.2)$$

Като се използват зависимостите: $R_k^2 + X_k^2 = z_k^2 = R_k^2 / \cos^2 \varphi_k$, израз (4.8.2) добива вида:

$$P_k = E^2 \cos^2 \varphi_k / R_k. \quad (4.8.3)$$

От последния израз може да се установи, че при спазване на условието: $Z = 0$ и при дадено активно съпротивление R_k на консуматора предаваната активна мощност P_k ще нараства пропорционално на квадрата на фактора на мощността. В енергетиката стремежът е реализирането на този случай.



Фиг. 4.8.3.

II случай – при зададено комплексно съпротивление Z на еквивалентния генератор се изменя реактивното съпротивление X_k на консуматора, т.е.: $X_k = \text{var}$.

От израз (4.8.1) може да се установи, че за разглеждания случай мощността P_k получава максимум при напрежителен резонанс, т.е.: $Y_k + Y = 0$ и този максимум е:

$$P_{k\max} = R_k E^2 / (R_k + R)^2. \quad (4.8.4)$$

III случай – веригата е резисторна ($X_k = 0$ и $X = 0$) като съпротивлението R е зададено, а съпротивлението R_k се изменя, т.е.: $R_k = \text{var}$.

В този случай мощността P_k се определя от израз (4.8.4). Търси се стойността на съпротивлението R_k , при която мощността P_k е максимална. За целта се намира производната $\partial P_k / \partial R_k = E^2 (R - R_k) / (R_k + R)^3$. Тя се анулира при $R = R_k$, при което за максималната стойност на мощността се получава:

$$P_{k\max} = E^2 / 4R. \quad (4.8.5)$$

Зависимостта $P_K = P_K(R_K)$ е изобразена на фиг. 4.8.3.

От израза за к.п.д. $\eta = P_K / (P_K + P)$ (където $P = RI^2$ е активната мощност в съпротивлението на еквивалентния генератор) може да се установи, че при условието: $R = R_K$, $\eta = 0,5$. Това означава, че разглежданият режим на предаване на максимална мощност на консуматор е свързан със значителни енергийни загуби. Ето защо този режим трябва да се осъществява, когато енергийните показатели нямат голямо значение.

IV случай – факторът на мощността е постоянен, т.е.: $\cos\varphi_K = \text{const}$, а се изменя пълното съпротивление z_K на консуматора, т.е.: $z_K = \text{var}$.

За определяне на условието за получаване на максимална мощност P_K във формула (4.8.1) се правят полаганията: $R_K = z_K \cos\varphi_K$; $X_K = z_K \sin\varphi_K$; $R = z \cos\varphi$ и $X = z \sin\varphi$ и се достига до израза:

$$P_K = z_K \cos\varphi_K / [(z_K \cos\varphi_K + z \cos\varphi)^2 + (z_K \sin\varphi_K + z \sin\varphi)^2].$$

Като се има предвид формулата: $\cos\varphi_K \cos\varphi + \sin\varphi_K \sin\varphi = \cos(\varphi_K - \varphi)$, за мощността P_K се получава:

$$P_K = E^2 z_K \cos\varphi_K / [z_K^2 + z^2 + 2z_K z \cos(\varphi_K - \varphi)].$$

Намира се производната на мощността P_K спрямо пълното съпротивление z_K :

$$\frac{\partial P_K}{\partial z_K} = E^2 \cos\varphi_K \frac{z^2 - z_K^2}{[z_K^2 + z^2 + 2z_K z \cos(\varphi_K - \varphi)]^2}.$$

Тя се анулира при: $z_K = z$. При това условие мощността P_K получава максимална стойност, която е:

$$P_{K_{\max}} = E^2 \cos\varphi_K / [2z[1 + \cos(\varphi_K - \varphi)]], \quad (4.8.6)$$

а за к.п.д. $\eta = P_K / (P + P_K) = R_K / (R + R_K)$ се записва:

$$\eta = \cos\varphi_K / (\cos\varphi_K + \cos\varphi). \quad (4.8.7)$$

В последния израз участва факторът на мощността $\cos\varphi$ на еквивалентното съпротивление Z на активния двуполусник. Може да се установи, че ако енергийните загуби $P = RI^2$ са малки, то к.п.д. η нараства.

V. РЕЗОНАНСНИ ЯВЛЕНИЯ

Встъпителни бележки

В раздела се дават условията за възникване на резонанс и се привеждат основните честотни характеристики за последователна R, L, C и паралелна G, L, C вериги. Разглеждат се също условията за резонанс в сложни вериги. В раздела се отделя внимание и на резонанса при всички честоти.

5.1. Резонанс на напреженията

При анализа на установения синусоиден режим в последователна R, L, C верига (фиг. 5.1.1) бе установен частен случай (вж. раздел IV), при който реактивните съпротивления X_L и X_C , съответно реактивните напрежения U_L и U_C се компенсират взаимно. При този случай, независимо от наличието на индуктивен и капацитивен елементи във веригата, фазовата разлика φ между напрежението u и тока i на входа ѝ се анулира и съпротивлението ѝ става активно. Това явление се нарича резонанс на напреженията. Ако активното съпротивление $R = 0$, се говори за резонанс на напреженията във верига без загуби. Условието за резонанс на напреженията е следното:

$$\text{Фиг. 5.1.1.} \quad X = 0; U_X = 0 \text{ и } \varphi = 0. \quad (5.1.1)$$

Като се има предвид, че за разглежданата верига:

$$X = \omega L - 1/\omega C = 0 \text{ и } \varphi = \arctg \frac{\omega L - 1/\omega C}{R} = 0, \text{ то условието за резонанс добива вида:}$$

$$\omega^2 LC - 1 = 0. \quad (5.1.2)$$

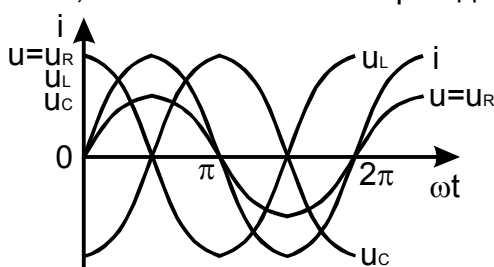
При резонанс комплексното съпротивление Z на веригата е най-малко и се превръща в реално число, равно на активното ѝ съпротивление R , т.е.:

$$Z = z = R. \quad (5.1.3)$$

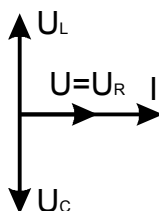
По отношение на тока I , то при резонанс той е най-голям и се определя от израза:

$$I = U/R. \quad (5.1.4)$$

Графиките на тока i и на напреженията $u = u_R, u_L$ и u_C са показани на фиг. 5.1.2, а съответната векторна диаграма – на фиг. 5.1.3.



Фиг. 5.1.2.



Фиг. 5.1.3.

В случай, че реактивните съпротивления $X_L = \omega L$ и $X_C = 1/\omega C$ са значително по-големи от активното съпротивление R , т.е.: $X_L = X_C \gg R$, то реактивните напрежения U_L и U_C при резонанс ще превишават, даже понякога многократно, напрежението U на входа на веригата. Това означава, че върху реактивните

елементи ще възникнат пренапрежения. Ето защо резонансът в последователна R, L, C верига носи названието резонанс на напреженията.

От равенство (5.1.2) може да се установи, че резонансът може да бъде реализиран или чрез промяна на честотата ω на приложеното напрежение, или чрез промяна на индуктивността L на бобина, или чрез промяна на капацитета C на кондензатора. Във връзка с това се дефинират:

1. Резонансна ъглова честота ω_0 :

$$\omega_0 = 1/\sqrt{LC}. \quad (5.1.5)$$

Като се има предвид, че $\omega_0 = 2\pi f_0$, за резонансната честота f_0 се записва:

$$f_0 = 1/2\pi\sqrt{LC}. \quad (5.1.6)$$

Реципрочната стойност на честотата f_0 определя резонансния период T_0 :

$$T_0 = 1/f_0 = 2\pi\sqrt{LC}. \quad (5.1.7)$$

2. Резонансна индуктивност L_0 :

$$L_0 = 1/\omega^2 C. \quad (5.1.8)$$

3. Резонансен капацитет C_0 :

$$C_0 = 1/\omega^2 L. \quad (5.1.9)$$

При резонанс на напреженията се дефинират още величините:

1. Резонансно, вълново или още характеристично съпротивление ρ :

$$\rho = \omega_0 L = 1/\omega_0 C = \sqrt{L/C}. \quad (5.1.10)$$

2. Качественото число Q :

$$Q = \rho/R = \omega_0 L/R = 1/\omega_0 CR. \quad (5.1.11)$$

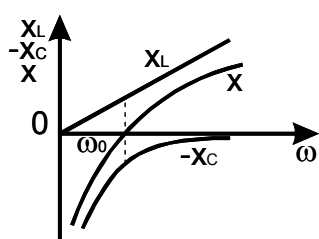
Качественото число Q може да се изрази още и по следния начин:

$$Q = \frac{\omega_0 LI}{RI} = \frac{\frac{1}{\omega_0 C} I}{RI} = \frac{U_{L_0}}{U} = \frac{U_{C_0}}{U}. \quad (5.1.12)$$

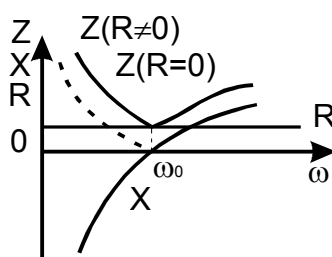
3. Затихване d :

$$d = 1/Q = R/\rho = R\sqrt{C/L}. \quad (5.1.13)$$

Честотните характеристики на реактивните съпротивления $X_L = \omega L$, $-X_C = -1/\omega C$ и $X = X_L - X_C$ са представени на фиг. 5.1.4. За удобство във връзка с определянето на честотната характеристика на реактивното съпротивление X на фигурата е дадена честотната характеристика не на X_C , а на $-X_C$.



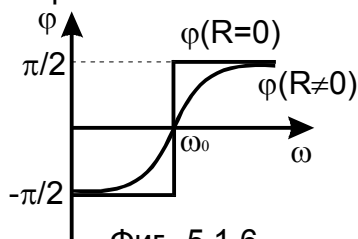
Фиг. 5.1.4.



Фиг. 5.1.5.

На фиг. 5.1.5 са показани честотните характеристики на активното съпротивление R (то не зависи от честотата ω и се представя с права, успоредна на абсцисната ос), на реактивното съпротивление X и на пълното съпротивление z . За определяне на честотната характеристика $z = z(\omega)$ се изхожда от

израза: $z = \sqrt{R^2 + X^2}$. В случай, че активното съпротивление $R = 0$, за диапазона $\omega = 0 \dots \omega_0$ кривата $z = z(\omega)$ представлява огледален образ на кривата $X = X(\omega)$ спрямо абсцисната ос, а за диапазона $\omega = 0 \dots \infty$ двете криви съвпадат. В случай, че съпротивлението $R \neq 0$, то зависимостта $z = z(\omega)$ се изменя по крива, близка на предната крива, но повдигната по ординатата, което се определя от стойността на съпротивлението R .



Фиг. 5.1.6.

За определяне на честотната характеристика на фазовата разлика φ се изхожда от формулата:

$$\varphi = \text{arctg} \frac{\omega L - 1/\omega C}{R}. \quad \text{Видът на зависимостта } \varphi = \varphi(\omega) \text{ е}$$

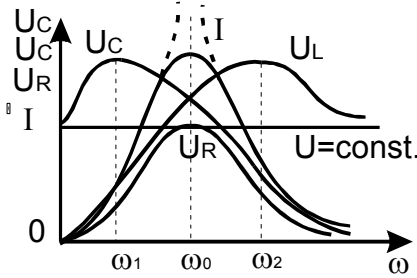
показана на фиг. 5.1.6. В случай, че активното съпротивление $R \neq 0$, фазовата разлика φ при $\omega = \omega_0$ се изменя със скок от $-\pi/2$ до $\pi/2$.

За определяне на честотните характеристики на тока I и напреженията U_L , U_C , U_R и U се изхожда от изразите:

$$I = U / \sqrt{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2}; \quad U_L = \omega LI; \quad U_C = I/\omega C;$$

$$U_R = RI \text{ и } U = I\sqrt{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2}. \quad (5.1.14)$$

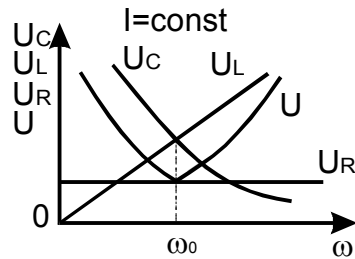
Кривите $I = I(\omega)$; $U_L = U_L(\omega)$; $U_C = U_C(\omega)$ и $U_R = U_R(\omega)$ при поддържане на постоянна ефективна стойност на приложеното напрежение U , т.е. при $U = \text{const}$, са показани на фиг. 5.1.7. От фигурата може да се види, че при резонанс токът I има най-голяма стойност и в случай, че $R \rightarrow 0$, то $I \rightarrow \infty$. Кривата на напрежението $U_R = U_R(\omega)$ се изменя по аналогичен начин, като при резонанс $U_R = U$.



Фиг. 5.1.7.

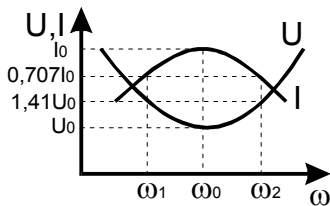
По отношение на кривите на двете реактивни напрежения U_L и U_C може да се отбележи, че напрежението U_L достига максимална стойност при честота $\omega_2 > \omega_0$, а напрежението U_C получава максималната си стойност при честота $\omega_1 < \omega_0$. Това може да се обясни с хода на кривите $I = I(\omega)$; $X_L = X_L(\omega)$ и $X_C = X_C(\omega)$. При честота $\omega = 0$ напрежението $U_L = 0$, а напрежението $U_C = U$. При нарастване на честотата ω съпротивлението $X_L = \omega L$ непрекъснато расте, а съпротивлението $X_C = 1/\omega C$ непрекъснато намалява. Върху хода на кривата $U_C = U_C(\omega)$ за честотния диапазон $\omega = 0 \dots \omega_1$ по-силно влияние оказва нарастването на тока I , а за диапазона $\omega = \omega_1 \dots \omega_0$ е по-силно влиянието на намаляващото капацитивно съпротивление X_C . При честота $\omega \rightarrow \infty$, напрежението $U_C \rightarrow 0$.

За диапазона $\omega = 0 \dots \omega_2$ напрежението U_L нараства, като за диапазона $\omega = \omega_0 \dots \omega_2$ е по-силно влиянието на нарастващото индуктивно съпротивление X_L в сравнение с влиянието на намаляващия след резонанса ток I . Върху хода на кривата $U_L = U_L(\omega)$ за диапазона $\omega = \omega_2 \dots \infty$ оказва по-силно влияние намаляването на тока I , отколкото нарастването на индуктивното съпротивление X_L и при честота $\omega \rightarrow \infty$, напрежението $U_L \rightarrow U$.



Фиг. 5.1.8.

Кривите на напреженията $U_L = U_L(\omega)$; $U_C = U_C(\omega)$; $U_R = U_R(\omega)$ и $U = U(\omega)$ при поддържане на постоянна ефективна стойност на тока I на входа на веригата, т.е. при $I = \text{const}$, са показани на фиг. 5.1.8. Тези криви са построени въз основа на изрази (5.1.14). От фиг. 5.1.8 може да се види, че напрежението U_R не зависи от честотата ω . По отношение на напреженията U_L и U_C може да се отбележи, че при увеличаване на честотата ω U_L нараства, а U_C намалява, като зависимостта $U_L = U_L(\omega)$ е линейна функция. От фиг. 5.1.8 може да се види още, че напрежението U при резонанс има най-малка стойност, равна на U_R . В случай, че $R \rightarrow 0$, то $U \rightarrow 0$, т.е. при верига без загуби за резонансната честота източникът ще се окаже в режим на късо съединение.



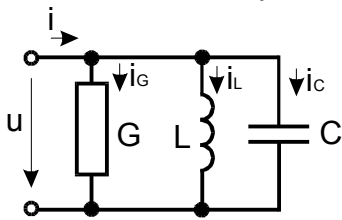
Фиг. 5.1.9.

Въз основа на кривата $I = I(\omega)$ при $U = \text{const}$ или $U = U(\omega)$ при $I = \text{const}$ се определя така наречената лента на пропускане $\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1$ (фиг. 5.1.9). Това е честотният диапазон, за който токът I е не по-малък от $0,707 \cdot I_0$ (I_0 е стойността на тока I при резонанс), а напрежението U не превишава $1,41 \cdot U_0$ (U_0 е стойността на напрежението U при резонанс).

5.2. Резонанс на токовете

При разглеждане на установения синусоиден режим в паралелна G, L, C верига (фиг. 5.2.1) бе установен частен случай (вж. раздел IV), при който реактивните проводимости B_L и B_C , съответното реактивните токове I_L и I_C се компенсират взаимно. При този случай, независимо от наличието на реактивни

елементи във веригата, фазовата разлика φ между напрежението u и тока i на входа ѝ се анулира и проводимостта ѝ става активна. Това явление носи названието резонанс на токовете. Ако активната проводимост $G = 0$, се говори за резонанс на токовете във верига без загуби. Условието за резонанс на токовете се дава със



Фиг. 5.2.1.

следните равенства:

$$B = 0; I_B = 0 \text{ и } \varphi = 0.$$

Тъй като за паралелната G, L, C верига и

$$\varphi = \arctg \frac{1/\omega L - \omega C}{G} = 0, \text{ то за условието за резонанс се}$$

записва:

$$\omega^2 LC - 1 = 0.$$

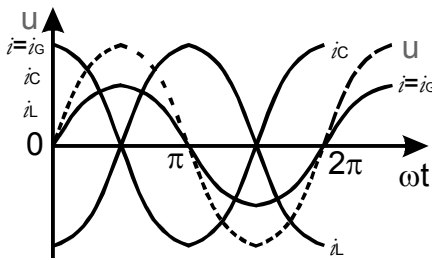
При резонанс комплексната проводимост Y на веригата е най-малка и се превръща в реално число, равно на активната ѝ проводимост G , т.е.:

$$Y = y = G. \quad (5.2.3)$$

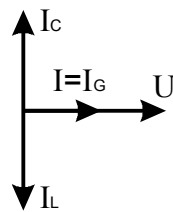
За общия ток I при резонанс на токовете следва да се отбележи, че той, за разлика от случая на резонанс на напреженията, е най-малък и се определя от израза:

$$I = GU. \quad (5.2.4)$$

Графиките на напрежението u и токовете $i = i_G, i_L$ и i_C са дадени на фиг. 5.2.2, а съответните векторни диаграми на фиг. 5.2.3.



Фиг. 5.2.2.



Фиг. 5.2.3.

Ако реактивните проводимости $B_L = 1/\omega L$ и $B_C = \omega C$ са значително по-големи от активната проводимост G , т.е. $B_L, B_C \gg G$, то реактивните токове I_L и I_C при резонанс на токовете ще превишават, даже понякога многократно, тока i на входа на веригата. Това ще води до

преминаване на свръхтокове през бобината и

кондензатора. Поради тази възможност, резонансът в паралелна G, L, C верига е наречен резонанс на токовете.

От равенство (5.2.2) може да се установи, че резонансът на токовете, аналогично както резонансът на напреженията, може да бъде реализиран или чрез промяна на честотата ω на приложеното напрежение, или чрез промяна на индуктивността L на бобината, или чрез промяна на капацитета C на кондензатора. И тук се дефинират величините резонансна ъглова честота ω_0 , резонансна честота f_0 , резонансен период T_0 , резонансна индуктивност L_0 и резонансен капацитет C_0 , които се определят по аналогични формули:

$$\omega_0 = 1/\sqrt{LC}; \quad (5.2.5)$$

$$f_0 = 1/2\pi\sqrt{LC}; \quad (5.2.6)$$

$$T_0 = 1/f_0 = 2\pi\sqrt{LC}; \quad (5.2.7)$$

$$L_0 = 1/\omega^2 C; \quad (5.2.8)$$

$$C_0 = 1/\omega^2 L. \quad (5.2.9)$$

При резонанс на токовете се дефинират още следните величини:

1. Резонансна, вълнова или още характеристична проводимост γ :

$$\gamma = 1/\omega_0 L = \omega_0 C = \sqrt{C/L}. \quad (5.2.10)$$

2. Качественото число Q :

$$Q = \frac{1/\omega_0 L}{G} = \frac{\omega_0 C}{G} = \frac{\gamma}{G}. \quad (5.2.11)$$

Качественото число Q може да бъде изразено и като отношение на реактивния ток I_{L_0} или I_{C_0} при резонанс към общия ток I , т.е.:

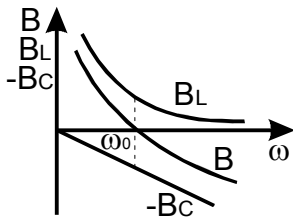
$$Q = \frac{(1/\omega_0 L)U}{GU} = \frac{\omega_0 CU}{GU} = \frac{I_{L_0}}{I} = \frac{I_{C_0}}{I}. \quad (5.2.12)$$

3. Затихване d :

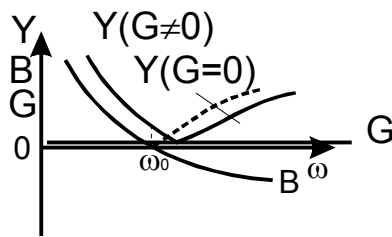
$$d = 1/Q = G/\gamma = G\sqrt{L/C}. \quad (5.2.13)$$

Честотните характеристики на реактивните проводимости $B_L = 1/\omega L$, $-B_C = -\omega C$ и $B = B_L - B_C$ са показани на фиг. 5.2.4. Във връзка с определянето на честотната характеристика на реактивната проводимост B на фигурата е дадена честотната характеристика не на B_C , а на $-B_C$.

На фиг. 5.2.5 са показани честотните характеристики на активната



Фиг. 5.2.4.



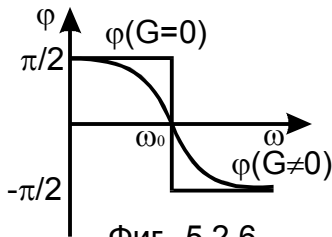
Фиг. 5.2.5.

проводимост G (тя не зависи от честотата ω и се представя с права, успоредна на абсцисната ос), на реактивната проводимост B и на пълната проводимост y . За определяне на честотната характеристика $y = y(\omega)$ се изхожда

$$y = \sqrt{G^2 + B^2}. \quad \text{В случай, че}$$

от израз:

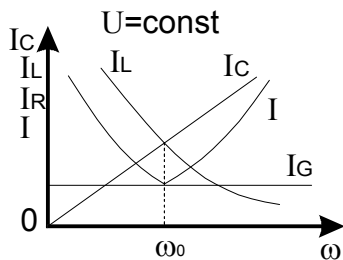
активната проводимост $G = 0$, за диапазона $\omega = 0 \dots \omega_0$ кривите $B = B(\omega)$ и $y = y(\omega)$ съвпадат, а за диапазона $\omega = \omega_2 \dots \infty$ кривата $y = y(\omega)$ представлява огледален образ на кривата $B = B(\omega)$ спрямо обцисната ос. Ако проводимостта $G = 0$, зависимостта $y = y(\omega)$ се изменя по крива, близка на предната крива, но повдигната по ординатата, което се определя от стойността на G .



Фиг. 5.2.6.

За определяне на честотната характеристика на фазовата разлика φ се изхожда от израз: $\varphi = \arctg \frac{1/\omega L - \omega C}{G}$.

Видът на зависимостта $\varphi = \varphi(\omega)$ е показан на фиг. 5.2.6. В случай, че активната проводимост $G \neq 0$, кривата $\varphi = \varphi(\omega)$ е плавна. Ако проводимостта $G = 0$, фазовата разлика φ при $\omega = \omega_0$ се изменя със скок от $\pi/2$ до $-\pi/2$.

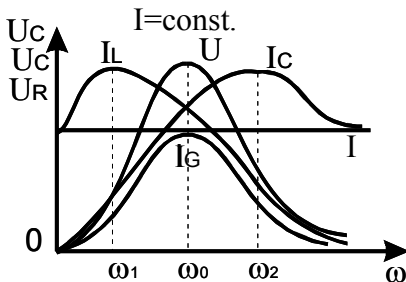


Фиг. 5.2.7.

За определяне на честотните характеристики на напрежението U и токовете I_L , I_C , I_G и I се изхожда от формулите:

$$U = \frac{I}{\sqrt{G^2 + (1/\omega L - \omega C)^2}}; I_L = \frac{1}{\omega L} U; I_C = \omega C U; I_G = G U$$

$$\text{и } I = U \sqrt{G^2 + (1/\omega L - \omega C)^2}. \quad (5.2.14)$$

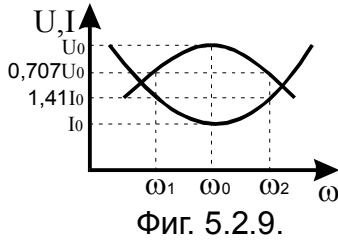


Фиг. 5.2.8.

Кривите $I_L = I_L(\omega)$; $I_C = I_C(\omega)$; $I_G = I_G(\omega)$ и $I = I(\omega)$ при поддържане на постоянна ефективна стойност на приложеното напрежение U , т.е. при $U = \text{const}$, са показани на фиг. 5.2.7. Ако се сравнят кривите от фиг. 5.2.7 с кривите от фиг. 5.1.8, може да се констатира следното: кривата $I_L = I_L(\omega)$ е аналогична на кривата $U_C = U_C(\omega)$; кривата $I_C = I_C(\omega)$ е аналогична на кривата $U_L = U_L(\omega)$; кривата $I_G = I_G(\omega)$ е аналогична на кривата $U_R = U_R(\omega)$ и кривата $I = I(\omega)$ е аналогична на кривата $U = U(\omega)$. И действително, от изрази (5.1.14) и (5.2.14),

може да се установи, че разглежданите зависимости са представени с аналогични функции на честотата ω .

Кривите $U = U(\omega)$; $I_L = I_L(\omega)$; $I_C = I_C(\omega)$ и $I_G = I_G(\omega)$ при поддържане на постоянна ефективна стойност на тока I на входа на веригата, т.е. при $I = \text{const}$, са показани на фиг. 5.2.8. Тук се прави сравнение на кривите от фиг. 5.2.8 с кривите от фиг. 5.1.7. Сравнението показва следното: кривата $U = U(\omega)$ е аналогична на кривата $I = I(\omega)$; кривата $I_L = I_L(\omega)$ е аналогична на кривата $U_C = U_C(\omega)$; кривата $I_C = I_C(\omega)$ е аналогична на кривата $U_L = U_L(\omega)$ и кривата $I_G = I_G(\omega)$ е аналогична на кривата $U_R = U_R(\omega)$. Тази аналогии също се свързват с обстоятелството, че разглежданите зависимости се представят с аналогични функции на честотата ω (вж. изрази (5.1.14) и (5.2.14)).

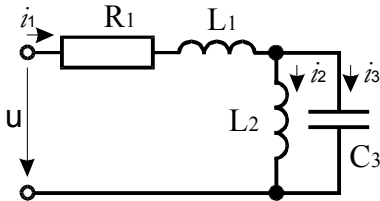


Фиг. 5.2.9.

При паралелната G, L, C верига въз основа на кривата $U = U(\omega)$ при $I = \text{const}$ или $I = I(\omega)$ при $U = \text{const}$ се дефинира лента на задържане $\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1$ (фиг. 5.2.9). Това е честотният диапазон, за който напрежението U е не по-малко от $0,707 \cdot U_0$ (U_0 е стойността на напрежението U при резонанс) а токът I не превишава $1,41 \cdot I_0$ (I_0 е стойността на тока I при резонанс).

5.3. Резонанс в сложни вериги. Резонанс при всички честоти

Резонансните явления във вериги, съдържащи три и повече реактивни елемента, са значително по-сложни от разглежданите последователна R, L, C и паралелна G, L, C вериги. При такива вериги е възможно получаването на няколко резонанса на напрежения и токове. Освен това при сложни вериги са възможни резонанси по отношение на входа им и по отношение на отделни техни участъци. Така например, за веригата, чиято схема е показана на фиг. 5.3.1, е възможен напрежителен резонанс спрямо входа $\dot{U}$ и токов резонанс по отношение паралелно съединените елементи L_2 и C_3 .

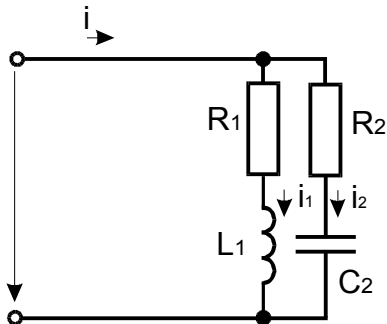


Фиг. 5.3.1.

Независимо от сложността на веригата, а също от това дали разглеждането се прави спрямо входа $\dot{U}$ или по отношение на отделни нейни участъци, то условията за резонанс на напреженията и токовете остават същите, както при разглежданите последователна R, L, C и паралелна G, L, C вериги, а именно:

1. За възникване на резонанс на напреженията е необходимо анулиране на реактивното съпротивление X , т.е.: $X = 0$;

2. За възникване на резонанс на токовете е необходимо анулиране на реактивната проводимост B , т.е. $B = 0$.



Фиг. 5.3.2.

Във връзка с възникване на токов резонанс при всички честоти се анализира веригата, чиято схема е показана на фиг. 5.3.2. Тази схема може да бъде разглеждана като заместваща схема на паралелно съединени реална бобина с параметри R_1 и L_1 и реален кондензатор с параметри R_2 и C_2 . При това, както бобината, така и кондензаторът, са представени с последователни заместващи схеми.

За веригата от фиг. 5.3.2 е възможен токов резонанс, условието за възникването на който е:

$$B = B_L - B_C = 0 \text{ или } B_L = B_C. \quad (5.3.1)$$

За намиране на реактивните проводимости B_L и B_C се записва комплексната проводимост Y на веригата:

$$\begin{aligned}
 Y &= Y_1 - Y_2 = \frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} = \frac{1}{R_1 + j\omega L_1} + \frac{1}{R_2 + 1/j\omega C_2} = \\
 &= \frac{R_1}{R_1^2 + \omega^2 L_1^2} + \frac{R_2}{R_2^2 + 1/\omega^2 C_2^2} - j \left(\frac{\omega L_1}{R_1^2 + \omega^2 L_1^2} - \frac{1/\omega C_2}{R_2^2 + 1/\omega^2 C_2^2} \right) = \\
 &= G_L + G_C - j(B_L - B_C) = G - jB.
 \end{aligned} \tag{5.3.2}$$

От последното равенство за резонансната честота ω_0 се достига до изрази:

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L_1 C_2}} \sqrt{\frac{L_1/C_2 - R_1^2}{L_1/C_2 - R_2^2}}. \tag{5.3.3}$$

Израз (5.3.1) се анализира при $R_1 = R_2 = R = \sqrt{L_1/C_2}$. При това условие за подкоренната му величина се получава неопределеност от вида $0/0$. За изясняване на този случай изразът за реактивната проводимост B_C се умножава и дели с $\omega^2 L_1 C_2$, т.е.:

$$\begin{aligned}
 B_C &= \frac{(1/\omega C_2)\omega^2 L_1 C_2}{R_2^2 \omega^2 L_1 C_2 + (1/\omega^2 C_2^2)\omega^2 L_1 C_2} = \frac{\omega L_1}{R_2^2 \omega^2 L_1 C_2 + L_1/C_2} = \\
 &= \frac{\omega L_1}{\omega^2 L_1 + R_1^2} = B_L.
 \end{aligned} \tag{5.3.4}$$

Въз основа на получените по-горе резултати може да се заключи, че при условието $R_1 = R_2 = R = \sqrt{L_1/C_2}$ равенството на двете реактивни проводимости B_L и B_C се реализира при всички честоти. За комплексното съпротивление Z на веригата може да се установи, че за всички честоти то остава едно и също и равно на R , т.е.: $Z = R$.

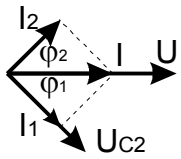
За фазовите разлики φ_1 и φ_2 между приложеното напрежение u и токовете i_1 и i_2 в паралелните клонове на схемата от фиг. 5.3.2 се записва:

$$\operatorname{tg} \varphi_1 = \frac{\omega L_1}{R_1} = \frac{\omega L_1}{\sqrt{L_1/C_2}} = \omega \sqrt{L_1 C_2}; \tag{5.3.5}$$

$$\operatorname{tg} \varphi_2 = \frac{-1/\omega C_2}{R_2} = \frac{-1}{\omega C_2 \sqrt{L_1/C_2}} = \frac{-1}{\omega \sqrt{L_1 C_2}} = -\frac{1}{\operatorname{tg} \varphi_1}. \tag{5.3.6}$$

Въз основа на горните изрази се достига до равенството:

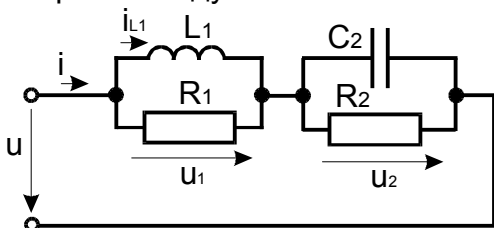
$$\operatorname{tg} \varphi_1 \cdot \operatorname{tg} \varphi_2 = -1, \tag{5.3.7}$$



Фиг. 5.3.3.

което изразява условието за ортогоналност на векторите на токовете i_1 и i_2 , т.е. двата тока са в квадратура. Като се има предвид, че напрежението U_C изостава от тока I_2 на $\pi/2$, то токът I_1 през бобината и напрежението U_{C_2} ще се окажат във фаза.

Последното означава, че между магнитното поле на бобината и електрическото поле на кондензатора не се извършва обмен на енергия. Следователно, към двете полета едновременно постъпва енергия от източника, без да се осъществява обмен на енергия между полетата и източника. В такъв случай при едновременно намаляване



Фиг. 5.3.4.

на тока i_1 през бобината и напрежението u_C върху кондензатора запасената в полетата на веригата енергия се преобразува в топлина в резисторите R_1 и R_2 . За този интервал от време към тях продължава да постъпва енергия от източника, която също се преобразува в топлина.

Ако се анализира веригата чиято схема е

показана фиг. 5.3.4, може да се установи, че при условието $R_1 = R_2 = R = \sqrt{L_1/C_2}$ реактивното ѝ съпротивление X се анулира и комплексното ѝ съпротивление Z става чисто активно и равно на R , т.е.: $Z = R$ за всички честоти. Това означава, че при горното условие във веригата се реализира напрежителен резонанс при всички честоти.

И действително, за комплексното съпротивление Z на веригата от фиг. 5.3.4 се записва:

$$\begin{aligned} Z &= Z_1 + Z_2 = \frac{1}{Y_1} + \frac{1}{Y_2} = \frac{1}{1/R_1 - j(1/\omega L_1)} + \frac{1}{1/R_2 + j\omega C_2} = \\ &= \frac{1/R_1}{1/R_1^2 + 1/\omega^2 L_1^2} + \frac{1/R_2}{1/R_2^2 + \omega^2 C_2^2} - j \left(\frac{1/\omega L_1}{1/R_1^2 + 1/\omega^2 L_1^2} - \frac{\omega C_2}{1/R_2^2 + \omega^2 C_2^2} \right) = \\ &= R_1 + R_2 - j(X_L - X_C) = R + jX. \end{aligned} \quad (5.3.8)$$

Приравняват се реактивните съпротивления X_L и X_C , т.е.:

$$\frac{1/\omega L_1}{1/R_1^2 + 1/\omega^2 L_1^2} = \frac{\omega C_2}{1/R_2^2 + \omega^2 C_2^2}. \quad (5.3.9)$$

и за резонансната честота ω_0 се получава следният израз:

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L_1 C_2}} \sqrt{\frac{C_2/L_1 - 1/R_1^2}{C_2/L_1 - 1/R_2^2}}. \quad (5.3.10)$$

Ако при условието: $R_1 = R_2 = R = \sqrt{L_1/C_2}$ се анализира израз (5.3.10), аналогично, както при израз (5.3.3), за подкоренната му величина се получава неопределеност от вида $0/0$. Тук за изясняване на тази неопределеност изразът за реактивното съпротивление X_L се умножава и дели с $\omega^2 L_1 C_2$, т.е.:

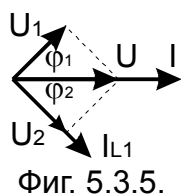
$$\begin{aligned} X_L &= \frac{(1/\omega L_1) \cdot \omega^2 L_1 C_2}{\omega^2 L_1 C_2 / R_1^2 + \omega^2 L_1 C_2 / \omega^2 L_1^2} = \frac{\omega C_2}{\omega^2 L_1 C_2 / R_1^2 + C_2 / L_1} = \\ &= \frac{\omega C_2}{\omega^2 C_2^2 + R_2^2} = X_C, \end{aligned} \quad (5.3.11)$$

т.е. при условието: $R_1 = R_2 = R = \sqrt{L_1/C_2}$, равенството на двете реактивни съпротивления X_L и X_C се реализира при всички честоти.

За фазовите разлики φ_1 и φ_2 между тока i на входа на веригата и напреженията u_1 и u_2 (вж. схемата от фиг. 5.3.4) се записва:

$$\text{tg} \varphi_1 = \frac{1/\omega L_1}{1/R_1} = \frac{1}{\omega L_1} \sqrt{\frac{L_1}{C_2}} = \frac{1}{\omega \sqrt{L_1 C_2}}; \quad (5.3.12)$$

$$\text{tg} \varphi_2 = \frac{-\omega C_2}{1/R_2} = -\omega C_2 R_2 = -\omega \sqrt{L_1 C_2} = -\frac{1}{\text{tg} \varphi_1}. \quad (5.3.13)$$



Фиг. 5.3.5.

И тук се достига до равенството:

$$\text{tg} \varphi_1 \cdot \text{tg} \varphi_2 = -1. \quad (5.3.14)$$

В случая това равенството изразява условието за ортогоналност на векторите на напреженията u_1 и u_2 , т.е. двете напрежения са в квадратура. Тъй като напрежението $U_1 = U_{L_1}$ и това напрежение изпреварва тока I_{L_1} на $\pi/2$, то токът I_{L_1} и напрежението $U_2 = U_{C_2}$ са във фаза. Това означава, че от енергийна гледна точка процесите във веригата от фиг. 5.3.4 са аналогични на процесите във веригата от фиг. 5.3.2.

Явлението резонанс намира широко приложение в радиотехниката, съобщителната техника, измервателната техника и др. Например, за да се отдели сигнала на даден радиопредавател от сигналите на многото едновременно работещи радиопредаватели, е необходимо трептящият кръг на приемника да бъде настроен в резонанс на честотата на този радиопредавател. В съобщителната техника явлението резонанс позволява по една предавателна линия да се водят едновременно няколко разговора.

В някои случаи явлението резонанс е нежелателно, даже опасно. Например, при последователно свързване на индуктивни и капацитивни елементи и при малко активно съпротивление е възможно възникването на пренапрежения, а при паралелното им свързване и при малка активна проводимост - поява на свръх токове. При свързване на дълга ненатоварена линия към трансформатор могат да възникнат пренапрежения при честота, близка до резонансната. При такава верига е възможен резонанс за някои от висшите хармоници.

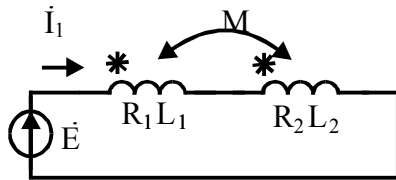
VI. УСТАНОВЕНИ СИНУСОИДАЛНИ РЕЖИМИ В ЛИНЕЙНИ ЕЛЕКТРИЧЕСКИ ВЕРИГИ С ИНДУКТИВНА ВРЪЗКА

Встъпителни бележки

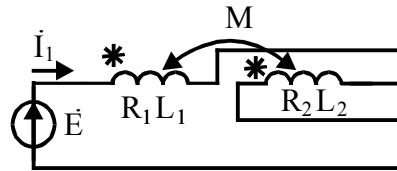
В раздела се разглеждат особеностите на анализа на установени синусоидални режими в линейни електрически вериги с индуктивна връзка. Разглеждат се също въпроси, свързани с предаването на комплексна мощност по индуктивен път и на елиминирването на индуктивната връзка. В раздела се отделя внимание и на процесите в линеен трансформатор.

6.1. Анализ на установени синусоидални режими в линейни електрически вериги с индуктивна връзка

Както бе разгледано в 2.3, за отчитане на явлението взаимна индукция се въвеждат така наречените едноименни изводи на индуктивно свързаните бобини. Тези изводи са начала или краища на бобините и се маркират със знаците $\odot$, $\circ$, Δ , $\square$ и т.н. Смисълът от въвеждането едноименни изводи е в следното: Ако токът в едната от двете индуктивно свързани бобини има посока към или от едноименния ѝ извод, то посоката на напрежението на взаимната индукция, индуцирано във втората бобина, е същата по отношение на едноименния ѝ извод, т.е. тази посока е към или от извода ѝ.



Фиг.6.1.1



Фиг.6.1.2

Разглежда се последователно съединение на две индуктивно свързани бобини. Съединението може да бъде съпосочно (съгласувано) (фиг. 6.1.1) или противоположно (несъгласувано) (фиг. 6.1.2).

За схемата от фиг. 6.1.1 може да бъде записано следното уравнение:

$$\dot{E} + \dot{E}_{L_1} + \dot{E}_{L_2} + \dot{E}_{M_{12}} + \dot{E}_{M_{21}} = (R_1 + R_2) \dot{I}, \quad (6.1.1)$$

където $\dot{E}_{L_1} = -j\omega L_1 \dot{I}$; $\dot{E}_{L_2} = -j\omega L_2 \dot{I}$; $\dot{E}_{M_{12}} = -j\omega M_{12} \dot{I}$; $\dot{E}_{M_{21}} = -j\omega M_{21} \dot{I}$ са ЕДН на самоиндукция и взаимноиндукция.

В уравнение (6.1.1) ЕДН на самоиндукция и взаимноиндукция се заменят със съответните напрежения, т.е.: $\dot{E}_{L_1} = -\dot{U}_{L_1}$; $\dot{E}_{L_2} = -\dot{U}_{L_2}$; $\dot{E}_{M_{12}} = -\dot{U}_{M_{12}}$ и $\dot{E}_{M_{21}} = -\dot{U}_{M_{21}}$ и се достига до следния израз:

$$\dot{E} = \dot{U}_{L_1} + \dot{U}_{L_2} + \dot{U}_{M_{12}} + \dot{U}_{M_{21}} + (R_1 + R_2) \dot{I}. \quad (6.1.2)$$

Този израз може да се запише във вида:

$$\dot{E} = j\omega L_1 \dot{I} + j\omega L_2 \dot{I} + j\omega M_{12} \dot{I} + j\omega M_{21} \dot{I} + (R_1 + R_2) \dot{I}. \quad (6.1.3)$$

Като се има в предвид, че $M_{12} = M_{21} = M$, от израз (6.1.3) се получава:

$$\dot{E} = j\omega (L_1 + L_2 + 2M) \dot{I} + (R_1 + R_2) \dot{I} = j\omega L_e \dot{I} + R_e \dot{I} = Z_e \dot{I} \quad (6.1.4)$$

В последната формула величината $Le = L_1 + L_2 + 2M$ е еквивалентната индуктивност на веригата. Тази величина е положителна, тъй като енергията на магнитното поле е винаги положителна, т.е.: $W_M = 0,5Le.i^2 > 0$.

Еквивалентната индуктивност на веригата при съпосочно съединение на бобините (фиг. 6.1.1) се означава с $Le_1 = L_1 + L_2 + 2M$. Ако се направи аналогично разглеждане за схемата от фиг. 6.1.2 (противопосочно съединение на бобините), може да се установи, че еквивалентната индуктивност ще бъде: $Le_2 = L_1 + L_2 - 2M$.

Ако са известни еквивалентните индуктивности Le_1 и Le_2 , взаимната индуктивност M може да бъде пресметната по формулата:

$$M = (Le_1 - Le_2) / 4. \quad (6.1.4)$$

На практика определянето на взаимната индуктивност M се извършва по следния начин: Реализира се последователно съединение на две индуктивно свързани бобини. Определя се еквивалентната индуктивност на съединението. Разменят се изводите на една от бобините, без да се променя взаимното им разположение и отново се определя еквивалентната индуктивност на съединението. По-голямата стойност на еквивалентната индуктивност отговаря на съпосочно (съгласувано) свързване на бобините.

За анализ на установени синусоидални режими в сложни вериги, съдържащи индуктивно свързани бобини, директно са приложими всички методи за анализ на сложни вериги с изключение на метода с възлови потенциали и преобразованията звезда – триъгълник и триъгълник – звезда. Използването на тези методи тук изисква въвеждането на допълнителни правила.

Основните трудности при анализа на веригите с индуктивна връзка са свързани с отчитането на напреженията на взаимната индукция, т.е. с определянето на броя и на знаците на тези напрежения в уравненията на веригата.

Във връзка с горното при съставянето на уравненията по втория закон на Кирхоф при вериги с индуктивна връзка е необходимо да се извърши следното:

1. Установява се има ли в разглеждания контур индуктивно свързани бобини и с колко бобини всяка от тях е свързана. Така се определя броят на допълнителните членове в уравнението на контура, отчитащи напреженията на взаимна индукция.

2. Определя се знакът, с който напрежението на взаимна индукция се записва в уравнението на контура. За целта се изхожда от посоката на тока в бобината, от която се индутира това напрежение и посоката на сумиране по контура. Ако двете посоки са еднакво ориентирани спрямо едноименните изводи на бобините, знакът е (+), в противен случай – (-).

При съставянето на уравненията по метода с контурните токове при вериги индуктивна връзка е необходимо да се извърши следното:

А. При определянето на собственото съпротивление на даден контур:

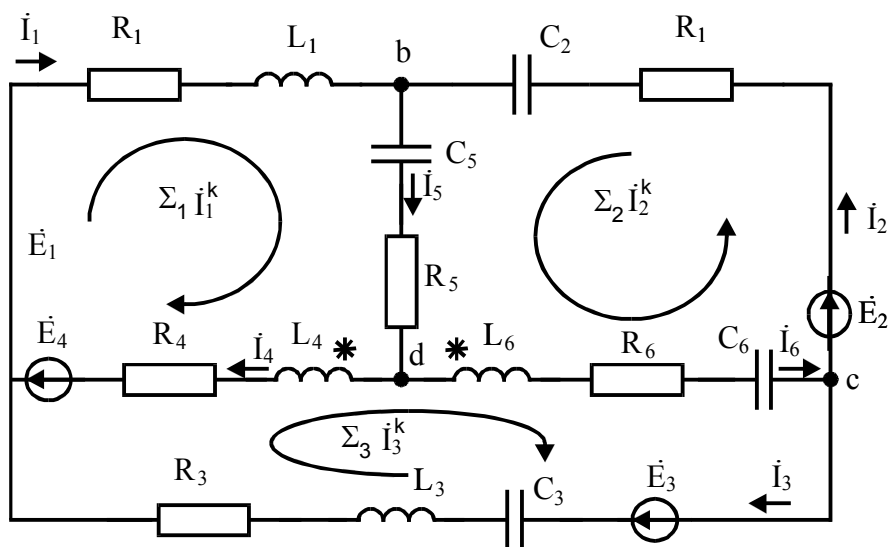
1. Установява се има ли в разглеждания контур две и повече индуктивно свързани бобини и с колко бобини на контура всяка от тях е свързана. Така се определя броят на двойките допълнителни членове в израза за собственото съпротивление на контура, отчитащи напреженията на взаимна индукция, индутирани от контурния му ток.

2. Определя се знакът, с който се записват тези допълнителни членове. За целта се изхожда от посоката на контурния ток. Ако тя е еднакво ориентирана спрямо едноименните изводи на бобините знакът е (+), а в противен случай – (-).

Б. При определянето на общото съпротивление на двата контура:

1. Установява се има ли в разглежданите два контура индуктивно свързани бобини и с колко бобини на единия контур всяка бобина от другия контур е свързана. Така се определя броят на допълнителни членове в израза за общото съпротивление на двата контура, отчитащи напреженията на взаимната индукция, индуцирани в единия контур от контурния ток на другия контур.

2. Определя се знакът, с който се записват тези допълнителни членове. За целта се изхожда от посоките на контурните токове. Ако тези посоки са еднакво ориентирана спрямо едноименните изводи на бобините, знакът е (+), а в противен случай – (-).



Фиг.6.1.3

За илюстрация на разгледаното по-горе, за веригата, чиято схема е показана на фиг. 6.1.3, ще бъдат записани системите уравнения чрез законите на Кирхоф и чрез метода с контурни токове.

За схемата от фиг. 6.1.3 се приема, че параметрите на елементите ѝ са известни. Търсят се клоновите токове.

За облекчаване записа на уравненията се въвеждат означенията: $Z_1 = R_1 + j\omega L_1$; $Z_2 = R_2 + 1/j\omega C_2$; $Z_3 = R_3 + j\omega L_3 + 1/j\omega C_3$; $Z_4 = R_4 + j\omega L_4$; $Z_5 = R_5 + 1/j\omega C_5$; $Z_6 = R_6 + j\omega L_6 + 1/j\omega C_6$; $Z_{M_{34}} = Z_{M_{43}} = j\omega M_{34} = j\omega M_{43}$; $Z_{M_{36}} = Z_{M_{63}} = j\omega M_{36} = j\omega M_{63}$ и $Z_{M_{46}} = Z_{M_{64}} = j\omega M_{46} = j\omega M_{64}$.

По законите на Кирхоф се записва системата:

$$\text{възел а} \rightarrow \dot{I}_1 - \dot{I}_3 - \dot{I}_4 = 0;$$

$$\text{възел в} \rightarrow -\dot{I}_1 - \dot{I}_2 + \dot{I}_5 = 0;$$

$$\text{възел с} \rightarrow \dot{I}_2 + \dot{I}_3 - \dot{I}_6 = 0;$$

$$\text{I к-р} \rightarrow Z_1 \dot{I}_1 + Z_5 \dot{I}_5 + Z_4 \dot{I}_4 + Z_{M_{43}} \dot{I}_3 + Z_{M_{46}} \dot{I}_6 = \dot{E}_1 + \dot{E}_4;$$

$$\text{II к-р} \rightarrow Z_2 \dot{I}_2 + Z_5 \dot{I}_5 + Z_6 \dot{I}_6 + Z_{M_{63}} \dot{I}_3 + Z_{M_{64}} \dot{I}_4 = \dot{E}_2;$$

$$\begin{aligned} \text{III к-р} \rightarrow Z_3 \dot{I}_3 - Z_4 \dot{I}_4 + Z_6 \dot{I}_6 + Z_{M_{34}} \dot{I}_4 + Z_{M_{36}} \dot{I}_6 - Z_{M_{34}} \dot{I}_3 + Z_{M_{46}} \dot{I}_6 + \\ + Z_{M_{63}} \dot{I}_3 + Z_{M_{64}} \dot{I}_4 = \dot{E}_3 - \dot{E}_4. \end{aligned}$$

По метода с контурни токове системата уравнения в общ вид изглежда по следния начин:

$$Z_{11} \dot{I}_1^k + Z_{12} \dot{I}_2^k + Z_{13} \dot{I}_3^k = \dot{E}_{11};$$

$$Z_{21} \dot{I}_1^k + Z_{22} \dot{I}_2^k + Z_{23} \dot{I}_3^k = \dot{E}_{22};$$

$$Z_{31} \dot{I}_1^k + Z_{32} \dot{I}_2^k + Z_{33} \dot{I}_3^k = \dot{E}_{33}.$$

Означенията в последната система са:

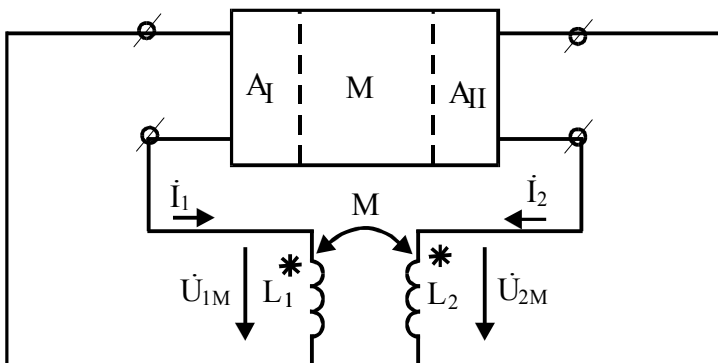
$$\dot{E}_{11} = \dot{E}_1 + \dot{E}_4; \dot{E}_{22} = \dot{E}_2; \dot{E}_{33} = \dot{E}_3 - \dot{E}_4; \dot{I}_1^k = \dot{I}_1; \dot{I}_2^k = \dot{I}_2; \dot{I}_3^k = \dot{I}_3;$$

$$Z_{11} = Z_1 + Z_5 + Z_4; Z_{22} = Z_2 + Z_5 + Z_6; Z_{33} = Z_3 + Z_4 + Z_6 + 2Z_{M_{36}} - 2Z_{M_{34}} - 2Z_{M_{46}};$$

$$Z_{12} = Z_{21} = Z_5 + Z_{M_{46}}; Z_{13} = Z_{31} = -Z_4 + Z_{M_{43}} + Z_{M_{46}} \text{ и } Z_{23} = Z_{32} = Z_6 + Z_{M_{63}} - Z_{M_{64}}.$$

6.2. Предаване на комплексна мощност по индуктивен път

Разглежда се предаването на енергия между две индуктивно свързани бобини без електрическа връзка между тях (фиг. 6.2.1). Останалата част от веригата се представя като активен четириполюсник А. Тя може да бъде разглеждана и като две самостоятелни активни части A_I и A_{II} .



Фиг.6.2.1

записва;

$$\dot{S}_{1M} = \dot{S}_{M12} = \dot{U}_{1M}^* \dot{I}_1 = \dot{U}_{M12}^* \dot{I}_1,$$

(6.2.1)

През всеки полупериод на изменение на токовете i_1 и i_2 , постъпва енергия в магнитното поле на бобините и се връща обратно. Това обаче не означава, че за всяка бобина едно и също количество енергия постъпва в полето ѝ и се връща обратно.

Във връзка с изложението по-горе се въвежда величината комплексна мощност, предавана по индуктивен път.

По отношение на първата бобина за тази мощност се

където $\dot{U}_{1M} = \dot{U}_{M12} = Z_{1M} \dot{I}_2$ е напрежението на взаимната индукция, индуцирано в първата бобина, от тока на втората бобина.

За втората бобина изразът за мощността, предавана по индуктивен път, е следният:

$$\dot{S}_{2M} = \dot{S}_{M21} = \dot{U}_{2M}^* \dot{I}_2 = \dot{U}_{M21}^* \dot{I}_2, \quad (6.2.2)$$

където $\dot{U}_{2M} = \dot{U}_{M21} = Z_{2M} \dot{I}_1$ е напрежението на взаимната индукция, индуцирано във втората бобина, от тока на първата бобина.

Като се има в предвид, че: $Z_{1M} = Z_{2M} = Z_M = j\omega M_{12} = j\omega M_{21} = j\omega M$, то за мощностите

$\dot{S}_{1M}$ и $\dot{S}_{2M}$ се получава:

$$\dot{S}_{1M} = Z_M \dot{I}_2^* \dot{I}_1 \text{ и } \dot{S}_{2M} = Z_M \dot{I}_1^* \dot{I}_2. \quad (6.2.3)$$

За намиране на връзка между двете мощности $\dot{S}_{1M}$ и $\dot{S}_{2M}$ се разглежда $\dot{S}_{1M}^*$:

$$\dot{S}_{1M}^* = \left(Z_M \dot{I}_2^* \dot{I}_1 \right)^* = -Z_M^* \dot{I}_2 \dot{I}_1^* = -\dot{S}_{2M}. \quad (6.2.4)$$

Ако мощностите $\dot{S}_{1M}$ и $\dot{S}_{2M}$ се представят в алгебричен вид, т.е.: $\dot{S}_{1M} = P_{1M} + jQ_{1M}$

и $\dot{S}_{2M} = P_{2M} + jQ_{2M}$ и се отчете връзката: $\dot{S}_{1M}^* = -\dot{S}_{2M}$, може да се установи, че :

$$P_{1M} = -P_{2M} = P_M \text{ и } Q_{1M} = Q_{2M} = Q_M. \quad (6.2.5)$$

Въз основа на горните равенства, комплексните мощности $\dot{S}_{1M}$ и $\dot{S}_{2M}$, предавани по индуктивен път, могат да бъдат представени по следния начин:

$$\dot{S}_{1M} = P_M + jQ_M \text{ и } \dot{S}_{2M} = -P_M + jQ_M. \quad (6.2.6)$$

Ако се сумират двете мощности $\dot{S}_{1M}$ и $\dot{S}_{2M}$ се получава:

$$\dot{S}_{1M} + \dot{S}_{2M} = -j2Q_M, \quad (6.2.7)$$

т.е. общата активна мощност за двете бобини е равна на нула.

Въз основа на разгледаното по-горе може да се направи следното заключение:

Ако $\operatorname{Re}(\dot{S}_M) > 0$, то разглежданата бобина консумира активна мощност от

останалата част на веригата. Но в индуктивния елемент не може да се извършва необратимо преобразуване на електромагнитна енергия в топлина. Следователно, получената от веригата активна мощност се предава по индуктивен път чрез променливото магнитно поле на другата индуктивно свързана бобина. От нея пък тя се връща в останалата част на веригата.

Може да се формулира следното правило: Ако $\operatorname{Re}(\dot{S}_M) > 0$, то бобината, чийто

ток участва в изрази за $\dot{S}_M$ със спрегнатата си стойност, предава активна мощност на бобината, чийто комплекс на тока не е спрегнат.

Символично правилото се записва по следния начин:

1) при $\operatorname{Re}\left(\dot{\dot{S}}_M\right) > 0$, предаване $\bullet \rightarrow \bullet$;

2) при $\operatorname{Re}\left(\dot{\dot{S}}_M\right) < 0$, предаване $\bullet \rightarrow *$. (6.2.8)

Ако положителните посоки на токовете $\dot{I}_1$ и $\dot{I}_2$ са различно ориентирани спрямо едноименните изводи на бобините L_1 и L_2 , то положителните посоки на тока и на напрежението на взаимната индукция за съответната бобина ще бъдат различни. За да се използва същото правило, трябва комплексната мощност, предадена по индуктивен път, да се изрази с формулата (например, за бобината L_1):

$$\dot{S}_{1M} = -\dot{U}_{1M} \dot{I}_1 = -\dot{U}_{M12} \dot{I}_1 = -Z_M \dot{I}_2 \dot{I}_1 \quad (6.2.9)$$

В такъв случай, при различна ориентация на токовете спрямо едноименните изводи на бобините, символичното правило се записва по следния начин (например, за бобината L_1):

1) при $\operatorname{Re}\left(-Z_M \dot{I}_2 \dot{I}_1\right) > 0$, предаване $\bullet \rightarrow \bullet$;

2) при $\operatorname{Re}\left(-Z_M \dot{I}_2 \dot{I}_1\right) < 0$, предаване $\bullet \rightarrow *$. (6.2.10)

Посоката на предаване на активна мощност по индуктивен път може да бъде свързана с началните фази на токовете. За целта токовете $\dot{I}_1$ и $\dot{I}_2$ се представят в експоненциален вид, т.е.:

$$\dot{I}_1 = I_1 e^{j\psi_1} \text{ и } \dot{I}_2 = I_2 e^{j\psi_2}. \quad (6.2.11)$$

За комплексните мощности $\dot{S}_{1M}$ и $\dot{S}_{2M}$, предадени по индуктивен път, се записва:

$$\begin{aligned} \dot{S}_{1M} &= \dot{U}_{1M} \dot{I}_1 = j\omega \dot{I}_2 \dot{I}_1 = j\omega M I_1 I_2 e^{j(\psi_2 - \psi_1)} = \omega M I_1 I_2 \sin(\psi_1 - \psi_2) + j\omega M \cos(\psi_1 - \psi_2); \\ \dot{S}_{2M} &= \dot{U}_{2M} \dot{I}_2 = j\omega M \dot{I}_1 \dot{I}_2 = -\dot{S}_{1M}. \end{aligned} \quad (6.2.12)$$

Съответните съставки на мощностите $\dot{S}_{1M}$ и $\dot{S}_{2M}$ са:

$$\begin{aligned} P_{1M} &= -P_{2M} = P_M = \omega M I_1 I_2 \sin(\psi_1 - \psi_2); \\ Q_{1M} &= Q_{2M} = Q_M = \omega M I_1 I_2 \cos(\psi_1 - \psi_2). \end{aligned} \quad (6.2.13)$$

Въз основа на разгледаното по-горе, може да бъде формулирано следното правило:

1) Ако $\pi > \psi_1 - \psi_2 > 0$, то $P_{1M} > 0$, а $P_{2M} < 0$, т.е. се предава активна мощност от бобината L_1 към бобината L_2 .

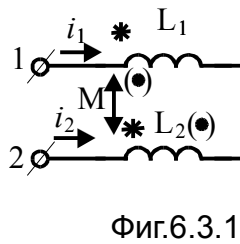
2) Ако $\pi > \psi_2 - \psi_1 > 0$, то $P_{1M} < 0$, а $P_{2M} > 0$, т.е. се предава активна мощност от бобината L_1 към бобината L_2 .

Разгледаните по-горе резултати за активната мощност, предадена по индуктивен път, важат и за индуктивната мощност.

6.3. Елиминирание на индуктивната връзка

Анализът на вериги, съдържащи индуктивно свързани бобини, може да бъде облекчен, ако индуктивната връзка се отстрани чрез преобразуване на веригата. При

това преобразуването трябва да бъде еквивалентно, т.е. токовете и напреженията в останалата (непреобразуваната) част на веригата не трябва да бъдат променени.



Фиг.6.3.1

След отстраняване на индуктивната връзка за преобразуваната верига е приложим методът с възлови потенциали. Приложими са също преобразуванията звезда-триъгълник и триъгълник-звезда.

Най-често срещаният случай на съединение на две индуктивно свързани бобини е триполюсното съединение, тип звезда (фиг. 6.3.1). Останалите елементи на трите клона са изнесени извън точки 1, 2 и 3.

По законите на Кирхоф за схемата от фиг. 6.3.1 се записва системата уравнения:

$$\begin{cases} -i_1 - i_2 + i_3 = 0; \\ U_{13} = L_1 \frac{di_1}{dt} (\pm) M \frac{di_2}{dt}; \\ U_{23} = L_2 \frac{di_2}{dt} (\pm) M \frac{di_1}{dt}. \end{cases} \quad (6.3.1)$$

В системата (6.3.1) горният ред знаци се отнася за случая на еднакво разположение на едноименните изводи на бобините L_1 и L_2 спрямо общия извод 3, а долният ред знаци - при различно разположение на едноименните изводи на бобините L_1 и L_2 спрямо общия извод 3.

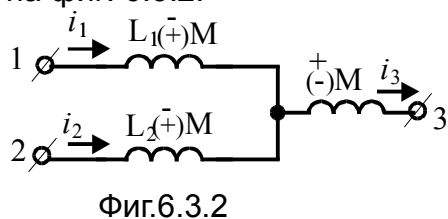
Към второто и третото уравнения на система (6.3.1) се добавя нулевата сума $\left(M \frac{di_3}{dt} - M \frac{di_3}{dt} \right)$ и се отчита й първото уравнение.

$$\begin{cases} -i_1 - i_2 + i_3 = 0; \\ u_{13} = L_1 \frac{di_1}{dt} (\pm) M \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_3}{dt} - M \frac{di_3}{dt}; \\ u_{23} = L_2 \frac{di_2}{dt} (\pm) M \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_3}{dt} - M \frac{di_3}{dt}. \end{cases} \quad (6.3.2)$$

Система (6.3.2) може да бъде записана във вида:

$$\begin{cases} -i_1 - i_2 + i_3 = 0; \\ u_{13} = (L_1 (\pm) M) \frac{di_1}{dt} (\mp) M \frac{di_3}{dt}; \\ u_{23} = (L_2 (\pm) M) \frac{di_2}{dt} (\mp) M \frac{di_3}{dt}. \end{cases} \quad (6.3.3)$$

На система (6.3.3) отговаря преобразуваната верига, чиято схема е показана на фиг. 6.3.2.

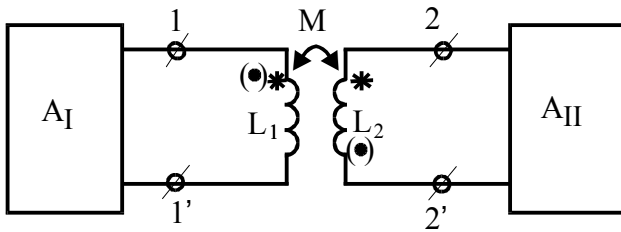


Фиг.6.3.2

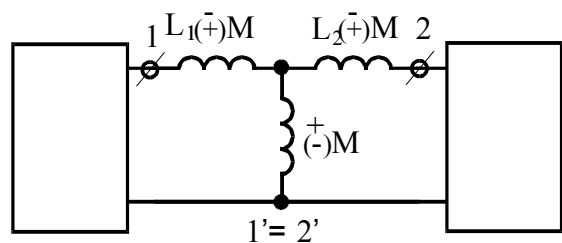
В система (6.3.3) и схемата от фиг. 6.3.2 горният ред знаци отговаря на еднакво разположение на едноименните изводи на бобините L_1 и L_2 спрямо общия извод 3, а долният ред знаци - при различно разположение на тези изводи на бобините L_1 и L_2 спрямо извод 3.

За триполюсното преобразуване са валидни следните забележки:

1. Триполюсното преобразуване е в сила, както за установени режими, така и за преходни процеси.

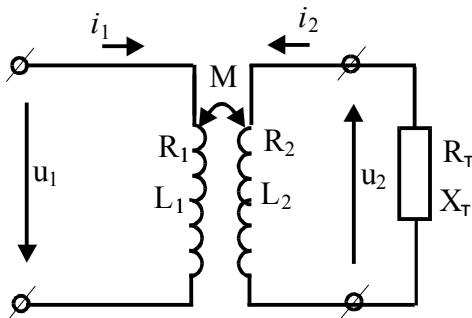


Фиг.6.3.3



Фиг.6.3.4

2. Знаците пред взаимната индуктивност M в преобразуваната схема не зависят от посоките на токовете, а само от разположението едноименните изводи на бобините.



Фиг.6.4.1

3. Триполюсното преобразуване може да бъде приложено за последователно или паралелно съединение на две индуктивно свързани бобини.

4. Триполюсното преобразуване може да бъде приложено и при трансформаторно съединение на две индуктивно свързани бобини (фиг. 6.3.3).

Преобразуваната схема е показана на фиг. 6.3.4. Обосноваването на тази заместваща схема ще бъде направено при разглеждане на линейния трансформатор (вж. 6.4). Изводите 1' и 2' на преобразуваната схема (фиг. 6.3.4) могат да бъдат

съединени заедно, тъй като с това се изменят само абсолютните стойности на потенциалите, но не и на потенциалната разлика.

6.4. Линеен трансформатор

Трансформаторите се отнасят към статичните електрически машини. Те се използват за преобразуване на напреженията и токовете по големината. В най-простия случай трансформаторът представлява две неподвижни индуктивно свързани бобини, между които отсъства електрическа връзка.

Ако бобините са поставени върху стоманен магнитопровод, трансформаторът се характеризира с нелинейни свойства. Ако такъв магнитопровод отсъства, трансформаторът е линеен и се описва от линейни уравнения.

Линейният трансформатор е обект на по-нататъшното разглеждане. Схематично той е показан на фиг. 6.4.1.

Намотката (бобината) с параметри R_1 и L_1 , към която се подава напрежение u_1 от външен източник, се нарича първична. Под действието на напрежението u_1 през намотката преминава ток i_1 .

Намотката (бобината) с параметри R_2 и L_2 се нарича вторична. Към нея е включен консуматор с параметри R_T и X_T . В резултат на индуктивната връзка между двете намотки, във вторичната намотка се индутира ЕДН на взаимната индукция, под действието на което през намотката преминава ток i_2 и върху консуматора се установява напрежение u_2 .

За схемата от фиг. 6.4.1 въз основа на втория закон на Кирхоф може да бъде записана следната система уравнения:

$$\begin{cases} R_1 i_1 + L_1 \frac{di_1}{dt} + M_{12} \frac{di_2}{dt} = u_1; \\ R_2 i_2 + L_2 \frac{di_2}{dt} + M_{21} \frac{di_1}{dt} + u_2 = 0. \end{cases} \quad (6.4.1)$$

Като се има в предвид, че съгласно принципа на електромагнитната взаимност $M_{12} = M_{21} = M$ и се приеме, че установеният режим е синусоидален, то система (4.4.1) в комплексен вид изглежда така:

$$\begin{cases} R_1 \dot{I}_1 + j\omega L_1 \dot{I}_1 + j\omega M \dot{I}_2 = \dot{U}_1; \\ R_2 \dot{I}_2 + j\omega L_2 \dot{I}_2 + j\omega M \dot{I}_1 + \dot{U}_2 = 0. \end{cases} \quad (6.4.2)$$

За дефиниране на величината входното съпротивление Z_{BX} на трансформатора, напрежението $\dot{U}_2$ се изразява по следния начин:

$$\dot{U}_2 = Z_T \dot{I}_2 = (R_T + jX_T) \dot{I}_2. \quad (6.4.3)$$

Напрежението $\dot{U}_2$ от равенството (6.4.3) се замества във второто уравнение на система (6.4.2):

$$(R_2 + R_T) \dot{I}_2 + j(\omega L_2 + X_T) \dot{I}_2 = -j\omega M \dot{I}_1. \quad (6.4.4)$$

Въвеждат се означенията:

$$R_{2e} = R_2 + R_T \text{ и } X_{2e} = \omega L_2 + X_T. \quad (4.4.5)$$

и за тока $\dot{I}_2$ във вторичната намотка се записва:

$$\dot{I}_2 = -j \frac{\omega M}{R_{2e} + jX_{2e}} \dot{I}_1. \quad (6.4.6)$$

Така изразен токът $\dot{I}_2$ се замества в първото уравнение на система (6.4.2) и се получава следният израз:

$$R_1 \dot{I}_1 + j\omega L_1 \dot{I}_1 + \frac{\omega^2 M^2}{R_{2e} + jX_{2e}} \dot{I}_1 = \dot{U}_1. \quad (6.4.7)$$

От последния израз се достига до формулата за входното съпротивление Z_{BX} на трансформатора, т.е.:

$$\begin{aligned} Z_{\text{BX}} = \frac{\dot{U}_1}{\dot{I}_1} &= \left(R_1 + \frac{\omega^2 M^2}{R_{2e}^2 + X_{2e}^2} R_{2e} \right) + j \left(\omega L_1 - \frac{\omega^2 M^2}{R_{2e}^2 + X_{2e}^2} X_{2e} \right) = \\ &= (R_1 + R_{\text{BH}}) + j(X_1 + X_{\text{BH}}) = R_{\text{BX}} + jX_{\text{BX}}. \end{aligned} \quad (6.4.8)$$

Във формула (6.4.8) величината $R_{\text{BX}} = \omega^2 M^2 R_{2e} / (R_{2e}^2 + X_{2e}^2)$ се нарича внесено активно съпротивление. Съпротивлението R_{BH} се добавя със знак (+) към съпротивлението R_1 на първичната намотка, тъй като общата преобразувана в топлина енергия, е равна на сумата от преобразуваната в топлина енергия в първичната намотка и във вторичната страна на трансформатора, включваща вторичната намотка и товара.

Във формула (6.4.8) величината $X_{\text{BH}} = \omega^2 M^2 X_{2e} / (R_{2e}^2 + X_{2e}^2)$ се нарича внесено реактивно съпротивление. Съпротивлението X_{BH} може да води до увеличаване или до намаляване на входното реактивно съпротивление X_{BX} на трансформатора в сравнение с реактивното съпротивление $X_1 = \omega L_1$ на първичната му намотка. Тези два случая ще бъдат разгледани по-подробно.

- I случай - $X_{\text{BX}} > X_1$. Този случай е възможен, ако $X_{\text{BH}} < 0$. За целта е необходимо $X_{2e} < 0$, т.е. товарът да има активно-капацитивен характер ($X_T < 0$) и освен това

$|X_T| > |\omega L_2|$. При този случай токът $\dot{I}_2$ ще изпреварва ЕДН на взаимната индукция

ъгъл, който в граничния случай е равен на $\pi/2$. Като се има предвид, че индукираното във вторичната намотка ЕДН на взаимната индукция, изостава от потока на взаимната индукция, а следователно и от тока $\dot{I}_1$ на ъгъл $\pi/2$, то в граничния случай двата тока $\dot{I}_1$ и $\dot{I}_2$ ще се окажат в фаза. Във фаза ще бъдат и техните магнитни потоци. Последното означава, че общият магнитен поток в първичната намотка ще се окаже по-голям от потока на тока $\dot{I}_1$. Това е свързано с увеличаване на реактивното съпротивление. Ето защо $X_{\text{вх}}$ ще бъде по-голямо от X_1 .

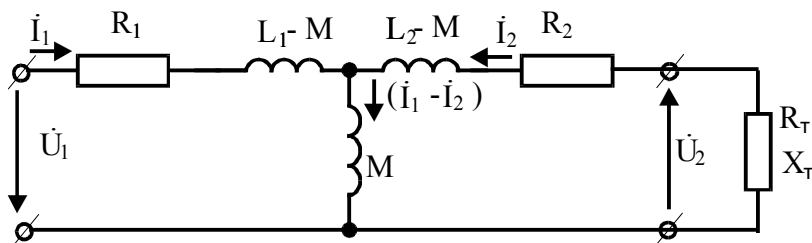
- II случай - $X_{\text{вх}} < X_1$. Този случай е възможен, ако $X_{\text{вн}} > 0$. За целта е необходимо $X_{2\text{е}} > 0$, т.е. товарът да има активно-индуктивен характер ($X_{\text{т}} > 0$). В случай, че товарът има активно-капацитивен характер ($X_{\text{т}} < 0$), то е необходимо $|X_{\text{т}}| < |\omega L_2|$. При

този случай токът $\dot{I}_2$ ще изостава от ЕДН на взаимната индукция ъгъл, който в граничния случай е равен на $\pi/2$ и следователно ще бъде в противофаза с тока $\dot{I}_1$, т.е. в противофаза ще бъдат и техните магнитни потоци. Последното означава, че общият магнитен поток в първичната намотка ще се окаже по-малък от потока на тока $\dot{I}_1$. Това е свързано с намаляване на реактивното съпротивление. Ето защо $X_{\text{вх}}$ ще бъде по-малко от X_1 .

За обосноваване на заместваща електрическа схема на линейния трансформатор, в която отсъствува индуктивна връзка се изхожда от система (6.4.2). За целта към първото уравнение на тази система се добавя нулевата сума $(j\omega M \dot{I}_1 - j\omega M \dot{I}_1)$, а към второто - нулевата сума $(j\omega M \dot{I}_2 - j\omega M \dot{I}_2)$ и системата добива вида:

$$\begin{cases} R_1 \dot{I}_1 + j\omega(L_1 - M)\dot{I}_1 + j\omega M(\dot{I}_1 + \dot{I}_2) = \dot{U}_1; \\ R_2 \dot{I}_2 + j\omega(L_2 - M)\dot{I}_2 + j\omega M(\dot{I}_1 + \dot{I}_2) + \dot{U}_2 = 0. \end{cases} \quad (6.4.9)$$

На последната система уравнения отговаря електрическата схема от фиг. 6.4.2.



Фиг.6.4.2

Схемата от фиг. 6.4.2 може да бъде разглеждана като еквивалентна заместваща електрическа схема на линейния трансформатор. За разлика действителната схема на трансформатора (фиг. 6.2.1), при последната схема двете му страни - първична и вторична са свързани електрически.

Степента на магнитната връзка между две индуктивно свързани бобини L_1 и L_2 се определя така наречения коефициент на магнитна връзка k , който се дава с формулата:

$$k = |M| / \sqrt{L_1 L_2}. \quad (6.4.10)$$

Може да се докаже, че коефициентът $\kappa < 1$. За целта се приема, че вторичната намотка е дадена на късо и че активното ѝ съпротивление $R_2 = 0$. В такъв случай за съпротивленията R_{2e} и X_{2e} се записва:

$$R_{2e} = 0 \text{ и } X_{2e} = \omega L_2 = X_2 \quad (6.4.11)$$

и за внесеното реактивно съпротивление $X_{вн}$ се получава:

$$X_{вн} = \omega \frac{M^2}{L^2}, \quad (6.4.12)$$

откъдето за входното реактивно съпротивление на трансформатора се достига до следния израз:

$$X_{вх} = X_1 - X_{вн} = \omega L_1 - \omega \frac{M^2}{L^2} = \omega L_1 \left(1 - \frac{M^2}{L_1 L_2} \right) = \omega L_1 (1 - \kappa^2). \quad (6.4.13)$$

В последния израз величината $L_1(1 - \kappa^2)$ представлява еквивалентната индуктивност L_e , т.е. $L_e = L_1(1 - \kappa^2)$. Тази величина не може да бъде отрицателна, тъй като свързаната с нея енергия на магнитното поле $W_M = 0,5 L_e i_1^2$ е винаги положителна. Ето защо следва да се приеме, че коефициентът $\kappa < 1$. Този коефициент може да клони към единица, ако двете намотки на такова близко разстояние, че потоците на взаимната индукция и на самоиндукцията в първичната страна се компенсират взаимно.

За изясняване на понятията съвършен и идеален трансформатор се приема, че в намотката на трансформатора отсъстват загуби, т.е.: $R_1 = R_2 = 0$ и че коефициентът на магнитна връзка е $\kappa = |M|/\sqrt{L_1 L_2} = 1$. При тези условия уравненията на трансформатора добиват следния вид:

$$\begin{cases} j\omega L_1 \dot{I}_1 + j\omega M \dot{I}_2 = \dot{U}_1; \\ j\omega L_2 \dot{I}_2 + j\omega M \dot{I}_1 + \dot{U}_2 = 0. \end{cases} \quad (6.4.14)$$

От второто уравнение на система (6.4.14) се определя токът $\dot{I}_1$ и се замества в първото ѝ уравнение:

$$\dot{I}_1 = -\frac{1}{j\omega M} \dot{U}_2 - \frac{L_2}{M} \dot{I}_2; \quad (6.4.15)$$

$$\dot{U}_1 = -\frac{L_1}{M} \dot{U}_2 + j\omega \left(M - \frac{L_1 L_2}{M} \right) \dot{I}_2 = -\frac{L_1}{M} \dot{U}_2 + j\omega \left(1 - \frac{1}{\kappa^2} \right) \dot{I}_2. \quad (6.4.16)$$

Като се има предвид, че $\kappa = 1$, то от уравнение (6.4.16) се получава:

$$\dot{U}_1 = -\frac{L_1}{M} \dot{U}_2 = -c \dot{U}_2. \quad (6.4.17)$$

където $c = L_1/M$.

Като се отчете, че при $\kappa = 1$, $M = L_1 L_2 / M$ и че $L_2/M = 1/c$ и $1/M = c/L_1$, уравнение (6.4.15) добива вида:

$$\dot{I}_1 = -\frac{c}{j\omega L_1} \dot{U}_2 - \frac{1}{c} \dot{I}_2 = \frac{\dot{U}_1}{j\omega L_1} - \frac{1}{c} \dot{I}_2. \quad (6.4.18)$$

И така се достига до следната система уравнения:

$$\begin{cases} \dot{U}_1 = -c \dot{U}_2; \\ \dot{I}_1 = \frac{\dot{U}_1}{j\omega L_1} - \frac{1}{c} \dot{I}_2. \end{cases} \quad (6.4.19)$$

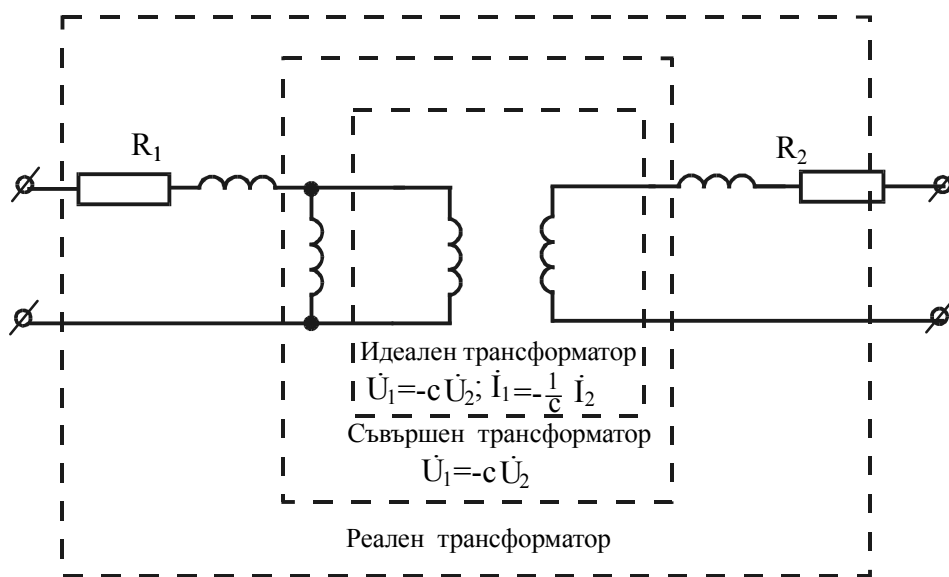
Трансформатор, за който е валидна системата уравнения (6.4.19) се нарича съвършен. Ако индуктивността L_1 има достатъчно голяма стойност, така че да е изпълнено неравенството: $\omega L_1 \gg c \dot{U}_2$, то система (6.4.19) добива вида:

$$\begin{cases} \dot{U}_1 = -c \dot{U}_2; \\ \dot{I}_1 = -\frac{1}{c} \dot{I}_2. \end{cases} \quad (4.4.20)$$

Трансформатор, за който е валидна последната система уравнения се нарича идеален. За входното съпротивление на идеалния трансформатор се получава следният израз:

$$Z_{\text{BX}} = \frac{\dot{U}_1}{\dot{I}_1} = c^2 Z_T. \quad (6.4.21)$$

От последния израз може да се установи, че с помощта на идеалния трансформатор съпротивлението на товара може да се преобразува c^2 пъти. Това обстоятелство намира приложение при така нареченото "съгласуване" на отделните части на електрическите вериги, което е обект на по-нататъшно разглеждане.



Фиг.6.4.3

На фиг. 6.4.3 е показана схема на идеален трансформатор, както и преминаването към съвършен и реален трансформатор. Например, реалният трансформатор може да бъде представен с помощта на идеалния трансформатор и допълнителни резистори R_1 и R_2 , отчитащи наличието на загуби в намотките, и допълнителни бобини, които пък отчитат условието $k < 1$.

VII. ПЕРИОДИЧНИ НЕСИНУСОИДАЛНИ РЕЖИМИ В ЛИНЕЙНИ ЕЛЕКТРИЧЕСКИ ВЕРИГИ

Встъпителни бележки

В раздела се разглеждат особеностите на анализа на периодични несинусоидални режими в линейни електрически вериги. Разглеждат се също въпроси, свързани с определянето на ефективните стойности на периодични несинусоидални величини и на мощностите при периодични несинусоидални режими.

7.1. Представяне на периодични несинусоидални величини в ред на Фурие. Пресмятане на периодични несинусоидални режими. Влияние на реактивните елементи върху кривата на тока

В действителност, токовете i , напреженията u и ЕДН e , които се определят за синусоидални, имат форма, която в по-голяма или в по-малка степен се различава от синусоида. При това тези величини (i , u и e) могат да бъдат периодични или непериодични функции на времето. Причините, които могат да доведат до възникване на несинусоидални режими са следните:

1. Електрическите генератори не осигуряват синусоидално напрежение или ток поради несъвършенство в конструкцията или поради специалното си предназначение.

2. Във веригата са включени нелинейни елементи или елементи с променливи във времето параметри, които деформират синусоидалните режими на тока и напреженията.

Процесите в линейни електрически вериги, възникващи под действието на периодични несинусоидални ЕДН директно трудно се поддават на изследване. Анализът може да се опрости значително, ако периодичните несинусоидални функции (ЕДН, токове и напрежения) се разложат в ред на Фурие. Този ред в общия случай съдържа постоянна съставка основен хармоник с честота $\omega = 2\pi/T$ (T е периодът на несинусоидалната величина) и висши хармоници с честота $k\omega$ (k е цяло положително число).

Разлагането в ред на Фурие е възможно, ако периодичната несинусоидална функция удовлетворява условията на Дирихле. Тези условия са следните: във всеки краен интервал $0 \leq t \leq T$ функцията трябва да има краен брой максимуми и минимуми и краен брой точки на прекъсване от първи род. Периодичните несинусоидални ЕДН, токове и напрежения, намиращи приложение в различни области на техниката, удовлетворяват условията на Дирихле.

Приема се, че $f(t)$ е периодична несинусоидална функция на времето. Ако тя удовлетворява условията на Дирихле, може да бъде представена в ред на Фурие:

$$f(t) = a_0 + a_1 + \dots + a_k + \dots, \quad (7.1.1)$$

където $a_0 = A_0$ е постоянната съставка;

$$a_1 = A_{m1} \sin(\omega t + \psi_1) \text{ - основният хармоник;}$$

$$a_k = A_{mk} \sin(k\omega t + \psi_k) \text{ - } k\text{-тият хармоник.}$$

(A_{m1} и A_{mk} са амплитудите на основния и k -тия хармоници; ψ_1 и ψ_k - началните им фази).

Формула (7.1.1) може да бъде записана съкратено така:

$$f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} A_{mk} \sin(k\omega t + \psi_k). \quad (7.1.2)$$

Хармоникът с номер k може да бъде представен по следния начин:

$$A_{mk} \sin(k\omega t + \psi_k) = A_{mk} \cos \psi_k \sin k\omega t + A_{mk} \sin \psi_k \cos k\omega t. \quad (7.1.3)$$

Въвеждат се означенията:

$$B_{mk} = A_{mk} \cos \psi_k \text{ и } C_{mk} = A_{mk} \sin \psi_k. \quad (7.1.4)$$

Тогава редът на Фурие изглежда така:

$$f(t) = A_0 + B_{m1} \sin \omega t + \dots + B_{mk} \sin k\omega t + \dots + C_{m1} \cos \omega t + \dots + C_{mk} \cos k\omega t + \dots \quad (7.1.5)$$

или накратко:

$$f(t) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (B_{mk} \sin k\omega t + C_{mk} \cos k\omega t). \quad (7.1.6)$$

Коефициентите A_0 , B_{mk} и C_{mk} могат да бъдат изчислени с помощта на следните интеграли:

$$A_0 = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt; \quad (7.1.7)$$

$$B_{mk} = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin k\omega t dt; \quad (7.1.8)$$

$$C_{mk} = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos k\omega t dt. \quad (7.1.9)$$

Във формули (7.1.7) ... (7.1.9) T е периодът на функцията $f(t)$. След определяне на коефициентите B_{mk} и C_{mk} , амплитудата A_{mk} и началната фаза ψ_k могат да бъдат пресметнати по формулите:

$$A_{mk} = \sqrt{B_{mk}^2 + C_{mk}^2} \text{ и } \psi_k = \arctg \frac{C_{mk}}{B_{mk}}. \quad (7.1.10)$$

Редът на Фурие на периодична несинусоидална функция $f(t)$ може да бъде представен и в комплексен вид:

$$f(t) = \frac{1}{T} \sum_{q=-\infty}^{\infty} e^{jq\omega t} F(jq\omega). \quad (7.1.11)$$

Величината $F(jq\omega)$ се нарича дискретен спектър (дискретна честотна характеристика) на функцията на $f(t)$ и се определя по формулата:

$$F(jq\omega) = \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{jq\omega t} dt. \quad (7.1.12)$$

В реда на Фурие (7.1.11) на всеки k -ти хармоник съответствува сума от две спрегнати члена (при $q = k$ и $q = -k$), която е равна на удвоената им реална част:

$$\frac{1}{T} F(jk\omega) e^{jk\omega t} + \frac{1}{T} F(-jk\omega) e^{-jk\omega t} = \operatorname{Re} \left[\frac{2}{T} F(jk\omega) e^{jk\omega t} \right] = \operatorname{Re} \left[\frac{2}{T} F(-jk\omega) e^{-jk\omega t} \right]. \quad (7.1.13)$$

Величината $F(jk\omega)$ се представя в експоненциален вид:

$$F(jk\omega) = F(k\omega) e^{j\alpha_k}. \quad (7.1.14)$$

В такъв случай се записва:

$$\operatorname{Re} \left[\frac{2}{T} F(jk\omega) e^{jk\omega t} \right] = \frac{2}{T} F(k\omega) \cos(k\omega t + \alpha_k) = \frac{2}{T} F(k\omega) \sin(k\omega t + \alpha_k + \pi/2). \quad (7.1.15)$$

Оттук комплексната величина :

$$\frac{2}{T} F(k\omega) e^{j(\alpha_k + \pi/2)} = j \frac{2}{T} F(k\omega) e^{j\alpha_k} = j \frac{2}{T} F(jk\omega) = A_{mk} e^{j\psi_k} = \dot{A}_{mk} \quad (7.1.16)$$

представлява комплексната амплитуда $\dot{A}_{mk}$ на k -тия хармоник.

От последното равенство може да се запише:

$$\dot{A}_{mk} = \frac{2}{T} F(k\omega) \text{ и } \psi_k = \alpha_k + \pi/2. \quad (7.1.17)$$

Съвкупностите от стойностите на амплитудите A_{mk} и на началните фази ψ_k се наричат дискретни честотни характеристики на функцията $f(t)$, съответно амплитудно-честотни характеристики и фазово-честотни характеристики.

Приема се, че Функцията $f(t)$ е периодично несинусоидално ЕДН $e(t)$. При представяне на $e(t)$ в ред на Фурие се записва:

$$\begin{aligned} e(t) &= E_0 + E_{m1} \sin(\omega t + \psi_{e1}) + \dots + E_{mk} \sin(k\omega t + \psi_{ek}) + \dots = \\ &= E_0 + \sum_{k=1}^{\infty} E_{mk} \sin(k\omega t + \psi_{ek}). \end{aligned} \quad (7.1.18)$$

Членовете на горното равенство могат да бъдат разгледани като ЕДН на k на брой източника, т.е. ЕДН $e(t)$ може да се запише и така:

$$e(t) = e_0 + e_1 + \dots + e_k + \dots, \quad (7.1.19)$$

$$\text{където } e_0 = E_0; \quad e_1 = E_{m1} \sin(\omega t + \psi_{e1}); \dots; e_k = E_{mk} \sin(k\omega t + \psi_{ek}); \dots$$

Под действието на всяка съставка e_k , във веригата ще се установи съответна съставка i_k на тока, а в отделните й участъци - съответна съставка u_k на напрежението.

Моментната стойност $i(t)$ на общия ток се представя като сума от моментните стойности на отделните му съставки, т.е.:

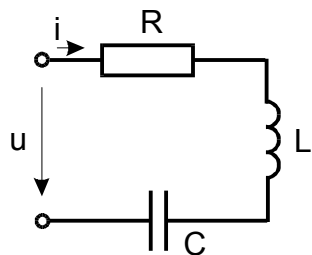
$$i(t) = i_0 + i_1 + \dots + i_k + \dots \quad (7.1.20)$$

От изрази (7.1.19) и (7.1.20) може да се установи, че отделните съставки на ЕДН $e(t)$ и на тока $i(t)$ са постоянни величини (e_0, i_0) или синусоидални функции на времето (e_k, i_k). В такъв случай анализът на периодични несинусоиден режим във веригата може да се извърши, като пресмятането може да се направи за всяка съставка поотделно. Например, за постоянната съставка пресмятането е така както се пресмятат постоянни режими, а за хармоничните съставки - така както се пресмятат установени синусоидални режими (в частност, с използване на комплексния метод). При прилагането на комплексния метод трябва да се има предвид, че комплексите на отделните хармоници на тока не могат да се сумират поради различните честоти (различните ъглови скорости на въртене на изобразяващите ги комплексни вектори). Ето защо след намирането на комплексите на отделните хармоници се определят моментните им стойности, които вече могат да се сумират.

Като пример на периодичен несинусоиден режим се разглежда последователна R, L, C верига (фиг. 7.1.1), на входа на която се подава периодично несинусоидално напрежение $u(t)$:

$$u(t) = u_0 + u_1 + \dots + u_k + \dots, \quad (7.1.21)$$

където u_0 е постоянната му съставка, а $u_k = U_{mk} \sin(k\omega t + \psi_{uk})$ - k -тия му хармоник.



Фиг. 7.1.1.

Токът $i(t)$ на входа на веригата ще бъде от вида:

$$i(t) = i_0 + i_1 + \dots + i_k + \dots \quad (7.1.22)$$

За разглежданата верига поради наличието на кондензатор постоянната съставка на тока i_0 ще бъде равна на нула, т.е.: $i_0 = 0$.

За k -тия хармоник i_k на тока се записва:

$$i_k = I_{mk} \sin(k\omega t + \psi_{ik}),$$

където $I_{mk} = U_{mk} / Z_k$ е амплитудата му, а $\psi_{ik} = \psi_{uk} - \psi_k$ - началната му фаза.

Пълното съпротивление Z_k на веригата за k -тия хармоник на тока се пресмята по формулата:

$$z_k = \sqrt{R^2 + \left(k\omega L - \frac{1}{k\omega C} \right)^2}. \quad (7.1.24)$$

За фазовата разлика φ_k между напрежението и тока за k -тия хармоник се записва:

$$\varphi_k = \arctg \frac{k\omega L - 1/k\omega C}{R}. \quad (7.1.25)$$

Хармониците на тока могат да бъдат определени и чрез комплексния метод. За целта се записват комплексната амплитуда $\dot{U}_{mk}$ на k -тия хармоник на напрежението:

$$\dot{U}_{mk} = U_{mk} e^{j\psi_{uk}} \quad (7.1.26)$$

и комплексното съпротивление Z_k на веригата за k -тия хармоник на тока:

$$Z_k = R + j(k\omega L - 1/k\omega C) = z_k e^{j\varphi_k}. \quad (7.1.27)$$

Тогава за комплексната амплитуда $\dot{I}_{mk}$ на k -тия хармоник на тока се получава:

$$\dot{I}_{mk} = \frac{\dot{U}_{mk}}{Z_k} = \frac{U_{mk} e^{j\psi_{uk}}}{z_k e^{j\varphi_k}} = \frac{U_{mk}}{z_k} e^{j(\psi_{uk} - \varphi_k)} = I_{mk} e^{j\psi_{ik}}. \quad (7.1.28)$$

След определяне на комплексната амплитуда $\dot{I}_{mk}$ на k -тия хармоник на тока за моментната му стойност се записва:

$$i_k = I_{mk} \sin(k\omega t + \psi_{ik}). \quad (7.1.29)$$

По-нататък се сумират моментните стойности на отделните хармоници и за моментната стойност $i(t)$ на тока на входа на веригата се записва:

$$i(t) = i_1 + \dots + i_k + \dots \quad (7.1.30)$$

Ако се анализира изразът за пълното съпротивление z_k на разглежданата верига (вж. формула (7.1.24)), може да се установи, че съпротивлението z_k има различни стойности за различните хармоници. Това означава, че ако на входа на веригата се подаде периодично несинусоидално напрежение, то кривата на тока във веригата ще се отличава от кривата на напрежението. Двете криви са подобни само в случай, че във веригата е включен само резистор.

По-долу ще бъде разгледано влиянието на реактивните елементи върху кривата на тока.

1. Приема се, че разглежданата верига е съставена само от индуктивен елемент. Пълните съпротивления на веригата z_1 за основния и z_k за k -тия хармоник на тока са:

$$z_1 = \omega L \text{ и } z_k = k\omega L. \quad (7.1.31)$$

Амплитудите I_{m1} на основния и I_{mk} на k -тия хармоник на тока се определят от изразите:

$$I_{m1} = \frac{U_{m1}}{z_1} = \frac{U_{m1}}{\omega L} \text{ и } I_{mk} = \frac{U_{mk}}{z_k} = \frac{U_{mk}}{k\omega L} \quad (7.1.32)$$

Съставя се отношението амплитудите I_{mk} и I_{m1} на двата хармоника на тока:

$$\frac{I_{mk}}{I_{m1}} = \frac{1}{k} \frac{U_{mk}}{U_{m1}}. \quad (7.1.33)$$

Анализът на последния израз показва, че отношението на амплитудите на k -тия

и основния хармоници на тока е k пъти по-малко от отношението на съответните амплитуди на хармониците на напрежението. Това показва, че висшите хармоници в кривата на тока са k пъти по-слабо изразени в сравнение с кривата на напрежението, т.е. бобините изглаждат кривата на тока. Изглаждане е необходимо например, при изправителите и затова след тях се включват бобини, които пропускат постоянната съставка на тока и задържат висшите му хармоници.

2. Приема се, че разглежданата верига е съставена само от капацитивен елемент. Пълните съпротивления Z_1 и Z_k на веригата за основния и за k -тия хармоници на тока са:

$$Z_1 = 1/\omega C \text{ и } Z_k = 1/k\omega C. \quad (7.1.34)$$

Амплитудите I_{m1} на основния и I_{mk} на k -тия хармоник на тока се определят от изразите:

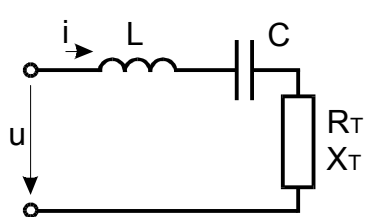
$$I_{m1} = \frac{U_{m1}}{Z_1} = \omega C U_{m1} \text{ и } I_{mk} = \frac{U_{mk}}{Z_k} = k\omega C U_{mk}. \quad (7.1.35)$$

За отношението от амплитудите на двата хармоника I_{mk} и I_{m1} на тока се записва:

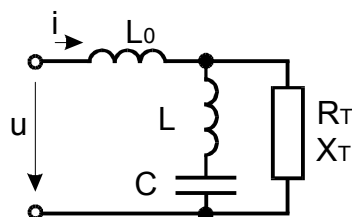
$$\frac{I_{mk}}{I_{m1}} = k \frac{U_{mk}}{U_{m1}}. \quad (7.1.36)$$

Ако последният израз се анализира, може да се установи, че отношението на амплитудите на k -тия и основния хармоници на тока е k пъти по-голямо от отношението на съответните амплитуди на хармониците на напрежението. Оттук може да се заключи, че висшите хармоници в кривата на тока са k пъти по-силно изразени в сравнение с кривата на напрежението, т.е. кондензаторите изострят кривата на тока.

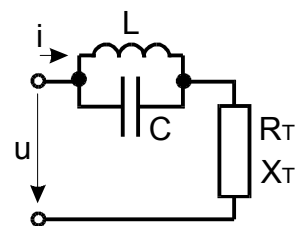
Разгледаните по-горе свойства на бобините и кондензаторите, а също така възможността за получаване на резонанс в даден участък на електрическата верига се използват при устройства, наречени филтри. Тези устройства се реализират от последователно или паралелно съединени бобини и кондензатори и осигуряват безпрепятствено преминаване на някои от хармониците на тока или пък не пропускат даден хармоник или няколко хармоника.



Фиг. 7.1.2.



Фиг. 7.1.3.



Фиг. 7.1.4.

Например, при веригата от фиг. 7.1.2, ако стойностите на индуктивността L и на капацитета C се подберат така, че за k -тия хармоник е изпълнено условието $k\omega L = 1/k\omega C$, то последователно съединените реактивни елементи ще се окажат в напрежителен резонанс за този хармоник и той безпрепятствено ще преминава в товара.

В случай, че се реализира веригата от фиг. 7.1.3, то при същото условие, а именно $k\omega L = 1/k\omega C$, товарът ще се окаже шунтиран от филтъра по отношение на k -тия хармоник и този хармоник няма да премине в товара. Бобината с индуктивност L_0 предпазва източника от режим на късо съединение спрямо k -тия хармоник.

Ако за веригата от фиг. 7.1.4 е изпълнено същото условие $k\omega L = 1/k\omega C$, то k -тият

хармоник на тока също няма да премине в товара. В случая за k -тия хармоник се реализира токов резонанс и проводимостта на веригата за този хармоник ще бъде равна на нула.

7.2. Периодични несинусоидални режими. Ефективни стойности. Активна мощност

За намиране на ефективните стойности на периодичните несинусоидални величини (ток, ЕДН и напрежение) се изхожда от определението за ефективна стойност. Например, за ефективната стойност I на тока се записва (вж. раздел IV):

$$I = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T i^2 dt} . \quad (7.2.1)$$

В случай, че токът i е периодична несинусоидална величина, то след разлагане в ред на Фурие за I^2 се получава :

$$\begin{aligned} I^2 &= \frac{1}{T} \int_0^T i^2 dt = \frac{1}{T} \int_0^T (i_0 + i_1 + \dots + i_k + \dots)^2 dt = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{T} \int_0^T i_k^2 dt + \sum_{\substack{q=0 \\ s=0}}^{\infty} \frac{1}{T} \int_0^T i_q i_s dt = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{T} \int_0^T i_k^2 dt = \sum_{k=0}^{\infty} I_k^2 = I_0^2 + I_1^2 + \dots + I_k^2 + \dots \end{aligned} \quad (7.2.2)$$

В израз (7.2.2) вторият член е равен на нула, т.е. $\sum_{\substack{q=0 \\ s=0}}^{\infty} \frac{1}{T} \int_0^T i_q i_s dt = 0$.

До този резултат се достига въз основа на следните съображения: При $q \neq s$ се записва:

$$\begin{aligned} \int_0^T i_q i_s dt &= \int_0^T I_{mq} I_{ms} \sin(q\omega t + \psi_{iq}) \sin(s\omega t + \psi_{is}) dt = \\ &= \frac{1}{2} I_{mq} I_{ms} \int_0^T \{ \cos[(q-s)\omega t + \psi_{iq} - \psi_{is}] - \cos[(q+s)\omega t + \psi_{iq} + \psi_{is}] \} dt = 0. \end{aligned}$$

(т.е. интегралите от синусоидални или косинусоидални функции от вида $\int_0^T$ за

цяло число $(q-s)$ и $(q+s)$ периоди са равни на нула).

По аналогия с ефективна стойност на периодичен несинусоидален ток за ефективните стойности на периодичните несинусоидалните ЕДН и напрежение се записват формулите:

$$E = \sqrt{\sum_{k=0}^{\infty} E_k^2} \text{ и } U = \sqrt{\sum_{k=0}^{\infty} U_k^2} . \quad (7.2.4)$$

За намиране на активната мощност при периодични несинусоидални режими също се изхожда от определението за активна мощност (вж. раздел IV), т.е.:

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T p dt = \frac{1}{T} \int_0^T u i dt . \quad (7.2.5)$$

В случай, че напрежението u и токът i са периодични несинусоидални функции, то след разлагането им в ред на Фурие, т.е.:

$$u(t) = u_0 + u_1 + \dots + u_k + \dots \text{ и } i(t) = i_0 + i_1 + \dots + i_k + \dots ,$$

за активната мощност P се получава:

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T (u_0 + u_1 + \dots + u_k + \dots)(i_0 + i_1 + \dots + i_k + \dots) dt = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{T} \int_0^T u_k i_k dt + \sum_{\substack{q=0 \\ s=0}}^{\infty} \frac{1}{T} \int_0^T u_q i_s dt =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{T} \int_0^T u_k i_k dt = \sum_{k=0}^{\infty} P_k = P_0 + P_1 + \dots + P_k + \dots = U_0 I_0 + U_1 I_1 \cos \varphi_1 + \dots + U_k I_k \cos \varphi_k + \dots$$
(7.2.6)

Вторият член на израз (7.2.6) е равен на нула по същите съображения, както за втория член на израз (7.2.3).

При периодичен несинусоидален режим се дефинира понятието реактивна мощност Q :

$$Q = \sum_{k=1}^{\infty} Q_k = Q_1 + \dots + Q_k + \dots = U_1 I_1 \sin \varphi_1 + \dots + U_k I_k \sin \varphi_k + \dots$$
(7.2.7)

Дефинира се също понятието пълна мощност S :

$$S = UI = \sqrt{\sum_{k=0}^{\infty} U_k^2} \sqrt{\sum_{k=0}^{\infty} I_k^2}$$
(7.2.8)

и се въвежда така нареченият коефициент на мощността α :

$$\alpha = \frac{P}{S} = \frac{\sum_{k=0}^{\infty} P_k}{\sqrt{\sum_{k=0}^{\infty} U_k^2} \sqrt{\sum_{k=0}^{\infty} I_k^2}}$$
(7.2.9)

Коефициентът на мощността α е равен на единица само в случай, че съпротивлението на товара е активно. При периодични несинусоидални режими коефициентът на мощността α е по-малък при един и същ товар в сравнение със случая на синусоидален режим. Ето защо в енергетиката стремежът при конструирането на променливотоковите генератори е в кривата на ЕДН да липсват висши хармоници, тъй като от една страна тези хармоници намаляват коефициента на мощността, а от друга страна за някой от тях във веригата може да възникне опасен резонанс, т.е. да се появят пренапрежения или свръхтокове.

При наличието на висши хармоници е в сила следното неравенство по отношение на мощностите:

$$S = UI > \sqrt{P^2 + Q^2},$$
(7.2.10)

въз основа на което се дефинира понятието мощност на деформирането D :

$$S^2 - (P^2 + Q^2) = D^2.$$
(7.2.11)

При периодични несинусоидални режими се дефинират още следните коефициенти:

1. Коефициент на формата:

Дава се като отношение от ефективната към средната стойност на величината, т.е.:

$$K_{\phi} = I/I_{av}.$$
(7.2.12)

2. Коефициент на амплитудата:

Дава се като отношение от амплитудната към ефективната стойност на величината, т.е.:

$$K_a = I_m/I.$$
(7.2.13)

При синусоидални режими коефициентите K_{ϕ} и K_a имат стойности:

$$\kappa_{\phi} = \pi/2\sqrt{2} = 1,11 \text{ и } \kappa_a = \sqrt{2} = 1,41.$$

3. Коефициент на деформиране:

Дава се като отношение на ефективната стойност на първия хармоник към общата ефективна стойност, т.е.:

$$\kappa_d = I_1/I. \quad (7.2.14)$$

4. Коефициент на хармоника:

Дава се като отношение на ефективната стойност на съответния хармоник с пореден номер k към ефективната стойност на първия хармоник, т.е.:

$$\kappa_{\text{хк}} = I_k/I_1. \quad (7.2.15)$$

5. Коефициент на нелинейни изкривявания (кларфактор):

Дава се като отношение на ефективната стойност на висшите хармоници (с пореден номер $k \geq 2$ към ефективната стойност на първи хармоник, т.е.:

$$\kappa = \frac{\sqrt{\sum_{k=2}^{\infty} I_k^2}}{I_1}. \quad (7.2.16)$$

VIII. ПРЕХОДНИ ПРОЦЕСИ В ЛИНЕЙНИ ЕЛЕКТРИЧЕСКИ ВЕРИГИ

Встъпителни бележки

В раздела се дават основните положения на преходните процеси и алгоритъмът на класическия метод за изчисляване на преходните процеси. Чрез класическия метод се анализират преходните процеси в последователни R, L; R, C и R, L, C вериги. Дават се също алгоритмите на останалите методи за изследване на преходните процеси: операторен, честотен, чрез преходни и импулсни характеристики и с променливи на състоянието и се привеждат примери, илюстриращи съответните алгоритми.

8.1. Преходни процеси в линейни електрически вериги - общи положения. Класически метод за изследване на преходни процеси

Преходен процес се нарича процесът, който възниква в електрическите вериги при преминаването им от един установен режим в друг. Както е разгледано в предните раздели, установените режими в електрическите вериги са три типа: постояннотокови, синусоидални и периодични несинусоидални. Тук следва да се добави установен режим, който се получава в резултат на изчерпване на енергийния запас на веригата и при който напреженията и токовете добиват нулеви стойности.

Причината за възникване на преходни процеси в електрически вериги е несъответствието на енергийното им състояние при новия установен режим и на енергийното им състояние при предишния установен режим. Енергийното състояние на веригата се определя от енергийния запас в полетата ѝ, т.е. в електрическото поле на кондензаторите ѝ и в магнитното поле на бобините ѝ. При зададени капацитети на кондензаторите и индуктивности на бобините този запас от своя страна се определя от напреженията u_C върху кондензаторите и токовете i_L през бобините.

Преходните процеси в електрическите вериги възникват в резултат на изменения в тях. Тези изменения носят общото название комутации. Комутациите имат разнообразен характер, включване или изключване на веригата, прекъсвания, къси съединения и др. При разглеждането на преходните процеси комутациите се идеализират като се приема, че те се извършват мигновено, т.е. за време $\Delta t = 0$. Такава идеализация се прави, тъй като при анализа на преходните процеси интерес представлява не самата комутация, а започващият след нея нов установен режим във веригата. В действителност, комутацията се извършва за някакво, макар и малко, но различно от нула време. Приема се още моментът преди началото на комутацията да се означава с $t = 0_-$, а моментът на завършване на комутацията с $t = 0_+$. Въпреки идеализацията, че комутацията се извършва мигновено, то енергийното състояние на веригата не може да се измени мигновено. Допускането за такова изменение води до противоречие с принципа за съхранение на енергията. И действително, приемането, че при комутация енергийното състояние на веригата се изменя със скок, би означавало скокообразно изменение напреженията u_C върху кондензаторите и на токовете i_L през бобините. Последното от своя страна означава, че за безкрайно малко време през кондензаторите преминават безкрайно големи токове, а върху бобините възникват безкрайно големи напрежения, т.е. до поява на безкрайно големи мощности p . При такова допускане за изменението на енергията ΔW се достига до неопределеност, т.е. $\Delta W = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} p \Delta t = \infty \cdot 0$.

В природата обаче, не съществуват източници, които биха осигурили безкрайно големи токове или напрежения, т.е. безкрайно големи мощности. Ето защо за изменението ΔW на енергията при комутация се приема, че $\Delta W = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} p \Delta t \rightarrow 0$. Оттук като се имат предвид изразите за енергията на

електрическото поле на кондензатор $W_E = 0,5Cu_C^2$ и за енергия на магнитното поле на бобината $W_M = 0,5Li_L^2$ (вж. раздел I) следва, че напреженията u_C върху кондензаторите и токовете i_L през бобините през време на комутацията остават неизменни, т.е.:

$$u_C(0_-) = u_C(0_+) \text{ и } i_L(0_-) = i_L(0_+). \quad (8.1.1)$$

Равенства (8.1.1) носят названието закони на комутация и са валидни при така наречената коректна постановка или още коректна комутация.

Ако електрическите вериги се идеализират, т.е. се приеме, че те са съставени от идеални източници и идеални пасивни елементи, то при разглеждането на преходните процеси в такива вериги възникват случаи на некоректна постановка (комутация). Типични примери на некоректна постановка са следните: образуване на капацитивни контури (те са съставени само от кондензатори и идеални източници на напрежение), образуване на индуктивни сечения (към разглеждания възел са включени само индуктивни клонове и идеални източници на ток), паралелно включване на кондензатори с различни начални напрежения $u_C(0_-)$ и последователно включване на индуктивни клонове с различни начални токове $i_L(0_-)$. В такива случаи се допуска скокообразно изменение на напреженията u_C върху кондензаторите и токовете i_L през бобините. За законите на комутация се записват равенствата:

$$q_C(0_-) = q_C(0_+) \text{ и } \Psi_L(0_-) = \Psi_L(0_+). \quad (8.1.2)$$

В равенство (8.1.2) с q_C е означен зарядът, а с Ψ_L - пълният магнитен поток. При това първото равенство се отнася за възел на електрическа верига, а второто равенство - за затворен контур на веригата.

При анализа на установения синусоиден режим в последователна R, L, C верига е показано (вж. раздел IV), че процесът във веригата се описва от нееднородно линейно диференциално уравнение от втори ред. Общото решение $i(t)$ на уравнението се представя като сума от две съставки $i'(t)$ и $i''(t)$, т.е.:

$$i(t) = i'(t) + i''(t). \quad (8.1.3)$$

От математическа гледна точка съставката $i'(t)$ представлява частно решение на нееднородното диференциално уравнение на веригата, а съставката $i''(t)$ - общото решение на нееднородното й диференциално уравнение. Видът на съставката $i'(t)$ се определя от вида и параметрите на елементите на веригата и на източниците, а видът на съставката $i''(t)$ - от вида и параметрите на елементите на веригата.

От физическа гледна точка съставката $i''(t)$ се дължи на разликата в енергийното състояние на веригата между новия и предишния установени режими и тя съществува докато трае преходния процес, т.е. $i''(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$. В такъв случай $i(t) \rightarrow i'(t)$ при $t \rightarrow \infty$. Ето защо съставката $i''(t)$ се нарича преходна или свободна, а съставката $i'(t)$ - установена.

Както бе споменато по-горе, за изследване на преходните процеси в линейни електрически вериги са приложими следните методи: класически, операторен, честотен, чрез преходни и импулсни характеристики и с променливи на състоянието. По-долу се дава алгоритъмът на класическия метод. Този алгоритъм се прилага в следния ред:

1. По законите на Кирхоф или по методите за пресмятане на сложни вериги се записва нееднородната система уравнения на веригата за след комутационната й схема.

2. Чрез изключване на отделните променливи се достига до диференциално уравнение на търсената величина.

Ако тази величина е ток, например, i_k , уравнението в общия случай е от вида:

$$a_n \frac{d^n i_k}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} i_k}{dt^{n-1}} + a_1 \frac{di_k}{dt} + a_0 i_k = f_k(t). \quad (8.1.4)$$

Редът n на уравнение (8.1.4) се определя от вида на веригата и характера на елементите ѝ. В случай на един реактивен елемент редът е първи; при два различни реактивни елемента редът е втори; при два еднотипни реактивни елемента (кондензатори или бобини) редът може да бъде първи или втори, в зависимост от това как те са свързани във веригата и т.н.

Уравнение (8.1.4) може да бъде съкратено записано по следния начин:

$$\sum_{s=0}^n a_s \frac{d^s i_k}{dt^s} = f_k(t). \quad (8.1.5)$$

Общото решение $i_k(t)$ на уравнение (8.1.5) е от вида:

$$i_k(t) = i_k'(t) + i_k''(t). \quad (8.1.6)$$

Както бе споменато по-горе, съставката $i_k'(t)$ е частното решение на уравнение (8.1.5). Определянето на тази съставка е разгледано в предните раздели. Тук следва да се спомене само това, че свободният член $f_k(t)$ на уравнение (8.1.5) дава информация за източниците, действащи във веригата, при новия установен режим.

По отношение на съставката $i_k''(t)$, то тя е общото решение на еднородното диференциално уравнение, т.е.:

$$\sum_{s=0}^n a_s \frac{d^s i_k''}{dt^s} = 0. \quad (8.1.7)$$

3. Записва се характеристичното уравнение на веригата за след комутационната схема.

Това уравнение има вида :

$$a_n \alpha^n + a_{n-1} \alpha^{n-1} + a_1 \alpha + a_0 = \sum_{s=0}^n a_s \alpha^s = 0. \quad (8.1.8)$$

До характеристичното уравнение (8.1.8) може да се достигне и без записване на диференциалното уравнение (8.1.5). За целта могат да бъдат използвани следните два подхода:

1) Съставя се детерминантата от коефициентите пред неизвестните на нееднородната система уравнения на веригата за след комутационната ѝ схема като предварително операцията диференциране се заменя с умножение по α , а операцията интегриране с деление на α и тази детерминанта се приравнява на нула.

В случай, че системата уравнения е съставена по метода с контурните токове се записва:

$$\Delta^{(K)} = \det \underline{Z}^{(K)}(\alpha) = 0, \quad (8.1.9)$$

където $\underline{Z}^{(K)}(\alpha)$ е матрицата на контурните съпротивления.

Ако системата е съставена по метода с възлови потенциали, се записва

$$\Delta^{(B)} = \det \underline{Y}^{(B)}(\alpha) = 0, \quad (8.1.10)$$

където $\underline{Y}^{(B)}(\alpha)$ е матрицата на възловите потенциали.

2) Записва се входното съпротивление $Z_{BX}(\alpha)$ на веригата (след като тя предварително се замени с пасивна верига, т.е. с верига, в която източниците на ЕДН са дадени на късо, а източниците на ток са изключени, като са запазени вътрешните им съпротивления, респективно проводимости) за след комутационната ѝ схема спрямо два нейни извода, които се получават след разкъсване на кой да е клон на схемата. При това съпротивлението на бобините се приема равно на αL , а на кондензаторите $-1/\alpha C$. Съпротивлението $Z_{BX}(\alpha)$ се приравнява на нула, т.е.:

$$Z_{BX}(\alpha) = 0. \quad (8.1.11)$$

До характеристичното уравнение може да се достигне и чрез записване на входната проводимост $Y_{BX}(\alpha)$ на веригата за след комутационната ѝ схема спрямо произволна нейна двойка възли. При това проводимостта на бобините се приема равна на $1/\alpha L$, а на кондензаторите $-\alpha C$. Проводимостта $Y_{BX}(\alpha)$ се приравнява на нула, т.е.:

$$Y_{BX}(\alpha) = 0. \quad (8.1.12)$$

Може да се докаже, че уравнения (8.1.9) и (8.1.11), съответно (8.1.10) и (8.1.12) са еквивалентни. Може да се докаже също, че ако в схемата отсъствуват късо съединени клонове, уравнения (8.1.11) и (8.1.12), съставени за различни клонове или двойки възли, имат едни и същи корени.

В случай, че характеристичното уравнение се получава въз основа на уравнение (8.1.11), трябва да се има предвид следното:

а) ако във веригата има само един източник на напрежение, то е целесъобразно $Z_{BX}(\alpha)$ да се разглежда спрямо клон с този източник;

б) ако във веригата има клон с източник на ток, то $Z_{BX}(\alpha)$ трябва да се разглежда спрямо кой да е друг клон, като предварително клонът с източника на ток се разкъсва.

4. Определят се корените $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ на характеристичното уравнение.

В случай, че тези корени са еднократни, то за съставката $i_k''(t)$ се записва:

$$i_k''(t) = A_{K1}e^{\alpha_1 t} + A_{K2}e^{\alpha_2 t} + \dots + A_{Kn}e^{\alpha_n t} = \sum_{s=1}^n A_{Ks}e^{\alpha_s t}, \quad (8.1.13)$$

където A_{Ks} са интеграционните константи.

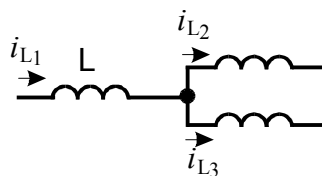
Оттук за тока $i_k(t)$ се достига до израза:

$$i_k(t) = i_k'(t) + \sum_{s=1}^n A_{Ks}e^{\alpha_s t}. \quad (8.1.14)$$

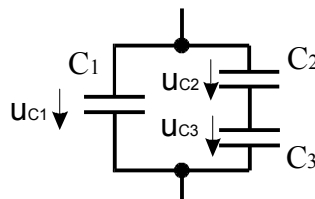
В случай, че разглежданата верига е от първи ред, то за корена α на характеристичното ѝ уравнение се записва:

$$\alpha = 1/\tau. \quad (8.1.15)$$

В последното уравнение величината τ , както ще бъде разгледано по-нататък, се нарича времеконстанта на веригата. При верига с бобина $\tau = L/R_e$, а при верига с кондензатор $\tau = R_e C$ (величината R_e е входното съпротивление на пасивната верига спрямо реактивния елемент).



Фиг. 8.1.1



Фиг. 8.1.2

5. Определят се интеграционните константи.

За целта се пресмятат два установени режима на веригата: преди и след комутация. От установения режим след комутация се намира установената съставка на търсената величина (за разглеждания случай това е токът $i'_k(t)$), а от установения режим преди комутация - така наречените начални условия. Под начални условия се разбират стойностите на напреженията u_C върху кондензаторите и токовете i_L през бобините за момента $t = 0_-$, т.е. $u_C(0_-)$ и $i_L(0_-)$. В случай, че тези стойности са нулеви, т.е. $u_C(0_-) = 0$ и $i_L(0_-) = 0$, то се казва, че началните условия са нулеви.

Тук следва да се има предвид следното: Докато енергийното състояние на веригата преди комутация се определя от стойностите на напреженията върху всички кондензатори и на токовете през всички бобини, то за намирането на интеграционните константи е достатъчно да се знаят само част от тях. Това може да се илюстрира чрез схемите от фиг.8.1.1 и фиг.8.1.2. От схемата на фиг. 8.1.1 може да се установи, че от трите тока през бобини два са независими - третият ток може да бъде определен чрез първия закон на Кирхоф. Аналогично заключение може да се направи и за схемата от фиг. 8.1.2. От тази схема може да се установи, че от трите напрежения върху кондензатори две са независими - третото напрежение може да бъде определено по втория закон на Кирхоф.

Като се използват началните условия, законите на комутация $u_C(0_-) = u_C(0_+)$ и $i_L(0_-) = i_L(0_+)$ и нееднородната система уравнения на веригата за следкомутационната ѝ схема се определят началните стойности на тока i_k и на производните му до $(n-1)$ включително за момента $t = 0_+$. Записва се система уравнения:

$$\left| \begin{aligned} i_k(t) &= i'_k(t) + \sum_{s=1}^n A_{ks} e^{\alpha_s t}; \\ \frac{d^m i_k}{dt^m} &= \frac{d^m i'_k}{dt^m} + \sum_{s=1}^n \alpha_s^m A_{ks} e^{\alpha_s t}. \\ m &= 1, 2, 3, \dots, (n-1) \end{aligned} \right. \quad (8.1.16)$$

Вляво на системата (8.1.16) се заместват намерените стойности на тока i_k и на производните му до $(n-1)$ -та включително, за момента $t = 0_+$, а вдясно се полага $t = 0$. Така се получава система от n алгебрични уравнения относно интеграционните константи A_{ks} .

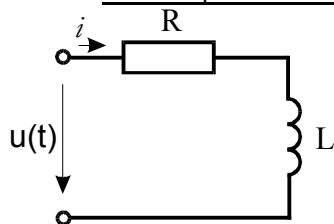
Прието е началните условия на напреженията u_C върху кондензаторите и токовете i_L през бобините да се наричат независими. И действително, при коректна постановка началните условия на напреженията u_C и токовете i_L не зависят от структурата на веригата, получена след комутация. Всички останали начални условия, използвани при изследването на преходния процес, са зависими. Както се спомена по-горе, те се намират чрез решаване на нееднородната система уравнения на веригата за следкомутационната ѝ схема и се изразяват чрез независимите начални условия, началните стойности на напреженията и токовете на източниците и параметрите на веригата.

В заключение по отношение на класическия метод за изследване на преходни процеси следва да се отбележи, че той отразява явленията от към физичната им страна, което може да се разглежда като предимство на метода. От друга страна, обаче, използването му, особено при вериги от по-висок ред, е свързано с редица трудности, например, с определянето на интеграционните константи. Ето защо

класическият метод намира приложение главно при изследване на преходните процеси във вериги първи и втори ред.

8.2. Преходен процес в последователна R, L верига

1. Общи положения



Фиг. 8.2.1

Схемата на последователната R, L верига е показана на фиг. 8.2.1. Процесът във веригата се описва от следното диференциално уравнение:

$$L \frac{di}{dt} + Ri = u(t). \quad (8.2.1)$$

Общото решение на уравнение (8.2.1) е от вида:

$$i(t) = i'(t) + i''(t). \quad (8.2.2)$$

За намиране на съставката $i'' = i''(t)$ се записва еднородното диференциално уравнение:

$$L \frac{di''}{dt} + Ri'' = 0. \quad (8.2.3)$$

Съответното характеристично уравнение е:

$$L\alpha + R = 0, \quad (8.2.4)$$

откъдето за корена му α се получава:

$$\alpha = -R/L. \quad (8.2.5)$$

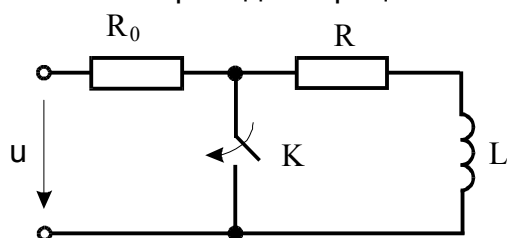
За общото решение на уравнение (8.2.1) се записва:

$$i = i' + Ae^{-\frac{R}{L}t}. \quad (8.2.6)$$

Интегрираната константа A се определя от началните стойности на тока $i(0) = i(0+)$ и на установената му съставка $i'(0+)$, като стойността на константата A зависи от конкретната верига и конкретния преходен процес. По-долу се разглеждат характерни случаи на преходен процес в последователна R, L верига.

2. Късо съединение в последователна R, L верига

Този преходен процес възниква във веригата, чиято схема е показана на



Фиг. 8.2.2

фиг.8.2.2. Резисторът R_0 няма директно отношение към процеса и предпазва източника от режим на късо съединение.

Тъй като за разглеждания преходен процес напрежението $u(t) = 0$, то за установената съставка i' на тока се записва също $i' = 0$. В такъв случай токът i ще бъде:

$$i = i'' = Ae^{-\frac{R}{L}t}. \quad (8.2.7)$$

Токът преди комутация $i(0-)$ се означава с I, т.е. $i(0-) = I$.

Ако напрежението $u(t)$ е постоянно, т.е. $u(t) = U$, то за тока I се записва:

$$I = U/(R_0 + R).$$

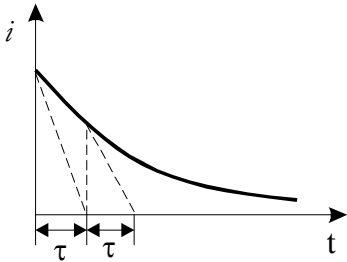
За интеграционната константа A се получава: $i(0-) = i(0+) = I = A$ и за тока i се достига до израза:

$$i = Ie^{-\frac{R}{L}t} = Ie^{-\frac{t}{\tau}} \quad (8.2.8)$$

В последния израз величината $\tau = L/R$ се нарича времеконстанта на веригата. За време $t = \tau$ токът i се изменя (в случая намалява) е ($e = 2,718$ е неперовото число) пъти (фиг.8.2.3.). Времеконстантата τ се определя чрез дължината на проекцията на допирателната към кривата $i = i(t)$ върху оста, към която клони токът (за случая

абсцисната ос). По отношение на енергията, която се изразходва в резистора R през време на преходния процес, се записва:

$$W_R = \int_0^{\infty} p_R dt = \int_0^{\infty} R i^2 dt = R I^2 \int_0^{\infty} e^{-\frac{2R}{L}t} dt = \frac{1}{2} L I^2 = W_M. \quad (8.2.9)$$



Фиг. 8.2.3

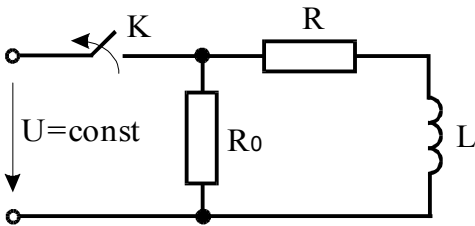
Полученият резултат показва, че запасената в магнитното поле на бобината енергия W_M се изразходва през време на преходния процес в резистора R във вид на топлина.

3. Изключване на последователна R, L верига

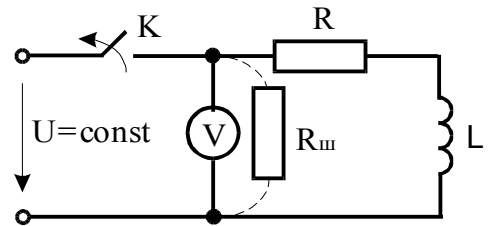
Преходният процес възниква във веригата, чиято схема е дадена на фиг.8.2.4. Тъй като за разглеждания преходен процес напрежението $u(t) = 0$, то и в този случай за установената съставка i' се получава: $i' = 0$. За тока i се записва изразът:

$$i = i'' = A e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (8.2.10)$$

където $\tau = L/(R_0 + R)$ е времеконстантата на веригата.



Фиг. 8.2.4.



Фиг. 8.2.5.

Началното условие за тока i е $i(0-) = U/R$. Оттук за интеграционната константа A се получава: $i(0-) = i(0+) = U/R = A$ и за тока i се достига до изрза :

$$i = \frac{U}{R} e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (8.2.11)$$

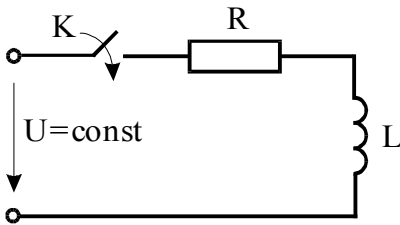
За разглеждания преходен процес интерес представлява напрежението u_{R_0} върху резистора R_0 . За момента преди комутация $t = 0-$ се записва: $u_{R_0}(0-) = U$, а за момента след комутация $t = 0+$ се установява, че: $u_{R_0}(0+) = R_0 i(0+) = U \frac{R_0}{R}$. В случай, че е в сила неравенството: $R_0 \gg R$, то върху резистора R_0 възниква пренапрежение.

Ако ролята на резистора R_0 се изпълнява от волтметър (фиг.8.2.5), то при значителна енергия W_M , запасена в магнитното поле на бобината, волтметърът може да бъде повреден. Ето защо преди изключване на веригата е необходимо волтметърът да бъде предварително шунтиран с резистор $R_{ш}$ с малко съпротивление.

4. Включване на последователна R, L верига към постоянно напрежение

Такъв преходен процес възниква във веригата, чиято схема е показана на фиг.8.2.6. За установената съставка i' на тока за разглеждания случай се получава: $i' = U/R$. За тока i се записва изразът:

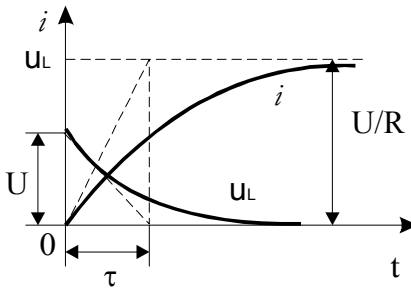
$$i = i' + i'' = \frac{U}{R} + A e^{-\frac{R}{L}t}. \quad (8.2.12)$$



Фиг. 8.2.6.

За напрежението u_L върху бобината се записва:

$$u_L = L \frac{di}{dt} = U e^{-\frac{t}{\tau}}. \quad (8.2.14)$$



Фиг. 8.2.7.

Зависимостите $i = i(t)$ и $u_L = u_L(t)$ са показани на фиг.8.2.7. От кривите на фигурата може да се констатира, че докато токът i при комутацията остава неизменен, т.е.: $i(0-) = i(0+) = 0$, то напрежението u_L се изменя със скок от $u_L(0-) = 0$ до $u_L(0+) = U$. Този резултат показва, че в началния момент след комутацията напрежението U на източника е приложено върху бобината, т.е. за разглеждания момент бобината представлява отворен участък на веригата.

5. Включване на последователна R, L верига към синусоидално напрежение

Приема се, че напрежението $u = u(t)$ е от вида $u = U_m \sin(\omega t + \psi - \varphi)$. В такъв случай за тока i' на установения режим се получава:

$$i' = \frac{U_m}{Z} \sin(\omega t + \psi + \varphi) = I_m \sin(\omega t + \psi + \varphi), \quad (8.2.15)$$

където $Z = \sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}$ е пълното съпротивление на веригата, а $\varphi = \arctg \frac{\omega L}{R}$ -

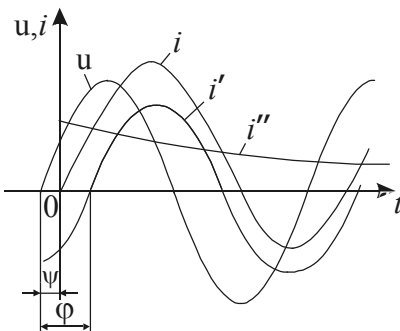
фазовата разлика между напрежението $u(t)$ и тока $i'(t)$.

За тока i на преходния процес се записва:

$$i = i' + i'' = I_m \sin(\omega t + \psi - \varphi) + A e^{-\frac{t}{\tau}}. \quad (8.2.16)$$

При определянето на интеграционната константа A се приема нулево начално условие за тока, т.е.: $i(0-) = 0$. Тогава за константата A се получава: $i(0-) = i(0+) = 0 = I_m \sin(\psi - \varphi) + A$ или $A = -I_m \sin(\psi - \varphi)$. За тока i се достига до израза:

$$i = i' + i'' = I_m \sin(\omega t + \psi - \varphi) - I_m \sin(\psi - \varphi) e^{-\frac{t}{\tau}}.$$



Фиг. 8.2.8.

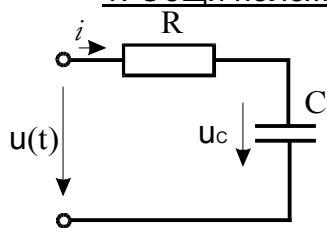
За разглеждания случай интензивността на преходния процес зависи от момента на включване на веригата към напрежението $u = u(t)$. И действително, началната стойност на свободната съставка $i''(0+)$ на тока зависи от началната фаза ψ на напрежението $u(t)$. Тази съставка получава най-голяма начална стойност $i''(0+) = I_m$ при $\psi - \varphi = \pm \pi/2$. За този случай от кривите на фиг.8.2.8 може да се установи, че максималната стойност на тока i при преходния процес не превишава удвоената амплитуда $2I_m$ на установената си съставка

i' .

При условието $\psi = \varphi$ свободната съставка i' на тока отсъства. В този случай във веригата преходен процес въобще не възниква и установеният режим настъпва веднага.

8.3. Преходен процес в последователна R, C верига

1. Общи положения.



Фиг. 8.3.1

Схемата на последователната R, C верига е показана на фиг.8.3.1. Процесът във веригата се описва с уравнението:
 $Ri + u_C = u(t)$.

При анализа на уравнение (8.3.1) е удобно токът i да се изрази чрез напрежението u_C върху кондензатора. Това е свързано с обстоятелството, че напрежението u_C при комутация остава неизменно. Като се отчита връзката между заряда q и напрежението u_C , т.е. $q = C u_C$, за тока i се записва:

$$i = \frac{dq}{dt} = C \frac{du_C}{dt}. \quad (8.3.2)$$

В такъв случай уравнение (8.3.1) добива вида :

$$RC \frac{du_C}{dt} + u_C = u. \quad (8.3.3)$$

Общото решение на уравнение (8.3.3) е:

$$u_C(t) = u'_C(t) + u''_C(t). \quad (8.3.4)$$

За определяне на съставката $u''_C = u''_C(t)$ се разглежда еднородното диференциално уравнение:

$$RC \frac{du''_C}{dt} + u''_C = 0. \quad (8.3.5)$$

Съответното характеристично уравнение е :

$$RC\alpha + 1 = 0, \quad (8.3.6)$$

откъдето за корена му α се получава:

$$\alpha = -\frac{1}{RC}. \quad (8.3.7)$$

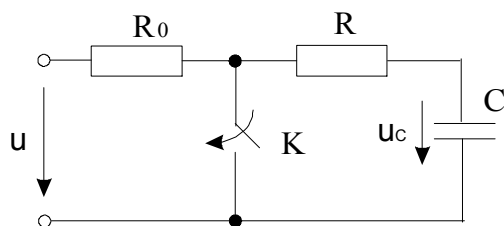
За общото решение на уравнение (8.3.3) се записва:

$$u_C = u'_C + u''_C = u'_C + Ae^{-\frac{t}{RC}}. \quad (8.3.8)$$

Интеграционната константа A се определя от началните стойности на напрежението $u_C(0-) = u_C(0+)$ и на установената му съставка $u'_C(0+)$, като стойността на A зависи от конкретната верига и от конкретния преходен процес. По-долу се разглеждат характерни случаи на преходен процес в последователна R, C верига.

2. Късо съединение в последователна R, C верига

Преходният процес възниква във веригата, чиято схема е дадена на фиг.8.3.2. И тук, както при последователната R, L верига, резисторът R_0 няма директно отношение към процеса и предпазва източника от режим на късо съединение.



Фиг. 8.3.2

Тъй като за разглеждания преходен процес напрежението $u(t) = 0$, то за установената съставка u'_C на напрежението върху кондензатора се записва също $u'_C = 0$. Тогава напрежението u_C ще бъде:

$$u_C = u_C'' = Ae^{-\frac{t}{RC}}. \quad (8.3.9)$$

Напрежението върху кондензатора преди комутацията $u_C(0-)$ се означава с U_0 , т.е. $u_C(0-) = U_0$. В случай, че напрежението $u(t)$ е постоянно, т.е. $u(t) = U$, то за напрежението U_0 се записва $U_0 = U$.

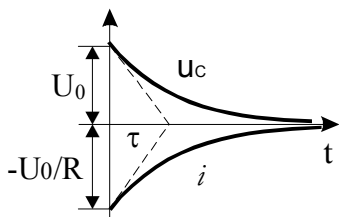
За интеграционната константа A се получава $u_C(0-) = u_C(0+) = U_0 = A$ и за напрежението u_C се достига до израза:

$$u_C = U_0 e^{-\frac{t}{RC}} = U_0 e^{-\frac{t}{\tau}}. \quad (8.3.10)$$

В последния израз величината $\tau = RC$, както и при последователната R, L верига, носи названието времеконстанта на веригата и има аналогичен физически смисъл.

За тока i на преходния процес се записва:

$$i = C \frac{du_C}{dt} = -\frac{U_0}{R} e^{-\frac{t}{\tau}}.$$



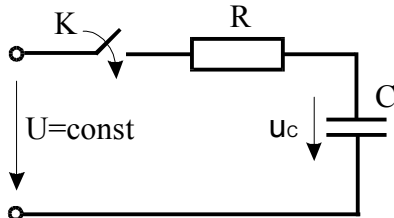
Фиг. 8.3.3

Зависимостите $u_C = u_C(t)$ и $i = i(t)$ са показани на фиг.8.3.3. От кривите на фигурата може да се установи, че докато напрежението u_C остава неизменно при комутация, то токът i се изменя със скок. Ако се приеме, че напрежението $u(t)$ е постоянно, то: $i(0-) = 0$, а $i(0+) = U/R$.

За енергията W_R , която се изразходва в резистора R през време на преходния процес, се записва:

$$W_R = \int_0^{\infty} p_R dt = \int_0^{\infty} R i^2 dt = \frac{U_0^2}{R} \int_0^{\infty} e^{-\frac{2t}{RC}} dt.$$

Полученият резултат показва, че запасената в електрическото поле на кондензатора енергия W_e се изразходва през време на преходния процес в резистора R във вид на топлина. Поради това този преходен процес носи названието разряд на кондензатор върху резистор.



Фиг. 8.3.4

3. Включване на последователна R, C верига към постоянно напрежение

Такъв преходен процес възниква във веригата, чиято схема е показана на фиг.8.3.4. За установената съставка u_C' на напрежението върху кондензатора за разглеждания случай се записва: $u_C' = U$. За

напрежението u_C се получава изразът:

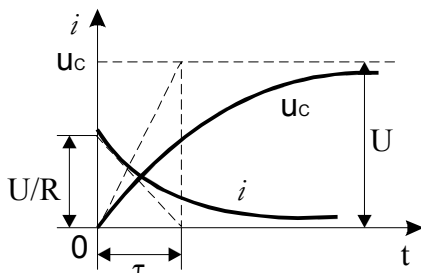
$$u_C = u_C' + u_C'' = U + Ae^{-\frac{t}{RC}}. \quad (8.3.13)$$

Ако кондензаторът не е бил предварително зареден, т.е. $u_C(0-) = 0$, то за интеграционната константа A се получава: $u_C(0) = u_C(0+) = 0 = U + A$, т.е. $A = -U$. Оттук за напрежението u_C се достига до израза:

$$u_C = U(1 - e^{-\frac{t}{RC}}) = U(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}). \quad (8.3.14)$$

За тока i се получава:

$$i = C \frac{du_C}{dt} = \frac{U}{R} e^{-\frac{t}{\tau}}. \quad (8.3.15)$$



Фиг. 8.3.5

Зависимостите $u_C = u_C(t)$ и $i = i(t)$ са показани на фиг.8.3.5. От кривите на фигурата може да се направи аналогична констатация, както от кривите на фиг.8.3.3, а именно, че докато напрежението u_C остава

неизменно при комутацията, т.е. $u_C(0-) = u_C(0+) = 0$, то токът i при комутацията се изменя със скок от $i(0-) = 0$ до $i(0+) = U/R$. Този резултат показва, че в началния момент след комутацията напрежението U на източника е приложено върху резистора R , т.е. за разглеждания момент кондензаторът представлява късо съединен участък от веригата.

За енергията W_R , която се изразходва в резистора R през време на преходния процес, се записва:

$$W_R = \int_0^{\infty} p_R dt = \int_0^{\infty} R i^2 dt = \frac{U_0^2}{R} \int_0^{\infty} e^{-\frac{2t}{RC}} dt = \frac{1}{2} C U^2 = W_e. \quad (8.3.16)$$

Този резултат показва, че енергията W_e , която се изразходва през време на преходния процес в резистора R във вид на топлина, се оказва равна на енергията W_e , която се запасява в електрическото поле на кондензатора. Това означава, че к.п.д. η на зарядния процес за разглеждания случай е $\eta = 0,5$, т.е. зареждането на кондензатор от източник на постоянно напрежение се характеризира с нисък к.п.д. η .

Ако кондензаторът е бил предварително зареден, т.е. $u_C(0-) \neq 0$, то за интеграционната константа A се получава: $u_C(0-) = u_C(0+) = U + A$, т.е. $A = u_C(0-) - U$. Тук са възможни два случая:

1. При $u_C(0-) > 0$ кондензаторът се дозарежда (приема се, че $u_C(0-) < U$);
2. При $u_C(0-) < 0$ кондензаторът се презарежда.

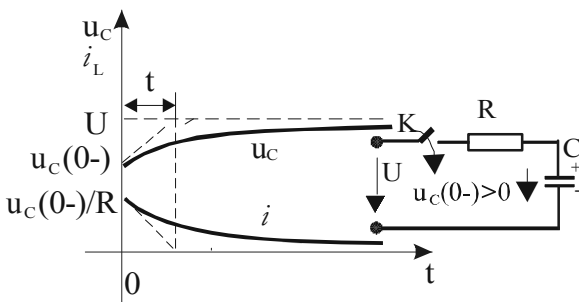
При ненулево начално условие $u_C(0-) \neq 0$, за напрежението u_C се получава:

$$u_C = U + [u_C(0-) - U] e^{-\frac{t}{RC}}. \quad (8.3.17)$$

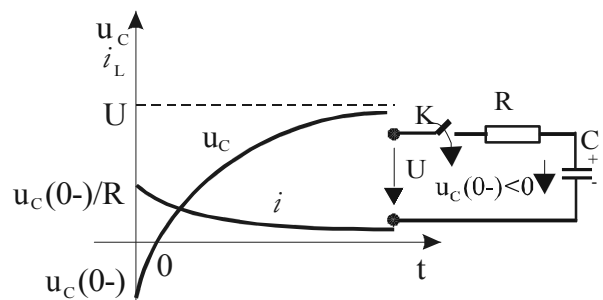
Съответният израз за тока i е:

$$i = C \frac{du_C}{dt} = \frac{U - u_C(0-)}{R} e^{-\frac{t}{RC}}. \quad (8.3.18)$$

Зависимостите $u_C = u_C(t)$ и $i = i(t)$ за дозаряден процес са показани на фиг.8.3.6, а за презаряден процес – на фиг.8.3.7.



Фиг. 8.3.6



Фиг. 8.3.7

4. Включване на последователна RC верига към синусоидално напрежение.

Приема се, че напрежението $u(t)$ е от вида: $u = U_m \sin(\omega t + \psi)$. За установените съставки на тока i и на напрежението u'_C върху кондензатора се записва:

$$i' = \frac{U_m}{Z} \sin(\omega t + \psi - \phi) = I_m \sin(\omega t + \psi - \phi); \quad (8.3.19)$$

$$u'_C = \frac{I_m}{\omega C} \sin(\omega t + \psi - \phi - \frac{\pi}{2}), \quad (8.3.20)$$

където $z = \sqrt{R^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}}$ е пълното съпротивление на веригата, а $\varphi = \operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{\omega CR}\right)$ - фазовата разлика между напрежението $u(t)$ и тока $i(t)$.

Изразът за напрежението u_C върху кондензатора през време на преходния процес е:

$$u_C = u'_C + u''_C = \frac{I_m}{\omega C} \sin(\omega t + \psi - \varphi - \frac{\pi}{2}) + A e^{-\frac{t}{\tau}}, \quad (8.3.21)$$

където $\tau = RC$ е времеконстантата на веригата.

Ако началното условие за напрежението u_C е нулево, т.е.: $u_C(0-) = 0$, за интеграционната константа A се записва: $u_C(0-) = u_C(0+) = 0 = I_m \sin(\psi - \varphi - \frac{\pi}{2}) + A$,

откъдето за константата A се получава: $A = -I_m \sin(\psi - \varphi - \frac{\pi}{2})$, а за напрежението u_C и за тока i се достига до изразите:

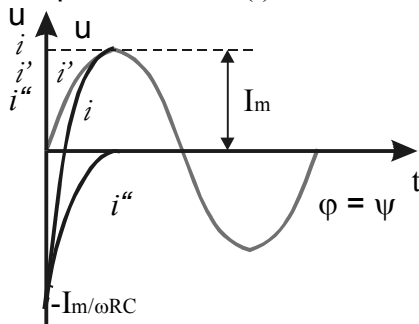
$$u_C = \frac{I_m}{\omega C} \sin\left(\omega t + \psi - \varphi - \frac{\pi}{2}\right) - I_m \sin\left(\psi - \varphi - \frac{\pi}{2}\right) e^{-\frac{t}{\tau}}; \quad (8.3.22)$$

$$i = C \frac{du_C}{dt} = I_m \sin(\omega t + \psi - \varphi) + \frac{I_m}{R\omega C} \sin\left(\psi - \varphi - \frac{\pi}{2}\right) e^{-\frac{t}{\tau}}. \quad (8.3.23)$$

В случай, че кондензаторът е бил предварително зареден, т.е.: $u_C(0-) \neq 0$, то за интеграционната константа A се записва: $u_C(0) = u_C(0+) = \frac{I_m}{\omega C} \sin(\psi - \varphi - \frac{\pi}{2}) + A$, откъдето за константата A се получава:

$$A = u_C(0-) - \frac{I_m}{\omega C} \sin\left(\psi - \varphi - \frac{\pi}{2}\right).$$

Разглеждането на преходния процес се прави при нулево начално условие за напрежението u_C , т.е.: $u_C(0-) = 0$. И тук, както при последователната R, L верига, интензивността на процеса зависи от момента на включване на веригата към напрежението $u(t)$.



Фиг. 8.3.8

При условието $\psi = \varphi \pm \frac{\pi}{2}$ началната стойност на съставката u'_C на напрежението върху кондензатора е равна на нула, т.е. $u''_C(0+) = 0$ и преходен процес не възниква, т.е. установеният режим във веригата настъпва веднага.

В случай, че $\psi = \varphi$, началната стойност на свободната съставка u''_C на напрежението върху

кондензатора е най-голяма и е равна на $\frac{I_m}{\omega C}$, т.е.: $u''_C(0+) = \frac{I_m}{\omega C}$. За съответната

съставка i'' на тока се получава: $i''(0+) = -\frac{I_m}{\omega CR}$.

Анализът на последния израз показва, че ако $\omega CR \ll 1$, то съставката i'' значително ще превишава амплитудата I_m на съставката i' . При това условие се

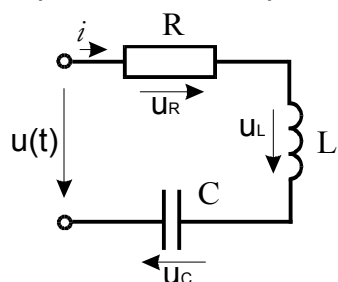
записва, $\omega CR = \frac{2\pi\tau}{T}$, което означава, че между времеконстантата на веригата τ и периода T на напрежението $u(t)$ е в сила аналогично неравенство, т.е. $\tau \ll T$. Оттук може да се заключи, че съставката i'' е много по-голяма от амплитудата I_m на

съставката i' за много малка част от периода T на напрежението $u(t)$. Зависимостите $i' = i'(t)$, $i'' = i''(t)$ и $i = i(t)$ са показани на фиг.8.3.8. По отношение на напрежението u_C върху кондензатора може да се отбележи, че при преходния процес то не превишава удвоената амплитуда $2 U_{mC}$ на установената си съставка u'_C , т.е.: $u_C < 2 U_{mC} = \frac{2I_m}{\omega C}$.

8.4. Преходен процес в последователна R, L, C верига. Разряд на кондензатор в последователна R, L верига.

1. Общи положения

Схемата на последователната R, L, C верига е показана на фиг.8.4.1. Процесът във веригата се описва с уравнението:



Фиг. 8.4.1

$$Ri + L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int_0^t i dt + u_C(0_-) = u(t). \quad (8.4.1)$$

След диференциране по t уравнение (8.4.1) добива вида:

$$L \frac{d^2 i}{dt^2} + R \frac{di}{dt} + \frac{i}{C} = \frac{du}{dt}. \quad (8.4.2)$$

Както е известно (вж. раздел IV), общото решение на последното уравнение е:

$$i(t) = i'(t) + i''(t). \quad (8.4.3)$$

За намиране на свободната съставка $i'' = i''(t)$ се записва еднородното диференциално уравнение:

$$\frac{d^2 i''}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{di''}{dt} + \frac{1}{LC} i'' = 0. \quad (8.4.4)$$

Съответното характеристично уравнение е:

$$\alpha^2 + 2\delta\alpha + \omega_0^2 = 0, \quad (8.4.5)$$

където $\delta = R/2L$ е коефициентът на затихване, а $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ - резонансната честота на веригата.

Решението на уравнение (8.4.5) е:

$$\alpha_{1,2} = -\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}}. \quad (8.4.6)$$

За общото решение на уравнение (8.4.2) се записва :

$$i = i' + i'' = i' + A_1 e^{\alpha_1 t} + A_2 e^{\alpha_2 t}. \quad (8.4.7)$$

За определяне на интеграционните константи A_1 и A_2 се пресмятат установените режими във веригата преди и след комутацията. От установения режим преди комутацията се намират началните условия, т.е. стойностите $u_C(0_-)$ на напрежението върху кондензатора и $i(0_-)$ на тока във веригата за момента $t = 0_-$, а от установения режим след комутацията – установената съставка $i'(t)$ на тока.

Като се използват началните условия $u_C(0_-)$ и $i(0_-)$ и законите на комутацията: $u_C(0) = u_C(0_+)$ и $i(0_-) = i(0_+)$, от уравнение (8.4.2) се записва:

$$Ri(0_+) + L \left(\frac{di}{dt} \right)_{t=0_+} + u_C(0_+) = u(0_+), \quad (8.4.8)$$

откъдето за началната стойност на производната на тока за момента $t = 0_+$,

т.е. за $\dot{I}_2$ се получава:

$$\left(\frac{di}{dt}\right)_{t=0+} = \frac{u(0+) - u_C(0+) - Ri(0+)}{L}. \quad (8.4.9)$$

Диференцира се израз (8.4.7):

$$\frac{di}{dt} = \frac{di'}{dt} + \alpha_1 A_1 e^{\alpha_1 t} + \alpha_2 A_2 e^{\alpha_2 t}. \quad (8.4.10)$$

Вляво на уравнения (8.4.7) и (8.4.10) се записват стойностите $i(0+)$ и съответно

$\left(\frac{di}{dt}\right)_{t=0+}$, а вдясно $t = 0$ и за определяне на интеграционните константи A_1 и A_2 се

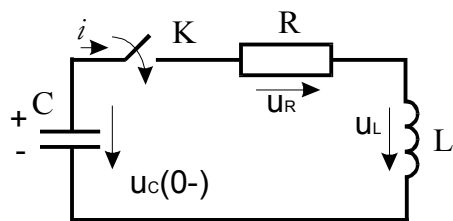
достига до следната система уравнения:

$$\begin{cases} i(0+) = i'(0+) + A_1 + A_2; \\ \left(\frac{di}{dt}\right)_{t=0+} = \frac{u(0+) - u_C(0+) - Ri(0+)}{L} = \left(\frac{di'}{dt}\right)_{t=0+} + \alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2. \end{cases} \quad (8.4.11)$$

2. Разряд на кондензатор в последователна R, L верига

Този преходен процес възниква във веригата, чиято схема е показана на фиг.8.4.2. Означава се началното напрежение $u_C(0-)$ върху кондензатора с U_0 , т.е.:

$$u_C(0-) = U_0.$$



Фиг. 8.4.2

Тъй като за разглеждания преходен процес напрежението $u(t) = 0$, то установената съставка i' на тока отсъства, т.е. $i' = 0$ и $\frac{di'}{dt} = 0$. Тогава за тока

i се записва:

$$i = i'' = A_1 e^{\alpha_1 t} + A_2 e^{\alpha_2 t} \quad (8.4.12).$$

За намиране на интеграционните константи A_1 и A_2 се използва система (8.4.11), като се отчита, че $i(0+) = 0$, $i'(0+) = 0$; $u(0+) = 0$ и

$$\left(\frac{di'}{dt}\right)_{t=0+} = 0, \text{ т.е.:}$$

$$\begin{cases} 0 = A_1 + A_2; \\ \left(\frac{di}{dt}\right)_{t=0+} = \alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2. \end{cases} \quad (8.4.12)$$

От система (8.4.12) се получава:

$$A_1 = -A_2 = A = -\frac{U_0}{L(\alpha_1 - \alpha_2)}. \quad (8.4.13)$$

За тока i се записва:

$$i = -\frac{U_0}{L(\alpha_1 - \alpha_2)} (e^{\alpha_1 t} - e^{\alpha_2 t}). \quad (8.4.14)$$

Съответните изрази за напрежението u_L върху бобината и за напрежението u_C върху кондензатора са:

$$u_L = L \frac{di}{dt} = -\frac{U_0}{\alpha_1 - \alpha_2} (\alpha_1 e^{\alpha_1 t} - \alpha_2 e^{\alpha_2 t}); \quad (8.4.15)$$

$$u_C = \frac{1}{C} \int_0^t i dt + U_0 = -\frac{U_0}{\alpha_1 - \alpha_2} (\alpha_2 e^{\alpha_1 t} - \alpha_1 e^{\alpha_2 t}). \quad (8.4.16)$$

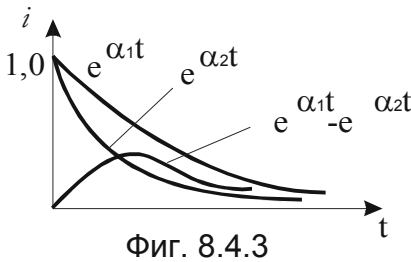
При извеждането на израз (8.4.16) се отчита съотношението: $\alpha_1 \alpha_2 = \omega_0^2 = 1/LC$.

Характерът на разрядния процес във веригата зависи от вида на корените α_1 и α_2 на характеристичното уравнение. Във връзка с това са възможни три случая:

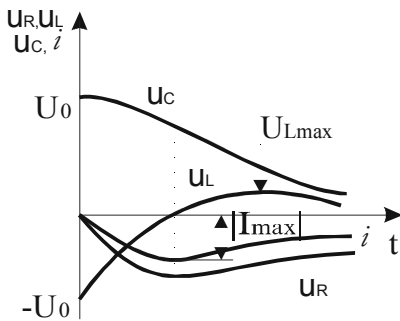
1. Корените α_1 и α_2 са реални и различни

Този случай се получава, ако е в сила условието: $\delta > \omega_0$, т.е. при $R/2L > 1/\sqrt{LC}$, откъдето се достига до неравенството: $R > 2\sqrt{L/C} = 2\rho$ (ρ е характеристичното (вълновото) съпротивление на веригата).

Видът на зависимостта $i = i(t)$ се определя от израза: $(e^{\alpha_1 t} - e^{\alpha_2 t})$. Като се има предвид, че корените α_1 и α_2 са отрицателни, т.е. $\alpha_1 < 0$ и $\alpha_2 < 0$ и освен това, че $| \alpha_2 | > | \alpha_1 |$, то през целия преходен процес изразът $(e^{\alpha_1 t} - e^{\alpha_2 t}) > 0$ (фиг.8.4.3).



Фиг. 8.4.3



Фиг. 8.4.4

Ако се приеме, че напрежението $u_C(0-) = U_0 > 0$ и се отчете знака “-“ в израз (8.4.14), то се получава, че през целия преходен процес токът i ще бъде отрицателен, т.е.: $i < 0$. Условните положителни насоки на тока i и на напреженията u_R , u_L и u_C върху елементите на веригата са дадени на схемата от фиг.8.4.1.

За разглеждания случай се получава, че $i < 0$ и $u_C > 0$, което означава, че през време на преходния процес кондензаторът непрекъснато се разрежда. Такъв едностранен разряд се нарича апериодичен.

Зависимостите $i = i(t)$, $u_R = u_R(t)$, $u_C = u_C(t)$ и $u_L = u_L(t)$ са показани на фиг.8.4.4. При построяването на кривите на отделните напрежения се отчитат

връзките им с тока, а именно: $u_R = Ri$, $u_C = \frac{1}{C} \int_0^t i dt + U_0$

и $u_L = L \frac{di}{dt}$. Освен това трябва да се има предвид и уравнението: $u_C = -(u_R + u_L)$.

Моментът t_m , в който токът i получава минимум (максимална абсолютна стойност) се определя от условието: $\frac{di}{dt} = \frac{u_L}{L} = 0$, т.е. $(\alpha_1 e^{\alpha_1 t_m} - \alpha_2 e^{\alpha_2 t_m}) = 0$. Оттук за момента t_m се записва: $t_m = [\ln(\alpha_1/\alpha_2)]/(\alpha_1 - \alpha_2)$. Тук следва да се отбележи, че при $t = t_m$, кривата $u_C = u_C(t)$ има инфлексна точка.

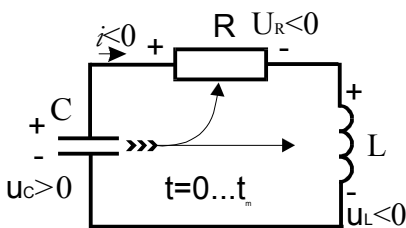
Ако кривите $i = i(t)$ на тока и $u_C = u_C(t)$ на напрежението върху кондензатора при апериодичен разряд се сравнят със съответните криви при разряд на кондензатор върху резистор (вж. фиг.8.3.3 и фиг.8.4.4), може да се установи следното:

1. Токът i при апериодичен разряд при комутацията не се изменя със скок и в интервала $t = 0 \dots t_m$ нараства плавно по абсолютна стойност;

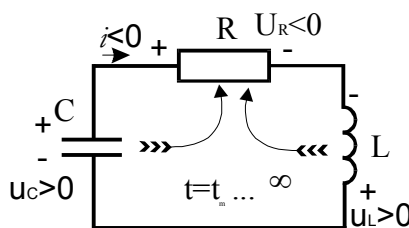
2. Напрежението u_C при апериодичен разряд в интервала $t = 0 \dots t_m$ се характеризира с по-малка скорост на намаляване в сравнение със случая на разряд

на кондензатор върху резистор.

При апериодичен разряд интерес представлява разглеждането на процеса и от енергийна гледна точка. Процесът за интервала $t = 0 \dots t_m$ е илюстриран на схемата от фиг.8.4.5., а за



Фиг.8.4.5



Фиг.8.4.6

интервала $t = t_m \dots \infty$ - на схемата от фиг.8.4.6.

В момента $t = 0+$ токът е $i(0+) = 0$ и цялото напрежение u_C е приложено върху бобината. С нарастването на тока по абсолютната стойност, напрежението u_L намалява по абсолютната стойност, а напрежението u_R нараства. В момента $t = t_m$ цялото напрежение u_C е приложено върху резистора. За разглеждания интервал от време $t = 0 \dots t_m$ мощностите върху отделните елементи на веригата са: $p_C = u_C i < 0$; $p_L = u_L i > 0$ и $p_R = u_R i = Ri^2 > 0$, което означава, че кондензаторът отдава енергия, както на бобината, така и на резистора.

При $t > t_m$ токът i не може повече да нараства по абсолютна стойност и след момента $t = t_m$ той започва да намалява, тъй като кондензаторът продължава да се разрежда. За интервала от време $t = t_m \dots \infty$ мощностите върху отделните елементи на веригата са: $p_C = u_C i < 0$, $p_L = u_L i < 0$ и $p_R = u_R i = Ri^2 > 0$. Това показва, че за този интервал от време кондензаторът и бобината отдават енергия на резистора. Процесът продължава до изчерпването на енергийните запаси в полетата им.

2. Корените α_1 и α_2 са реални и равни

Този случай се получава при условие, че: $\delta = \omega_0$, т.е. при $R/2L = 1/\sqrt{LC}$, откъдето се достига до равенството: $R = 2\sqrt{L/C} = 2\rho$. За корените α_1 и α_2 се записва: $\alpha_1 = \alpha_2 = -\delta$. При условието $\alpha_1 = \alpha_2$ в израз (8.4.14) за тока i се получава неопределеност от вида $0/0$. Разкрива се тази неопределеност по правилото на Лопитал и при $\alpha_1 \rightarrow \alpha_2 = -\delta$ се записва:

$$i = -\frac{U_0}{L} \lim_{\alpha_1 \rightarrow \alpha_2 = -\delta} \frac{e^{\alpha_1 t} - e^{\alpha_2 t}}{\alpha_1 - \alpha_2} = -\frac{U_0}{L} t e^{\alpha_2 t} = -\frac{U_0}{L} t e^{-\delta t}. \quad (8.4.17)$$

Съответните изрази за напрежението u_L върху бобината и за напрежението u_C върху кондензатора са:

$$u_L = L \frac{di}{dt} = U_0(\delta t - 1)e^{-\delta t}; \quad (8.4.18)$$

$$u_C = \frac{1}{C} \int_0^t i dt + U_0 = U_0(\delta t + 1)e^{-\delta t}. \quad (8.4.19)$$

Характерът на процеса е апериодичен, както при реални и различни корени, т.е. също е апериодичен. За момента от време t_m , при който токът достига максимална абсолютна стойност, се получава $t_m = 1/\delta$.

Прието е в този случай процесът да се нарича критичен апериодичен, а съпротивлението $R_{кр} = 2\sqrt{L/C} = 2\rho$ - критично съпротивление. Характерно за критичния апериодичен процес е това, че преходният процес затихва най-бързо.

3. Корените α_1 и α_2 са комплексни

Този случай се получава при условието: $\delta < \omega_0$, т.е.: при $R/2L < 1/\sqrt{LC}$, откъдето се достига до неравенството: $R < 2\sqrt{L/C} = 2\rho = R_{кр}$.

Във връзка с определянето на изразите за тока i и напреженията u_L и u_C се въвежда означението:

$$\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} = \omega'. \quad (8.4.20)$$

За корените α_1 и α_2 на характеристичното уравнение се записва:

$$\alpha_1 = -\delta + \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2} = -\delta + j\omega' = \omega_0 e^{j\theta}; \quad (8.4.21)$$

$$\alpha_2 = -\delta - \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2} = -\delta - j\omega' = \omega_0 e^{-j\theta}. \quad (8.4.22)$$

Ъгълът θ се определя от израза: $\theta = \arctg\left[\frac{\omega'}{(-\delta)}\right]$ и е в диапазона $\theta = \frac{\pi}{2} \dots \pi$. И

действително, $\sin \theta = \frac{\omega'}{\omega_0} > 0$, а $\cos \theta = \frac{-\delta}{\omega_0} < 0$. За тока i се получава изразът:

$$i = -\frac{U_0}{2j\omega'L} (e^{-\delta t} e^{j\omega't} - e^{-\delta t} e^{-j\omega't}) = -\frac{U_0}{\omega'L} e^{-\delta t} \sin \omega't = -I e^{-\delta t} \sin \omega't. \quad (8.4.23)$$

За напреженията u_L и u_C се записва:

$$u_L = -\frac{U_0}{2j\omega'} (\omega_0 e^{j\theta} e^{-\delta t} e^{j\omega't} - \omega_0 e^{-j\theta} e^{-\delta t} e^{-j\omega't}) = -U_0 \frac{\omega_0}{\omega'} e^{-\delta t} \sin(\omega't + \theta); \quad (8.4.24)$$

$$u_C = -\frac{U_0}{2j\omega'} (\omega_0 e^{-j\theta} e^{-\delta t} e^{j\omega't} - \omega_0 e^{j\theta} e^{-\delta t} e^{-j\omega't}) = -U_0 \frac{\omega_0}{\omega'} e^{-\delta t} \sin(\omega't - \theta). \quad (8.4.25)$$

От изрази (8.4.23) ... (8.4.25) може да се установи, че както токът i , така и напреженията u_L и u_C се описват от функции, представляващи произведение от намаляваща експоненциална функция $e^{-\delta t}$ и синусоидална функция. Това означава, че при комплексни корени α_1 и α_2 във веригата възникват затихващи трептения на тока и напреженията с честота ω' . Такъв преходен процес носи названието псевдопериодичен.

Зависимостите $u_R = u_R(t)$; $u_L = u_L(t)$ и $u_C = u_C(t)$ са показани на фиг.8.4.7. Зависимостта $i = i(t)$ на тока е аналогична на зависимостта $u_R = u_R(t)$. При построяването на кривите се изхожда от същите съображения, както при апериодичен процес, а именно, от връзките на напреженията u_R , u_L и u_C с тока i и от равенството: $u_R + u_L + u_C = 0$.

Честотата ω' на затихващите трептения се определя по формулата:

$$\omega' = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}. \quad (8.4.26)$$

Съответно за периода T' на затихващите трептения се получава изразът:

$$T' = \frac{2\pi}{\omega'} = 2\pi / \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}. \quad (8.4.27)$$

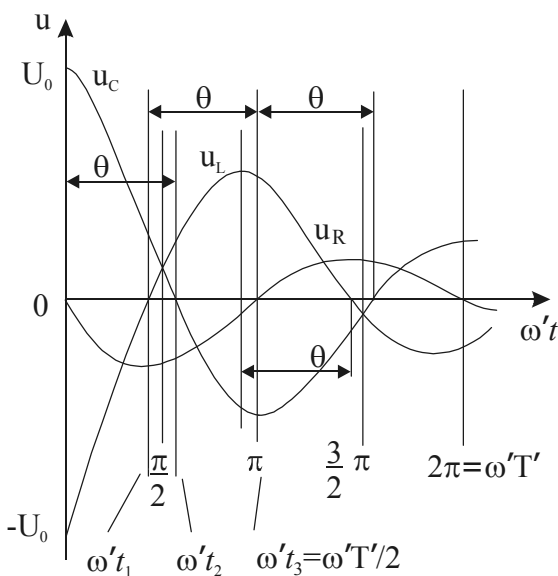
В случай, че активното съпротивление $R = 0$, то се получава: $\delta = 0$, $\omega' = \omega_0$ и $T' = T_0$. Този резултат показва, че във веригата възникват незатихващи трептения на тока и напреженията с ъглова честота, равна на резонансната, т.е.: $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ и с период, равен на резонансния, т.е.:

$$T_0 = 2\pi\sqrt{LC}. \quad (8.4.28)$$

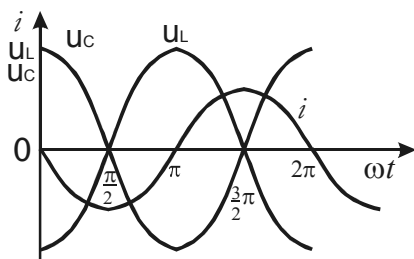
Последната формула се нарича формула на Томсън.

При $\delta = 0$, за ъгъла θ се получава $\theta = \frac{\pi}{2}$

и за тока i и за напреженията u_L и u_C се достига до изразите:



Фиг. 8.4.7



Фиг. 8.4.8

$$i = -\frac{U_0}{\omega_0 L} \sin \omega_0 t; \quad (8.4.29)$$

$$u_L = -U_0 \sin\left(\omega_0 t + \frac{\pi}{2}\right); \quad (8.4.30)$$

$$u_C = -U_0 \sin\left(\omega_0 t - \frac{\pi}{2}\right). \quad (8.4.31)$$

Зависимостите $i = i(t)$, $u_L = u_L(t)$ и $u_C = u_C(t)$ при $R = 0$ са показани на фиг.8.4.8. Ако кривите от фигурата се сравнят с кривите на тези величини при установен синусоиден режим за случая на резонанс (вж. раздел V), може да се установи, че характерът им е аналогичен.

При $R \neq 0$, то $\omega' < \omega_0$ и $T' > T_0$. За граничния случай $R = 2\sqrt{L/C} = R_{кр}$ се получава: $\omega' = 0$ и $T' = \infty$, т.е. псевдопериодичният разряд преминава в апериодичен.

За характеризиране бързината на затихване на трептенията на тока и напреженията се въвежда величината декремент на трептенията Δ . Тя се дава като отношение от две последователни амплитуди с еднакъв знак. Например, по отношение на тока i за декремента Δ се записва:

$$\Delta = \frac{Ie^{-\delta t}}{Ie^{-\delta(t+T')}} = e^{\delta T'}. \quad (8.4.32)$$

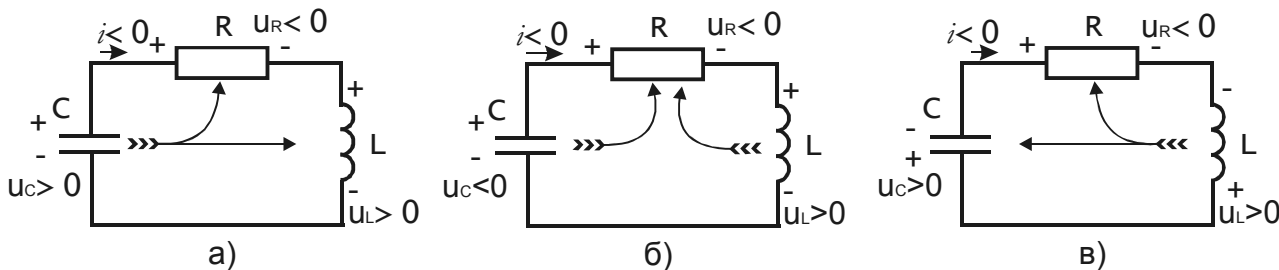
Използува се и величината логаритмичен декремент на трептенията ϑ , която се определя по формулата:

$$\vartheta = \ln \Delta = \delta T'. \quad (8.4.33)$$

При малки загуби може да се приеме, че $T' \approx T$ и за логаритмичния декремент ϑ се записва:

$$\vartheta = \delta T' \approx \delta T_0 = \frac{R}{2L} 2\pi\sqrt{LC} = \frac{\pi R}{\sqrt{L/C}} = \pi d. \quad (8.4.34)$$

Последният израз показва, че при малки загуби, затихването d е пропорционално на логаритмичния декремент на трептенията ϑ .



Фиг. 8.4.9

Както при апериодичен разряд, така и при псевдопериодичен разряд, интерес представлява разглеждането на процеса и от енергийна гледна точка. Тук характерни интервали на времето t са: $t = 0 \dots t_1$; $t = t_1 \dots t_2$; и $t = t_2 \dots t_3$. Процесът за тези интервали е илюстриран на схемите от фиг. 8.4.9.

Характерът на процеса за интервалите $t = 0 \dots t_1$ и $t = t_1 \dots t_2$ е аналогичен на този за интервалите $t = 0 \dots t_m$ и $t = t_m \dots \infty$ при апериодичен разряд. При псевдопериодичен разряд в момента $t = t_2$ кондензаторът е напълно разреден, но токът във веригата поради малките енергийни загуби запазва значителна стойност, т.е. за този момент се запазва значителен енергиен запас в магнитното поле на бобината. В следствие на този енергиен запас преходният процес продължава, като

за интервала $t = t_2 \dots t_3$ кондензаторът се зарежда с напрежение с обратна полярност, т.е. $u_C < 0$ и в момента $t = t_3 = \frac{T'}{2}$ токът i се анулира, а кондензаторът е зареден до максималното по абсолютна стойност напрежение.

За разглеждания интервал от време $t = t_2 \dots t_3$ знаците на мощностите върху отделните елементи на веригата са: $p_C = u_C i > 0$; $p_L = u_L i < 0$ и $p_R = u_R i = R i^2 > 0$. Това показва, че за този интервал бобината отдава енергия, както на резистора, така и на кондензатора. За следващия полупериод процесът има аналогичен характер, но величините са с обратен знак.

8.5. Включване на последователна R, L, C верига към постоянно напрежение

Преходният процес в тази верига се описва от уравнението:

$$Ri + L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int_0^t i dt + u_C(0-) = u(t). \quad (8.5.1)$$

Приема се, че кондензаторът не е бил предварително зареден, т.е.: $u_C(0-) = 0$. Освен това началното условие за тока i е също нулево, т.е.: $i(0-) = 0$.

Тъй като преходният процес, който се разглежда, е включване на последователна R, L, C верига към постоянно напрежение $u(t) = U = \text{const}$, то установената съставка i' на тока ще отсъства, т.е. $i' = 0$, съответно и $\frac{di'}{dt} = 0$. В

такъв случай решението на уравнение (8.5.1) ще бъде от вида:

$$i = i' + i'' = i'' = A_1 e^{\alpha_1 t} + A_2 e^{\alpha_2 t}. \quad (8.5.2)$$

Въз основа на разгледаното по-горе за началните условия $u_C(0-)$ и $i(0-)$ и въз основа на система (8.4.11) за интеграционните константи A_1 и A_2 се записва:

$$\begin{cases} 0 = A_1 + A_2; \\ \left(\frac{di}{dt} \right)_{t=0+} = \frac{U}{L} = \alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2. \end{cases} \quad (8.5.3)$$

Оттук за константите A_1 и A_2 се получава:

$$A_1 = -A_2 = A = \frac{U}{L(\alpha_1 + \alpha_2)}. \quad (8.5.4)$$

За тока i се достига до израза :

$$i = \frac{U}{L(\alpha_1 - \alpha_2)} (e^{\alpha_1 t} - e^{\alpha_2 t}). \quad (8.5.5)$$

Съответните изрази за напреженията u_L и u_C са:

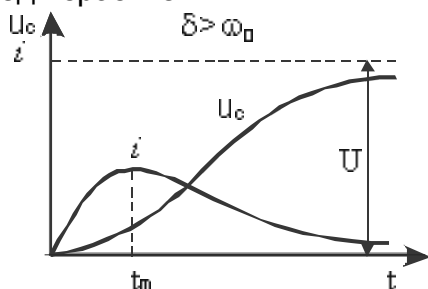
$$u_L = L \frac{di}{dt} = \frac{U}{\alpha_1 - \alpha_2} (\alpha_1 e^{\alpha_1 t} - \alpha_2 e^{\alpha_2 t}); \quad (8.5.6)$$

$$u_C = \frac{1}{C} \int_0^t i dt + u_C(0-) = \frac{1}{C} \int_0^t i dt = \frac{U}{\alpha_1 - \alpha_2} (\alpha_2 e^{\alpha_2 t} - \alpha_1 e^{\alpha_1 t}) + U. \quad (8.5.7)$$

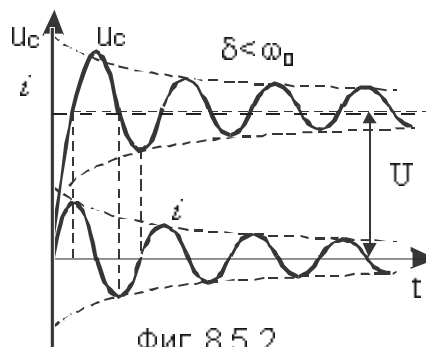
Ако се сравнят получените изрази за тока i и напреженията u_L и u_C със съответните им изрази при разряден процес (вж. формули (8.4.12) ... (8.4.14)) може да се установи, че токът i и напрежението u_L имат аналогичен закон на изменение. Разликата е само в знака пред изразите.

По отношение на напрежението u_C върху кондензатора, при заряд то се изменя от нула до установената си стойност $u'_C = U$, а при разряд - от $u_C(0+) = U_0$ до нула. При това законът на изменение на изменение на свободната съставка u''_C на

това напрежение е аналогичен, както при разряден процес. Разликата и тук е само в знака пред изразите.



Фиг. 8.5.1



Фиг. 8.5.2

Характерът на преходния процес, както и при разряд на кондензатор върху последователна R, L верига, зависи от вида на корените на характеристичното уравнение на веригата.

За илюстрация на фиг.8.5.1 са показани зависимостите $i = i(t)$ и $u_c = u_c(t)$ при аperiодичен заряд ($\delta > \omega_0$), а на фиг.8.5.2 - при псевдопериодичен заряд ($\delta < \omega_0$)

8.6. Операторен метод за изследване на преходни процеси

1. Общи положения

Идеята на операторния метод при преходните процеси е аналогична на тази на комплексния метод при установените синусоидални режими, а именно, системата диференциални уравнения на веригата за оригиналите (действителните токове и напрежения) да бъде заменена със система алгебрични уравнения за техните образи (в случая операторни образи на токовете и напреженията).

Връзката между операторен образ $F(p)$ и оригинал $f(t)$ най-често се дава чрез правото преобразование на Лаплас:

$$F(p) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-pt} dt, \quad (8.6.1)$$

където $p = \delta + j\omega$ е комплексната променлива, наречена оператор на Лаплас.

Функцията $f(t)$ трябва да удовлетворява условията на Дирихле и освен това при $t > 0$ да има ограничен ръст, т.е. да е изпълнено неравенството $(f(t)) < Ae^{\alpha t}$ (константите $A > 0$ и $\alpha > 0$ освен това $\alpha < \sigma$).

Правото преобразование на Лаплас съкратено се записва по следния начин:

$$F(p) = L[f(t)] \text{ или } F(p) \stackrel{=}{=} f(t) \quad (8.6.2)$$

Освен преобразуването на Лаплас е известно и преобразуването на Карсон, което има вида:

$$\Phi(p) = pF(p) = p \int_0^{\infty} f(t) e^{-pt} dt. \quad (8.6.3)$$

Предимството на преобразуването на Карсон е еднаквата размерност на оригинал и образ. При изследване на преходните процеси е намерило обаче, по-голямо приложение преобразуването на Лаплас и то най-вече във връзка със съответствието му с преобразуването на Фурие, на което се основава честотният метод за анализ на преходните процеси. Съществува и обратно преобразуване на Лаплас, което позволява определянето на оригинала при известен операторен образ. То се дава чрез формулата на Риман-Мелин:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\delta-j\infty}^{\delta+j\infty} F(p) e^{pt} dp. \quad (8.6.4)$$

Обратното преобразуване на Лаплас съкратено се записва във вида:

$$f(t) = L^{-1}[F(p)]. \quad (8.6.5)$$

В уравненията, описващи преходните процеси във веригите, освен токове и напрежения участват и техни произволни и интеграли. Доказва се, че операторният образ на производната $f'(t) = \frac{df(t)}{dt}$ се дава с изказа:

$$f'(t) \equiv pF(p) - f(0). \quad (8.6.6)$$

За операторния образ на производната $f^{(n)}(t)$ се записва:

$$f^{(n)}(t) \equiv p^n \left[F(p) - \frac{f(0)}{p} - \frac{f'(0)}{p^2} - \dots - \frac{f^{(n-1)}(0)}{p^n} \right]. \quad (8.6.7)$$

В тези изрази $f(0)$, $f'(0)$, ..., $f^{(n-1)}(0)$ са началните стойности на функцията $f(t)$ и на производните ѝ за момента $t = 0+$.

При нулеви начални условия се получава:

$$f'(t) \equiv pF(p) \text{ и } f^{(n)}(t) \equiv p^n F(p). \quad (8.6.8)$$

Доказва се, че операторният образ на интеграла $\psi(t) = \int_0^t f(t)dt$ се дава с изказа:

$$\psi(t) = \int_0^t f(t)dt \equiv \frac{F(p)}{p}. \quad (8.6.9)$$

Въз основа на разгледаното по-горе за операторните образи на напрежението u_L върху бобина и на напрежението u_C върху кондензатор се получава:

$$u_L = L \frac{di}{dt} \equiv pLI(p) - Li(0) = u_L(p); \quad (8.6.10)$$

$$u_C = \frac{1}{C} \int_0^t i dt + u_C(0) \equiv \frac{I(p)}{pC} + \frac{u_C(0)}{p} = U_C(p). \quad (8.6.11)$$

2. Закони на Кирхоф и Ом в операторна форма

Законите на Кирхоф за оригиналите имат вида:

$$\sum_{k=1}^n i_k = 0 \text{ и } \sum_{k=1}^n e_k = \sum_{k=1}^n u_k. \quad (8.6.12)$$

Съответният им запис в операторна форма е:

$$\sum_{k=1}^n I_k(p) = 0 \text{ и } \sum_{k=1}^n E_k(p) = \sum_{k=1}^n U_k(p). \quad (8.6.13)$$

За напрежението u_k за клон, съдържащ резистор, бобина и кондензатор се записва:

$$u_k = R_k i_k + L_k \frac{di_k}{dt} + \frac{1}{C_k} \int_0^t i_k dt + u_{Ck}(0). \quad (8.6.14)$$

Операторният запис на последния израз е:

$$U_k(p) = R_k I_k(p) + pL_k I_k(p) - L_k i_k(0) + \frac{I_k(p)}{pC_k} + \frac{U_{Ck}(0)}{p}. \quad (8.6.15)$$

Този израз може да се запише и във вида:

$$U_k(p) + L_k i_k(0) - \frac{U_{Ck}(0)}{p} = \left(R_k + pL_k + \frac{1}{pC_k} \right) I_k(p). \quad (8.6.16)$$

Величината $Z_k(p) = R_k + pL_k + \frac{1}{pC_k}$ се нарича операторно съпротивление на клон. След заместване на напрежението $U_k(p)$ от израз (8.6.15) във второто уравнение на система (8.6.13) за втория закон на Кирхоф се записва:

$$\sum_{k=1}^n E_k(p) = \sum_{k=1}^n \left[Z_k(p) I_k(p) - L_k i_k(0) + \frac{U_{Ck}(0)}{p} \right]. \quad (8.6.17)$$

От уравнение (8.6.16) за тока $I_k(p)$ се получава изразът:

$$I_k(p) = \frac{U_k(p) + L_k i_k(0) - U_{Ck}(0)/p}{Z_k(p)}. \quad (8.6.18)$$

Последният израз се нарича закон на Ом в операторна среда.

При нулеви начални условия законите на Кирхоф и Ом добиват вида:

$$\sum_{k=1}^n I_k(p) = 0; \quad \sum_{k=1}^n E_k(p) = \sum_{k=1}^n I_k(p) Z_k(p); \quad I_k(p) = \frac{U_k(p)}{Z_k(p)} = \frac{U_k(p)}{\left(R_k + pL_k + \frac{1}{pC_k} \right)}. \quad (8.6.19)$$

Сравняват се изрази (8.6.19) със съответните изрази на законите на Кирхоф и Ом комплексна форма:

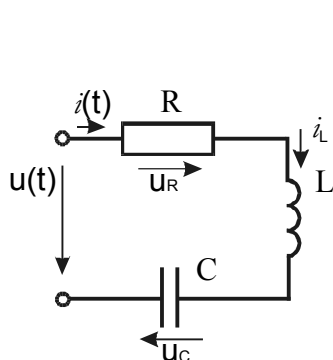
$$\sum_{k=1}^n \dot{I}_k = 0; \quad \sum_{k=1}^n \dot{E}_k = \sum_{k=1}^n \dot{I}_k Z_k; \quad \dot{I}_k = \frac{\dot{U}_k}{Z_k} = \frac{\dot{U}_k}{\left(R_k + j\omega L_k + \frac{1}{j\omega C_k} \right)}. \quad (8.6.20)$$

Сравнението между изрази (8.6.19) и (8.6.20) показва, че при нулеви начални условия те са аналогични. И действително, ако в операторния запис на законите на Кирхоф и Ом се замени p с $j\omega$ се достига до комплексния им запис. При замяната $p = 0$ се получава записът на законите при постоянни режими.

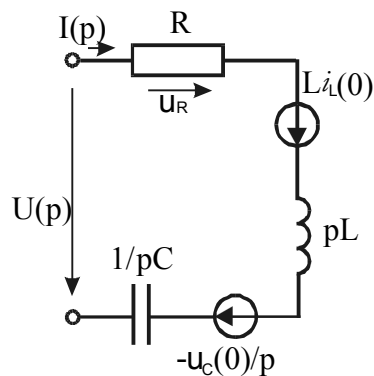
Вторият закон на Кирхоф в операторна форма при ненулеви начални условия може да бъде представен във вида:

$$\sum_{k=1}^n E_k(p) + \sum_{k=1}^n L_k i_k(0) - \sum_{k=1}^n \frac{U_{Ck}(0)}{p} = \sum_{k=1}^n I_k(p) Z_k(p). \quad (8.6.21)$$

Последният израз показва, че ненулеви начални условия могат да бъдат взети предвид чрез въвеждане на допълнителни операторни източници на ЕДН



Фиг. 8.6.1



Фиг. 8.6.2

$L_k i_k(0)$ и $-\frac{U_{Ck}(0)}{p}$. При такава постановка схемата на последователната R, L, C верига (фиг.8.6.1) при ненулеви начални условия $i_L(0-) \neq 0$ и $U_C(0-) \neq 0$ може да бъде представена с операторната заместваща схеми от фиг.8.6.1.

При последователно свързване не няколко участъка (едноконтурна верига) по втория закон на Кирхоф се записва:

$$\sum_{k=1}^n E_k(p) = I(p) \sum_{k=1}^n Z_k(p) - \sum_{k=1}^n L_k i_k(0) + \sum_{k=1}^n \frac{U_{Ck}(0)}{p}. \quad (8.6.22)$$

Този запис показва, че при последователно свързване на участъци операторните им съпротивления $Z_k(p)$ се сумират, т.е.: $\sum_{k=1}^n Z_k(p) = Z(p)$.

При паралелно съединение на два клона с операторни съпротивления $Z_1(p) = R_1 + pL_1 + \frac{1}{pC_1}$ и $Z_2 = R_2 + pL_2 + \frac{1}{pC_2}$ за напрежението $U(p)$, приложено към клоновете, се записва:

$$\begin{aligned} U(p) &= I_1(p)Z_1(p) - L_1 i_1(0) + \frac{U_{C1}(0)}{p}; \\ U(p) &= I_2(p)Z_2(p) - L_2 i_2(0) + \frac{U_{C2}(0)}{p}. \end{aligned} \quad (8.6.22)$$

От тези изрази за общия ток $I(p)$ се получава:

$$I(p) = I_1(p) + I_2(p) = \frac{U(p) + L_1 i_1(0) - U_{C1}(0)/p}{Z_1(p)} + \frac{U(p) + L_2 i_2(0) - U_{C2}(0)/p}{Z_2(p)}. \quad (8.6.23)$$

В случай на нулеви начални условия израз (8.6.23) добива вида:

$$I(p) = U(p) \left[\frac{1}{Z_1(p)} + \frac{1}{Z_2(p)} \right] = U(p) [Y_1(p) + Y_2(p)] = U(p)Y(p), \quad (8.6.24)$$

където $Y_1(p) = \frac{1}{Z_1(p)}$ и $Y_2(p) = \frac{1}{Z_2(p)}$ са операторните проводимости на клоновете.

От израз (8.6.24) може да се установи, че при паралелно съединение на клонове операторните им проводимости могат да се сумират само при нулеви начални условия.

При вериги с индуктивна връзка вторият закон на Кирхоф при ненулеви начални условия се записва по следния начин:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n E_k(p) + \sum_{k=1}^n L_k i_k'(0) + \sum_{k=1}^n M_k s_k(0) - \frac{\sum_{k=1}^n U_{Ck}(0)}{p} = \\ = \sum_{k=1}^n Z_k(p) I_k(p) + \sum_{k=1}^n p M_{ks} I_s(p). \end{aligned} \quad (8.6.25)$$

3. Пресмятане на преходните процеси в електрическите вериги чрез операторния метод

Алгоритъмът на операторния метод за анализ на преходните процеси в електрическите вериги е следният:

1. Пресмята се установения режим във веригата преди комутацията и се определят началните стойности на напреженията $u_C(0-)$ върху кондензаторите и на токовете $i_L(0-)$ през бобината.

2. Съставя се операторната заместваща схема на веригата като ненулевите начални условия $u_C(0-)$ и $i_L(0-)$ се вземат предвид чрез въвеждане на ЕДН $L i_L(0)$ и $-\frac{u_C(0)}{p}$.

3. Въз основа на операторната заместваща схема на веригата по законите на Кирхоф или чрез методите за пресмятане на сложни вериги се съставя системата уравнения за операторните образи, от която се определя операторният образ на търсената величина.

Тук следва да се отбележи, че до системата уравнения за операторните образи може да се достигне и без съставяне на операторната заместваща схема на веригата. За целта се записва системата диференциални уравнения на веригата за след комутационната ѝ схема и тази система се привежда в операторна форма.

4. Определя се оригиналът на търсената величина, което може да бъде извършено по следните три начина:

1). Чрез директно използване на обратното преобразуване на Лаплас (формулата на Риман-Мелин (вж. формула (8.6.4)))

2). Чрез използване на формули за операторни образи на известни функции

Този начин е удобен при получаване на сравнително прост израз за операторния образ на търсената величина. В табл. 8.6.1 са дадени операторите образа на най-често срещани функции.

За илюстрация по-долу се разглеждат примери на преходни процеси в последователни R, L; R, C и R, L, C вериги, анализирани при класическия метод.

Пример 1: Включване на последователна R, L верига към постоянно напрежение $u = U = \text{const}$ при нулево начално условие $i(0-) = 0$.

За намиране на операторния образ $I(p)$ на тока се използва законът на Ом в операторна форма при нулеви начални условия, т.е.:

$$I(p) = \frac{U(p)}{Z(p)} = \frac{\frac{U}{p}}{R + pL} = \frac{U}{R} \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p + R/L} \right),$$

където $U(p) = U/p$ е операторният образ на напрежението $u = U = \text{const}$, а $Z(p) = R + pL$ - операторното съпротивление на веригата.

Въз основа на формули 1 и 2 от табл.8.6.1 за оригинала $i(t)$ на тока се получава:

$$i(t) = \frac{U}{R} \left(1 - e^{-\frac{R}{L}t} \right).$$

Таблица 8.6.1

№	Оригинал	Операторен образ
1	A	A/p
2	$Ae^{\pm at}$	$A/(p \mp a)$
3	$e^{\pm j\omega t}$	$1/(p \mp j\omega)$
4	$(1 - e^{-at})/a$	$1/p(p + a)$
5	$\sin \omega t$	$\omega/(p^2 + \omega^2)$
6	$\cos \omega t$	$p/(p^2 + \omega^2)$
7	$\sin(\omega t + \psi)$	$(p \sin \psi + \omega \cos \psi)/(p^2 + \omega^2)$
8	$\cos(\omega t + \psi)$	$(p \cos \psi - \omega \sin \psi)/(p^2 + \omega^2)$
9	shat	$a/(p^2 + a^2)$
10	chat	$p/(p^2 - a^2)$
11	$e^{-at} \cdot \sin(\omega t + \psi)$	$[(p + a) \sin \psi + \omega \cos \psi]/[(p + a)^2 + \omega^2]$

Пример 2: Включване на последователна R, C верига към постоянно напрежение $u = U = \text{const}$ при нулево начално условие $U_C(0-) = 0$.

Използва се същият подход, както при пример 1. За операторния образ $I(p)$ на тока се записва:

$$I(p) = \frac{U(p)}{Z(p)} = \frac{\frac{U}{p}}{R + \frac{1}{pC}} = \frac{U}{R} \frac{1}{p + \frac{1}{RC}} \stackrel{=}{=} \frac{U}{R} e^{-\frac{t}{RC}} = i(t).$$

Пример 3: Включване на последователна R, L, C верига към постоянно напрежение $u = U = \text{const}$ при нулеви начални условия $i(0-) = 0$ и $U_C(0-) = 0$.

Въз основа на закона на Ом в операторна форма при нулеви начални условия за операторния образ $I(p)$ на тока се записва:

$$I(p) = \frac{U(p)}{Z(p)} = \frac{U/p}{R + pL + \frac{1}{pC}} = \frac{U}{L} \frac{1}{p^2 + p \frac{R}{L} + \frac{1}{LC}} = \frac{U}{L} \frac{1}{\left(p + \frac{R}{2L}\right)^2 + \frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2} =$$

$$= \frac{U}{\omega L} \frac{\omega'}{(p + \delta)^2 + \omega'^2},$$

където $\delta = R/2L$; $\omega'^2 = \omega_0^2 - \delta^2$ и $\omega_0^2 = 1/LC$ са съответно коефициентът на затихване, честотата на затихващите трептения и резонансната честота на веригата.

Въз основа на формула 1 от табл.8.6.1 за оригинала $i(t)$ на тока се получава:

$$i(t) = \frac{U}{\omega' L} e^{-\delta t} \sin \omega' t.$$

3. Чрез използване на теоремата на разлагането

За целта операторният образ $Y(p)$ на търсената величина $x(t)$ се представя като отношение от два полинома на $G(p)$ и $H(p)$, т.е.:

$$X(p) = \frac{G(p)}{H(p)}. \quad (8.6.27)$$

При това полиномът $H(p)$ е с по-висока степен от $G(p)$ и уравненията $G(p) = 0$ и $H(p) = 0$ имат различни корени.

В случай на еднократни корени $p_1, p_2, \dots, p_n$ на уравнението $H(p) = 0$, израз (8.6.27) може да се запише във вида.

$$X(p) = \frac{G(p)}{H(p)} = \frac{A_1}{p - p_1} + \frac{A_2}{p - p_2} + \dots + \frac{A_n}{p - p_n} = \sum_{k=1}^n \frac{A_k}{p - p_k}. \quad (8.6.28)$$

В последния израз константите A_k се определят по формулата:

$$A_k = \frac{G(p_k)}{H'(p_k)}. \quad (8.6.29)$$

Като се има предвид, че оригиналът на $\frac{1}{(p - p_k)}$ е $e^{p_k t}$ (вж. формула 2 от табл.8.6.1), то за оригинала $x(t)$ на търсената величина може да се запише:

$$x(t) = \sum_{k=1}^n A_k e^{p_k t} = \sum_{k=1}^n \frac{G(p_k) e^{p_k t}}{H'(p_k)}. \quad (8.6.30)$$

Последната формула е известна под названието теорема на разлагането при еднократни корени.

Ако уравнението $H(p) = 0$ има нулев корен $p_1 = 0$, то формула (8.6.30) добива вида:

$$x(t) = \frac{G(0)}{H'(0)} + \sum_{k=2}^n \frac{G(p_k) e^{p_k t}}{H'(p_k)}. \quad (8.6.31)$$

Уравнението $H(p) = 0$ има нулев корен, когато установеният режим във веригата след комутацията е постоянен, като членът $\frac{G(0)}{H'(p)}$ дава установената съставка на търсената величина $x(t)$.

При два имагинерни комплексно спрегнати корена $p_1 = j\omega$ и $p_2 = -j\omega$ на уравнението $H(p) = 0$ формула (8.6.30) се записва по следния начин:

$$x(t) = \frac{G(j\omega)}{H'(j\omega)} e^{j\omega t} + \frac{G(-j\omega)}{H'(-j\omega)} e^{-j\omega t} + \sum_{k=3}^n \frac{G(p_k) e^{p_k t}}{H'(p_k)}. \quad (8.6.32)$$

Уравнението $H(p) = 0$ има два имагинерни комплексно спрегнати корена, когато установеният режим във веригата след комутацията е синусоидален, като първите два члена във формула (8.6.32) дават установената съставка на търсената величина $x(t)$.

Пример: За илюстрация на използването на теоремата на разлагането при еднократни корени на уравнението $H(p) = 0$ се разглежда преходният процес разряд на кондензатор върху последователна R, L верига, анализиран при класическия метод.

За началните условия на преходния процес се записва: $u_C(0-) = U_0$, $i(0-) = 0$ и $u(t) = 0$.

За определяне на операторния образ $I(p)$ на тока се използва закона на Ом в операторна форма при ненулеви начални условия:

$$I(p) = \frac{U(p) + Li(0+) - U_C(0+)/p}{Z(p)} = \frac{-\frac{U_0}{p}}{R + pL + \frac{1}{pC}} = \frac{-\frac{U_0}{L}}{p^2 + p\frac{R}{L} + \frac{1}{LC}} =$$

$$\frac{-\frac{U_0}{L}}{p^2 + 2\delta p + \omega_0^2} = \frac{G(p)}{H(p)}.$$

За случая $G(p) = U_0/L$ и не зависи от p , а $H(p) = p^2 + 2\delta p + \omega_0^2$.

Корените на уравнението $H(p) = 0$ са: $p_{1,2} = -\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}$.

За производната $H'(p)$ се записва: $H'(p) = 2(p + \delta)$. Съответно за $\frac{G(p)}{H'(p)}$ се

получава: $\frac{G(p)}{H'(p)} = \frac{-\frac{U_0}{L}}{2(p + \delta)}$. За оригинала $i(t)$ на тока се достига до израз:

$$i(t) = \frac{-U_0}{2L(p_1 + \delta)} e^{p_1 t} + \frac{-U_0}{2L(p_2 + \delta)} e^{p_2 t} = -\frac{U_0}{2L\sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}} (e^{p_1 t} - e^{p_2 t}).$$

В случай на кратен корен p_1 с кратност q на уравнението $H(p) = 0$, израз (8.6.27) може да се запише във вида:

$$X(p) = \frac{G(p)}{M(p)} = \frac{G(p)}{(p - p_1)^q M_1(p)} = \frac{A_{1q}}{(p - p_1)^q} + \frac{A_{12}}{(p - p_1)^{q-2}} + \dots + \frac{A_{1s}}{(p - p_1)^{qs+1}} + \dots + \frac{A_{1q}}{p - p_1} +$$

$$+ \frac{A_2}{p - p_2} + \dots + \frac{A_k}{p - p_k} + \dots + \frac{A_n}{p - p_n}, \quad (8.6.33)$$

където полиномът $H_1(p)$ е със степен $(n-q)$ (n е степента на полинома $H(p)$).

Константите A_{1s} и A_k се определят от формулите:

$$A_{1s} = \frac{1}{(s-1)!} \left[\frac{d^{s-1}}{dp^{s-1}} \frac{(p-p_1)^q G(p)}{H(p)} \right]_{p=p_1}; \quad (8.6.34)$$

$$A_k = \frac{H(p_k)}{H'(p_k)} = \frac{G(p_k)}{(p_k - p_1)^q H'_1(p_k)}. \quad (8.6.35)$$

За съответните съставки на оригинала $x(t)$ свързани с константите A_{1s} и A_k се записва:

$$\frac{A_{1s}}{(p-p_1)^{q-s+1}} \stackrel{::}{=} A_{1s} \frac{t^{q-s}}{(q-s)!} e^{p_1 t} \quad \text{и} \quad \frac{A_k}{p-p_k} \stackrel{::}{=} A_k e^{p_k t}. \quad (8.6.36)$$

4. Свойства на корените на характеристичното уравнение на електрическите величини.

Както бе разгледано по-горе, операторният образ $X(p)$ на търсената величина $x(t)$ може да бъде записан във вида: $X(p) = G(p)/H(p)$.

Полиномът $H(p)$ може да бъде представен по следния начин:

$$H(p) = N(p) \cdot H_1(p). \quad (8.6.37)$$

Корените на уравнението $N(p) = 0$ определят установената съставка $x'(t)$ на търсената величина, а корените на уравнението $H_1(p) = 0$ - свободната съставка $x''(t)$. При такива постановка корените p_s на уравнението $H_1(p)$ съвпадат с корените α_s на характеристичното уравнение на веригата, т.е.: $p_s = \alpha_s$.

Тези корени се характеризират със следните три основни свойства:

1) За пасивна електрическа верига реалната част на всички корени трябва да бъде отрицателна, т.е.: $\operatorname{Re}(\alpha_s) < 0$. Това свойство се свързва с обстоятелството, че преходният процес в такава верига трябва да бъде затихващ.

2) Комплексните корени са обезателно комплексно спрегнати, тъй като преходният процес се описва от реални функции на времето.

3) Чисто имагинерните корени $\alpha_s = j\omega_s$ и $\alpha_s = -j\omega_s$ са еднократни. Ако се допусне, че такива корени имат кратност $m > 1$, то на тях би им съответствувала съставка от вида:

$$(A_0 + A_1 t + A_2 t^2 + \dots + A_{m-1} t^{m-1}) \sin \omega_s t. \quad (8.6.38)$$

Анализът на последния израз показва, че при $m > 1$ във веригата би трябвало да възникнат трептения с безкрайно нарастваща амплитуда, което за пасивна верига е невъзможно.

При вериги, съдържащи бобини, кондензатори и резистори, в характеристичното им уравнение отсъствуват чисто имагинерни корени. Такива корени се получават само при вериги без загуби.

8.7. Честотен метод за изследване на преходни процеси

1. Общи положения

При честотния метод за анализ на преходните процеси може да се направи аналогия с пресмятането на установените периодични несинусоидални режими в линейните електрически вериги. Известно е (вж. раздел VII), че анализирането на такива режими може да бъде извършено, ако периодичните несинусоидални величини (ЕДН, напрежения и токове) бъдат разложени в ред на Фурие, съдържащ постоянна съставка, основен хармоник и висши хармоници. При честотния метод идеята е подобна, а именно, несинусоидалната величина, в общия случай, разглеждана като непериодична функция на времето, се представя като сума от

безкраен брой хармонични съставки с безкрайно малки амплитуди и с честоти ω в диапазона от $-\infty$ до $+\infty$.

За целта се изхожда от дискретното преобразуване на Фурие, представено в комплексна форма, т.е.:

$$f(t) = \frac{1}{T} \sum_{q=-\infty}^{+\infty} e^{jq\omega_1 t} F(jq\omega_1) , \quad (8.7.1)$$

$$\text{където: } F(jq\omega_1) = \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-jq\omega_1 t} dt . \quad (8.7.2)$$

Във формули (8.7.1) и (8.7.2) $f(t)$ е периодична несинусоидална функция, удовлетворяваща условията на Дирихле, а с ω_1 е означена честотата на основния хармоник. Функцията $F(jq\omega_1)$ се нарича дискретен спектър на функцията $f(t)$.

Във връзка с по-нататъшното разглеждане е удобно формула (8.7.1) да бъде записана във вида:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \sum_{q=-\infty}^{+\infty} e^{jq\omega_1 t} F(jq\omega_1) \Delta\omega . \quad (8.7.3)$$

При записването на последната формула е отчетена връзката $\frac{1}{T} = \frac{\Delta\omega}{2\pi} = \frac{\omega_1}{2\pi}$

($\Delta\omega$ е разликата между честотите на два поредни по номер хармоници, която е равна на честотата ω_1 на основния хармоник).

Приема се, че $f(t)$ е непериодична функция. Тя може да бъде разглеждана като периодична функция с безкрайно голям период T . В случай, че $T \rightarrow \infty$, то $\Delta\omega \rightarrow 0$ и сумата във формула (8.7.3) преминава в интеграл, т.е.:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{j\omega t} F(j\omega) d\omega , \quad (8.7.4)$$

където:

$$F(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt . \quad (8.7.5)$$

Формула (8.7.4) се нарича обратно преобразуване на Фурие, а формула (8.7.5) - право преобразуване на Фурие. От формула (8.7.4) може да се установи, че непериодичната функция $f(t)$ може да бъде представена като сума от безкраен брой хармонични съставки с безкрайно малки амплитуди $F(\omega)d\omega/2\pi$ и с честоти от целия диапазон от $-\infty$ до $+\infty$. Последното означава, че непериодичната функция се характеризира с непрекъснат честотен спектър, докато периодичната несинусоидална функция с дискретен честотен спектър. Ето защо разглежданият метод е наречен метод на честотните характеристики или просто честотен метод.

В случай, че при $t < 0$ функцията $f(t) = 0$ (например, се разглежда включване на дадена верига към ЕДН $e(t)$ в момент $t = 0$), то за честотната ѝ характеристика $F(j\omega)$ се записва:

$$F(j\omega) = \int_0^{+\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt . \quad (8.7.6)$$

Последната формула носи названието право едностранно преобразуване на Фурие.

Във връзка с правото преобразуване на Фурие трябва да се има предвид, че за да съществува това преобразуване, не е достатъчно функцията $f(t)$ да удовлетворява условието на Дирихле и да има ограничен ръст. Тя трябва да бъде

още абсолютно интегрируема, т.е. интегралът $\int_{-\infty}^{+\infty} (f(t))dt$ да има крайна стойност. Последното означава, че при $t \rightarrow \pm\infty$, $f(t) \rightarrow 0$.

2. Честотни характеристики

Функцията $F(j\omega) = F(\omega)e^{j\alpha(\omega)}$ се нарича честотна или спектрална характеристика на функцията $f(t)$. Величината $F(\omega)$, характеризираща зависимостта на амплитудата на хармоничните съставки от честотата, носи названието амплитудно-честотна характеристика, а величината $\alpha(\omega)$, характеризираща зависимостта на началната фаза $\psi = \frac{\pi}{2} + \alpha(\omega)$ на хармоничните съставки от честотата, носи съответно названието фазово-честотна характеристика.

Спектралната характеристика $F(j\omega)$ може да бъде представена по следния начин:

$$F(j\omega) = \frac{1}{2\pi} F(\omega) e^{j\alpha(\omega)} d\omega / d\left(\frac{\omega}{2\pi}\right). \quad (8.7.7)$$

Последната формула показва, че характеристиката $F(j\omega)$ може да бъде разглеждана като комплексна амплитуда на хармоничните съставки, разделена на j и отнесена за единица изменение на честотата $f = \frac{\omega}{2\pi}$. Ето защо функцията $F(j\omega)$ носи още названието спектрална плътност на функцията $f(t)$.

Честотната характеристика $F(j\omega)$ може да бъде записана още и във вида:

$$F(j\omega) = F(\omega) \cos \alpha(\omega) + jF(\omega) \sin \alpha(\omega) = F_1(\omega) + jF_2(\omega). \quad (8.7.8)$$

Величината $F_1(\omega)$ се нарича реална честотна характеристика, а величината $F_2(\omega)$ - имагинерна честотна характеристика.

Тук следва да се отбележи, че величините $F(\omega)$ и $F_1(\omega)$ са четни функция на честотата, т.е.: $F(\omega) = F(-\omega)$ и $F_1(\omega) = F_1(-\omega)$, а величините $\alpha(\omega)$ и $F_2(\omega)$ са нечетни функции на честотата, т.е.: $\alpha(\omega) = -\alpha(-\omega)$ и $F_2(\omega) = -F_2(-\omega)$.

Като се има предвид, че: $e^{j\omega t} F(j\omega) + e^{-j\omega t} F(-j\omega) = 2F(\omega) \cos[\omega t + \alpha(\omega)]$, то формула (8.7.4) може да бъде представена във вида:

$$f(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} F(\omega) \cos[\omega t + \alpha(\omega)] d\omega. \quad (8.7.9)$$

Последната формула носи названието обратно преобразуване на Фурие в тригонометрична форма. Тази формула показва, че непериодичната функция $f(t)$, удовлетворяваща разгледаните по-горе условия, може да бъде представена като сума от безкраен брой хармонични съставки с безкрайно малки амплитуди $F(\omega)d\omega/\pi$

и с начални фази $\psi = \frac{\pi}{2} + \alpha(\omega)$. Тук следва да се отбележи, че в случая амплитудите на хармоничните съставки са два пъти по-големи в сравнение с формула (8.7.4) тъй като честотата ω във формула (8.7.9) се изменя в диапазона от 0 до $+\infty$, а не от $-\infty$ до $+\infty$.

Като се има предвид, че: $F(j\omega)F(-j\omega) = [F(\omega)]^2$ и $F(-j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{j\omega t} dt$, се

установява, че: $\int_{-\infty}^{+\infty} [F(\omega)]^2 d\omega = \int_{-\infty}^{+\infty} F(j\omega)F(-j\omega)d\omega = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[F(j\omega) \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{j\omega t} dt \right] d\omega$, откъдето се достига до формула:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} [f(t)]^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} [F(\omega)]^2 d\omega. \quad (8.7.10)$$

Последната формула носи названието теорема на Релей, а също така се нарича равенство на Пърсевал.

В случай, че функцията $f(t)$ представлява ЕДН $e(t)$, действащо във верига с чисто активна проводимост G , то величината $G \int_{-\infty}^{+\infty} [e(t)]^2 dt$ определя енергията $W_G(t)$, изразходвана във веригата във вид на топлина. Равенството на Пърсевал позволява тази енергия да бъде пресметната при известна амплитудно-честотна характеристика $E(\omega)$ на ЕДН $e(t)$. Тъй като характеристиката $E(\omega)$ е четна функция на честота ω , то енергията $W_G(t)$ може да бъде пресметната по формулата:

$$W_G(t) = \frac{G}{\pi} \int_0^{\infty} [F(\omega)]^2 d\omega. \quad (8.7.11)$$

3. Връзка между преобразуванията на Фурие и Лаплас. Комплексна честота

Сравнява се правото еднострочно преобразуване на Фурие

$F(j\omega) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt$ с правото преобразуване на Лаплас $F(p) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-pt} dt$. От

сравнението може да се установи, че преобразуването на Фурие може да бъде разглеждано като частен случай на преобразуването на Лаплас, който се получава при полагането $p = j\omega$. Това дава възможност честотните характеристики на функциите, за които съществува преобразуването на Фурие, да бъдат определяни от операторните им образи.

За илюстрация се разгледа следния пример: Приема се, че напрежението $u(t)$ е от вида: $u(t) = U_0 e^{-\delta t}$.

За операторния му образ $U(p)$ се записва: $U(p) = \frac{U_0}{\delta + p}$.

Ако се положи $p = j\omega$ за честотната характеристика $U(j\omega)$ се получава:

$$U(j\omega) = \frac{U_0}{\delta + j\omega} = \frac{U_0}{\sqrt{\delta^2 + \omega^2}} e^{-j \arctg \frac{\omega}{\delta}} = U(\omega) e^{j\alpha_u(\omega)} = \frac{U_0 \delta}{\delta^2 + \omega^2} - j \frac{U_0 \omega}{\delta^2 + \omega^2} =$$

$$U_1(\omega) + jU_2(\omega).$$

Ако се въведе понятието комплексна честота $\dot{\omega} = \sigma + j\omega$ като върху реалната й част се наложи същото изискване, както върху реалната част σ на комплексната величина $p = \sigma + j\eta$, се достига до обобщеното право еднострочно преобразуване на Фурие, т.е.:

$$F(\dot{\omega}) = F(\sigma + j\omega) = \int_0^{\infty} e^{-j(c+j\omega)t} f(t) dt. \quad (8.7.12)$$

За обобщеното обратно преобразование на Фурие се записва:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F(c+j\omega) e^{(c+j\omega)t} d(c+j\omega). \quad (8.7.13)$$

Последният израз носи названието формула на Риман-Мелин.

Изложеното по-горе показва, че чрез въвеждането на понятието комплексна честота преобразуването на Фурие става еквивалентно на преобразуването на Лаплас. И действително, ако се положи $\dot{\omega} = p$, то двете преобразувания съвпадат, т.е. преобразуването на Лаплас може да бъде разглеждано като обобщено преобразуване на Фурие.

4. Пресмятане на преходните процеси в електрическите вериги чрез честотния метод

Разглежда се пресмятането на преходните процеси при следната постановка: В момент $t = 0$ веригата се включва към напрежение $u(t)$ при нулеви начални условия. Приема се, че функцията $f(t)$ удовлетворява условията за съществуване на правото преобразуване на Фурие.

Алгоритъмът на честотния метод е следният:

1. Въз основа на правото едностранно преобразуване на Фурие се намира честотната характеристика на напрежението $U(j\omega)$, т.е.:

$$U(j\omega) = \int_0^{\infty} u(t) e^{-j\omega t} dt.$$

2. При известна честотна характеристика на съпротивлението на веригата $Z(j\omega) = z(\omega) e^{j\varphi(\omega)} = R(\omega) + jX(\omega)$ се определя честотната характеристика на тока, т.е.:

$$I(j\omega) = \frac{U(j\omega)}{Z(j\omega)} = I(\omega) e^{j\alpha_i(\omega)}.$$

3. Токът $i(t)$ на преходния процес се намира чрез обратно преобразуване на Фурие, т.е.:

$$i(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} I(j\omega) e^{j\omega t} d\omega,$$

или чрез същото преобразуване в тригонометрична форма:

$$i(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} I(\omega) \cos[\omega t + \alpha_i(\omega)] d\omega.$$

Изложеният по-горе подход на прилагане на честотния метод не дава никакви предимства в сравнение с операторния метод. Съществено предимство на честотния метод спрямо операторния метод се установява в случая, когато е реализирана сложна линейна електрическа верига, за която аналитичното определяне на характеристиката $Z(j\omega)$ е много трудно, но има възможност за експериментално снемане на честотните характеристики $z(\omega)$ и $\varphi(\omega)$ или $R(\omega)$ и $X(\omega)$. В този случай честотният метод се прилага по следният начин:

1. При известна честотна характеристика $U(j\omega) = U(\omega) e^{j\varphi_u(\omega)}$ на напрежението $u(t)$ като се използват опитните данни за честотните характеристики $z(\omega)$ и $\varphi(\omega)$ се определят честотните характеристики на тока, т.е.:

$$I(\omega) = \frac{U(\omega)}{z(\omega)} \text{ и } \alpha_i(\omega) = \alpha_u(\omega) - \varphi(\omega).$$

2. Търсеният ток $i(t)$ на преходния процес се определя чрез обратното преобразуване на Фурие в тригонометрична форма, като интегрирането се извърши чрез използване на приблизителни числени методи.

Като се има предвид, че:

$$I(j\omega) = I(\omega)e^{j\alpha_i(\omega)} = I(\omega)\cos\alpha_i(\omega) + jI(\omega)\sin\alpha_i(\omega) = I_1(\omega) + jI_2(\omega),$$

то въз основа обратното преобразуване на Фурие в тригонометрична форма може да се установи, че между реалната и имагинерната честотни характеристики $I_1(\omega)$ и $I_2(\omega)$ на тока $i(t)$ съществува връзка. И действително, за тока $i(t)$ се записва:

$$i(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} I(\omega) \cos[\omega t + \alpha_i(\omega)] d\omega = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} [I_1(\omega) \cos \omega t - I_2(\omega) \sin \omega t] d\omega.$$

Тъй като при $t < 0$ $i(t) = 0$, то чрез полагането $t = -t$ се достига до равенството:

$$\int_0^{\infty} I_1(\omega) \cos \omega t d\omega = - \int_0^{\infty} I_2(\omega) \sin \omega t d\omega, \quad (8.7.14)$$

което дава връзката между реалната и имагинерната честотни характеристики $I_1(\omega)$ и $I_2(\omega)$ на тока $i(t)$.

Въз основа на равенство (8.7.14) за тока $i(t)$ може да се запише:

$$i(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} I_1(\omega) \cos \omega t d\omega = - \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} I_2(\omega) \sin \omega t d\omega. \quad (8.7.15)$$

Последната формула показва, че токът $i(t)$ може да бъде определен при известна реална или имагинерна честотна характеристика.

Може да установи, че съществува връзка и между амплитудно-честотната характеристика $I(\omega)$ и фазово честотната характеристика $\alpha_i(\omega)$, съответно между честотните характеристики $z(\omega)$ и $\varphi(\omega)$. В такъв случай е достатъчно да бъде снета експериментално характеристиката $z(\omega)$, което е значително по-лесно в сравнение с експерименталното снемане на характеристиката $\varphi(\omega)$. Тук следва да се има предвид, че експерименталната зависимост $z = z(\omega)$ може да бъде снета за ограничен честотен диапазон от 0 до някаква честота ω' , а не до ∞ . Изборът на честота ω' може да бъде направен въз основа на условието, че при $\omega = \omega'$ проводимостта $y(\omega) = \frac{1}{z(\omega)}$ клони към 0.

Разгледаният подход на прилагане на честотния метод се отнася за нулеви начални условия. Като бе споменато по-горе, преобразуването на Фурие може да бъде разглеждано като частен случай на преобразуването на Лаплас. Това показва, че пресмятането на преходните процеси чрез честотния метод е подобно на пресмятането им чрез операторния метод. При ненулеви начални условия може да бъде използван следният подход на прилагане на честотния метод:

1. За зададената електрическа верига се съставя заместващата ѝ комплексна схема по подобие на операторната ѝ заместваща схема като навсякъде p се заменя с $j\omega$.

2. При решението се използват законите на Ом и Кирхоф или методите за пресмятане на сложни линейни електрически вериги при установен режим.

3. След намирането на честотната характеристика на търсената величина, оригиналът ѝ се определя чрез обратното преобразуване на Фурие или чрез теоремата на разлагането, в която се прави замяната $p = j\omega$.

Ако се направи сравнение между честотния и операторния метод може да се отбележи следното:

А. Честотният метод има два съществени недостатъка, а именно:

1. Той е приложим за по-ограничен клас функции, тъй като изисква абсолютна интегруемост;

2. Използването му при ненулеви начални условия изисква да се прави проверка дали формално посочената честотна характеристика съществува.

Б. Честотният метод има и някои важни предимства като:

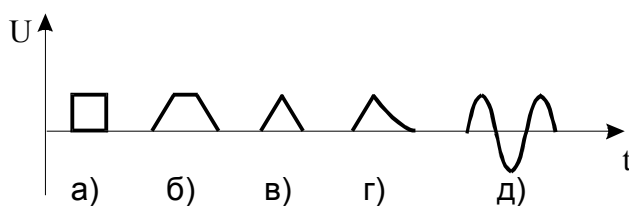
1. Търсената величина се намира без да е необходимо изчисляване на корените на характеристичното уравнение;
2. При определяне на търсената величина могат да бъдат използвани методите на численото интегриране;
3. Честотните характеристики на веригата могат да бъдат снети експериментално и то за установен режим.

8.8. Преходни процеси при въздействия с произволна форма. Интеграл на Дюамел

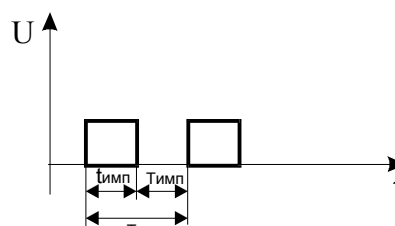
1. Понятие за импулси и импулсни системи

В редица радиотехнически и други електротехнически устройства възникват процеси под действието на краткотрайни въздействия с продължителност, сравнима с продължителността на преходните процеси. Такива въздействия и процеси се наричат импулсни. Съответно импулсни системи са такива устройства, в които се формират и действуват импулсни ЕДН и токове.

Използването на импулси за предаване на информация е намерило широко приложение тъй като в този случай влиянието на смущенията е най-малко. Освен това при импулсен режим е възможно получаването на импулси с мощност, многократно превишаваща мощността на съответното устройство при непрекъснатата му работа.



Фиг. 8.8.1



Фиг. 8.8.2

Използваните в практиката импулси имат разнообразна форма: триъгълна, трапецовидна, правоъгълна, експоненциална, радио импулси и др. (фиг.8.8.1). Последователността от импулси се характеризира с време на повторяемост $T_{\text{п}}$, продължителност на интервала (паузата) между импулсите $T_{\text{инт}}$ и продължителност $t_{\text{имп}}$ на самия импулс (фиг.8.8.2).

При въздействието на всеки импулс във веригата възниква преходен процес, който зависи от формата и параметрите на импулсите, така и от последователността на следването им. След изтичане на времето на въздействие на импулса $t_{\text{имп}}$, започва друг преходен процес, който е свързан с разсейването на енергията, запасена през същото време в електрическите и магнитни полета на веригата.

Ако продължителността на този преходен процес е по-малка от продължителността на паузата $T_{\text{инт}}$, то началните условия в момента на възникване на следващия импулс ще бъдат нулеви. Това позволява преходният процес да се пресмята за всеки импулс поотделно. При еднаква форма на импулсите достатъчно е пресмятането да се направи само за един импулс.

В случай, че продължителността на преходния процес се окаже по-голяма от продължителността на паузата $T_{\text{инт}}$, то преходният процес за следващия импулс ще зависи от преходния процес в предхождащите го моменти от време. За анализа на преходните процеси в такива системи се използват специални методи. Например,

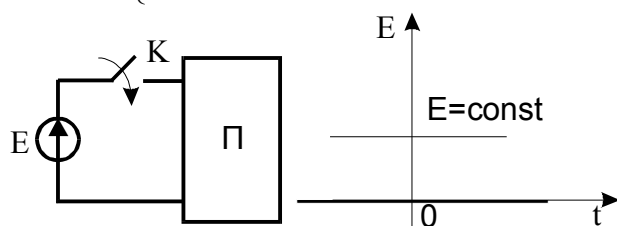
ако импулсите следват през равни интервали от време, може да бъде използван методът, основан на дискретното преобразуване на Лаплас.

2. Преходни характеристики на електрическите вериги

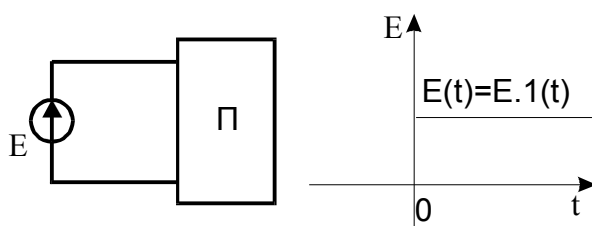
За дефиниране на понятието преходни характеристики може да се изходи от следната постановка: разглежда се преходният процес, който възниква в някаква пасивна верига, при включването ѝ към постоянно ЕДН E чрез ключ K при нулеви начални условия (фиг.8.8.3). Този преходен процес може да се приеме, че се дължи на ЕДН $E(t) = E.1(t)$, като във веригата отсъствува ключът K (фиг.8.8.4).

Функцията $E(t) = E.1(t)$ се нарича скоковидна, съответно функцията $1(t)$ - единична скоковидна или още функция на Хевисайд. За функцията на Хевисайд се записва:

$$1(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t < 0; \\ 1 & \text{при } t \geq 0. \end{cases} \quad (8.8.1)$$



Фиг. 8.8.3



Фиг. 8.8.4

Използва се и изместена на интервал от време τ функция $1(t - \tau)$:

$$1(t - \tau) = \begin{cases} 0 & \text{при } t < \tau; \\ 1 & \text{при } t \geq \tau. \end{cases} \quad (8.8.2)$$

Реакцията на веригата $x(t)$ е право пропорционална на скоковидното ЕДН $E(t) = E.1(t)$, т.е.:

$$x(t) = E(t).h(t). \quad (8.8.3)$$

Реакцията $x(t)$ може да бъде ток или напрежение във някакъв участък на веригата при преходния процес. Величината $h(t)$ се нарича преходна характеристика.

В случай, че реакцията $x(t)$ е токът $i(t)$ на входа на веригата, то преходната характеристика $h(t)$ има размерност на проводимост и носи названието преходна проводимост на веригата и се означава с $Y(t)$. За тока $i(t)$ се записва:

$$i(t) = E(t)Y(t) = E.1(t).Y(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t < 0; \\ E.1(t) & \text{при } t \geq 0. \end{cases} \quad (8.8.4)$$

Ако във формула (8.8.3) се приема, че реакцията $x(t)$ е токът $i(t)$ при $E(t) = 1(t)$ (т.е.: $E = 1 \text{ V}$), то:

$$x(t) = i(t) = Y(t). \quad (8.8.5)$$

Оттук може да се заключи, че преходната проводимост $Y(t)$ е числено равна на тока $i(t)$, възникващ при включването на веригата към постоянно ЕДН $E = 1 \text{ V}$.

Преходната проводимост $Y(t)$ обикновено се разглежда по отношение на входа на веригата. Тя може да бъде разглеждана и по отношение на клон на веригата. Ако ЕДН $E(t)$ действа в клон с номер k , то $i_k(t) = E.Y_{kk}(t)$. Съответно за тока $i_s(t)$ в клон с номер s се записва $i_s(t) = E.Y_{sk}(t)$. Величината $Y_{kk}(t)$ се нарича собствена преходна проводимост на клон k , а величината $Y_{sk}(t)$ - взаимна преходна проводимост между клоновете s и k . В случай, че реакцията на веригата е напрежение, се записва:

$$u(t) = E.h_u(t). \quad (8.8.6)$$

Величината $h_u(t)$ се нарича преходна характеристика на веригата по напрежение.

Преходната характеристика може да бъде пресметната или определена опитно. Пресмятането ѝ може да бъде извършено чрез класическия или операторния метод от преходния процес - включване на веригата към постоянно напрежение при нулеви начални условия. Например, за преходната проводимост

$Y(t)$ на последователна R, L верига се записва: $Y(t) = \frac{1}{R} \left(1 - e^{-\frac{R}{L}t} \right)$, а на

последователна R, C верига: $Y(t) = \frac{1}{R} e^{-\frac{t}{RC}}$.

Ако входното въздействие е скоковиден ток $J(t) = J.1(t)$, а реакцията на веригата е напрежение $u(t)$, се записва:

$$u(t) = JZ(t). \quad (8.8.7)$$

Величината $Z(t)$ се нарича преходно съпротивление на веригата.

В случай, че входното въздействие е скоковиден ток $J(t) = J.1(t)$, а реакцията на веригата е ток $i(t)$, то:

$$i(t) = J.h_i(t). \quad (8.8.8)$$

Величината $h_i(t)$ носи названието преходна характеристика на веригата по ток.

Преходните характеристики $h_u(t)$ и $h_i(t)$ са безразмерни величини, характеристиката $Y(t)$ има размерност $[S]$, а характеристиката $Z(t)$ - размерност $[\Omega]$.

3. Импулсни характеристики на електрическите вериги. Пресмятане на преходните процеси при въздействие на импулсни ЕДН

За дефиниране на понятието импулсна характеристика може да се изходи от преходния процес, който възниква във веригата при въздействие на импулсно ЕДН. Импулсните ЕДН и токове могат да бъдат описани чрез импулсната функция $K.\delta(t)$, където K е реално число, а $\delta(t)$ се нарича импулсна единична функция или делта функция или още функция на Дирак. Функцията $\delta(t)$ се определя по следния начин:

$$\delta(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t \neq 0; \\ \infty & \text{при } t = 0. \end{cases} \quad (8.8.9)$$

Използува се и изместена на интервал от време τ функция $\delta(t - \tau)$:

$$\delta(t - \tau) = \begin{cases} 0 & \text{при } t \neq \tau; \\ \infty & \text{при } t = \tau. \end{cases} \quad (8.8.10)$$

Между функциите на Хевисайд и Дирак могат да бъдат установени следните съотношения:

$$\delta(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1(t)}{\Delta t} = \frac{d[1(t)]}{dt}; \quad (8.8.11)$$

$$\int_{-\infty}^t \delta(t) dt = \int_{-\infty}^t \frac{d[1(t)]}{dt} dt = \int_{-\infty}^t d[1(t)] = 1(t). \quad (8.8.12)$$

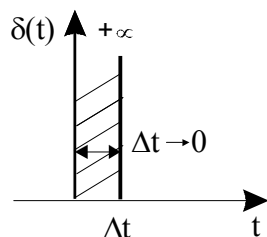
За операторните образи на функциите $1(t)$ и $\delta(t)$ може да се запише:

$$1(t) = 1/p \text{ и } \delta(t) = 1. \quad (8.8.13)$$

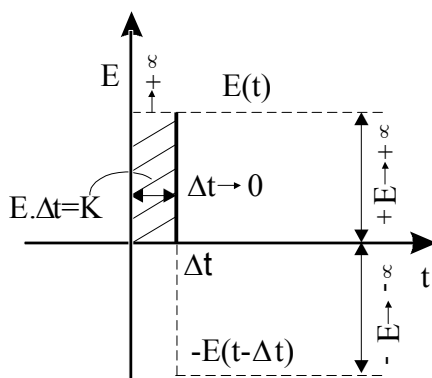
За функцията $\delta(t)$ може да бъде установено равенството:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt = 1, \quad (8.8.14)$$

което означава, че площта, определена от тази функция (фиг.8.8.5), е равна на единица.



Фиг. 8.8.5

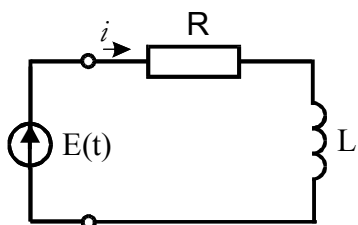


Фиг. 8.8.6

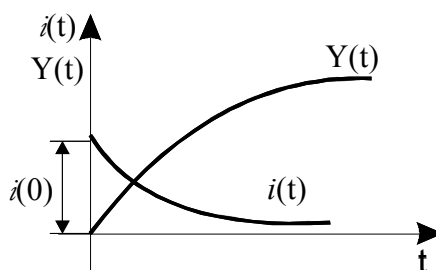
Ако на дадена електрическа верига се въздействува с импулсно ЕДН, могат да бъдат разглеждани два етапа на възникващия във веригата преходен процес. През първият етап ($t = 0 \dots \Delta t (\Delta t \rightarrow 0)$) в полетата на веригата постъпва енергия с някаква крайна стойност, която през втория етап ($t = \Delta t \dots \infty$) се разсейва във веригата.

Импулсното ЕДН може да бъде представено като сума от две скоковидни ЕДН с безкрайно големи стойности, с противоположни знаци и изместени по време на $\Delta t \rightarrow 0$, така че: $E \cdot \Delta t = \text{const}$ (фиг.8.8.6).

През първия етап (за времето от $t = 0$ до $t = \Delta t \rightarrow 0$) във веригата възниква ток под действието на положителното скоковидно ЕДН $E(t) = E \cdot 1(t)$. Като се отчете, че $E \cdot \Delta t = K$ и $\delta(t) = \lim_{t \rightarrow \Delta t \rightarrow 0} 1(t)$, за тока $i(t)$ може да се запише:



Фиг. 8.8.7



Фиг. 8.8.8

$$i(t) = E(t) \cdot Y(t) = \lim_{t \rightarrow \Delta t \rightarrow 0} E \cdot 1(t) \cdot Y(t) \frac{\Delta t}{\Delta t} = E \cdot \Delta t \lim_{t \rightarrow \Delta t \rightarrow 0} \frac{1(t)}{\Delta t} Y(t) = K \cdot Y(0) \cdot \delta(t) \quad (8.8.15)$$

За изясняване смисъла на израз (8.8.15) се разглежда последователна R, L верига (фиг.8.8.7). Като се има предвид, че преходната проводимост на веригата

$Y(t) = \frac{1}{R} \left(1 - e^{-\frac{R}{L}t} \right)$ при $t = 0$ е $Y(0) = 0$, а $\delta(t) = \infty$ при $t = 0$, то за тока $i(t)$ се получава

неопределеност от вида $0 \cdot \infty$. Ето защо изразът за тока $i(t)$ се представя по следния начин: $i(t) = E \Delta t \lim_{t \rightarrow \Delta t \rightarrow 0} \frac{1(t)}{\Delta t} Y(t) = K \lim_{t \rightarrow \Delta t \rightarrow 0} 1(t) \frac{Y(t)}{\Delta t} = K \lim_{t \rightarrow \Delta t \rightarrow 0} 1(t) \frac{Y(t)}{t}$. Тъй като $1(t) = 1$, при $t \rightarrow 0$ се достига до неопределеност от вида $0/0$. След разкриване на тази неопределеност за тока $i(t)$ се получава:

$$i(t) = i(0) = K \left[\frac{Y'(t)}{1} \right]_{t=0} = K \cdot Y'(0). \quad (8.8.16)$$

За разглежданата верига се записва: $Y'(t) = \frac{1}{L} e^{-\frac{R}{L}t}$, $Y'(t) = \frac{1}{L}$ и $i(t) = i(0) = \kappa/L$.

Под действието на импулсното ЕДН този ток се установява със скок, съответно със скок се установява и потокът от $\Psi = 0$ до $\Psi = \Psi(0) = L.i(0) = K$. Такова скоковидно изменение на тока и потока се оказва възможно в резултат на въздействието на безкрайно голямо ЕДН за безкрайно малък интервал от време.

И така, при въздействието на импулсното ЕДН през първия етап се извършва скоковидно натрупване на енергията в полетата на веригата (за разглежданата верига в магнитното поле на бобината Ψ). През втория етап на преходния процес натрупаната енергия се изразходва във веригата, което започва след действието на отрицателното ЕДН (фиг.8.8.6).

През втория етап реакцията на веригата (в случая токът $i(t)$) може да бъде представена като сума от реакциите на двете скоковидни ЕДН $+E$ и $-E$. Тук трябва да се има предвид това, че преходната проводимост следва да бъде определяна като функция на междинното време, отчитано от момента на действие на съответното скоковидно ЕДН до разглеждания момент от време t . При такава постановка за тока $i(t)$ се записва:

$$i(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} [EY(t) - EY(t - \Delta t)] = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} E \cdot \Delta t \frac{Y(t) - Y(t - \Delta t)}{\Delta t} = K \cdot Y'(t) . \quad (8.8.17)$$

където величината $K = E \cdot \Delta t$ е равна на площта, определена от импулсната функция $K \cdot \delta(t)$, а $Y'(t)$ - производната на преходната проводимост на веригата.

За разглежданата верига за тока $i(t)$ се записва: $i(t) = \frac{K}{L} e^{-\frac{R}{L}t} = i(0) e^{-\frac{R}{L}t}$. Този

израз съответствува на случая на преходен процес, когато последователна R , L верига се дава на късо при начален ток $i(0) = I = \text{const}$.

Величината $Y'(t)$, в общия случай $h'(t)$, се означава още с $h_{\delta(t)}$ и се нарича импулсна характеристика на веригата. Тази характеристика определя преходния процес във веригата след завършване действието на импулса. Както бе разгледано по-горе, при въздействието на импулсно ЕДН във верига с бобина, величината $K = E \cdot \Delta t$ определя потока $\Psi = \Psi(0) = L.i(0)$, който се установява в бобината през време на действието на импулса. В случай на въздействие на импулсен ток във верига с кондензатор за величината K се записва: $K = J \cdot \Delta t$. Тази величина в случая определя заряда $q = q(0)$, който се установява в кондензатора през време на действието на импулса. Ето защо величината K определя началните условия на преходния процес след действието на импулса.

В табл.8.8.1 са дадени изходните величини (реакциите) при типови входни въздействия като скоковидно ЕДН или скоковиден ток, съответно импулсно ЕДН или импулсен ток. Величината $h_{\delta u}(t)$ [$h_{\delta i}(t)$] се нарича импулсна характеристика.

Таблица 8.8.1

Входно въздействие		Изходно въздействие	
ЕДН	Ток	Напрежение	Ток
$E \cdot \delta(t)$		$E \cdot h_u(t)$	$E \cdot Y(t)$
	$J \cdot \delta(t)$	$J \cdot Z(t)$	$J \cdot h_i(t)$
$E \cdot \Delta t \cdot \delta(t) = \psi \cdot \delta(t)$		$\psi \cdot h_{\delta u}(t)$	$\psi \cdot Y'(t)$
	$J \cdot \Delta t \cdot \delta(t) = q \cdot \delta(t)$	$q \cdot Z'(t)$	$q \cdot h_{\delta i}(t)$

на веригата по напрежение (ток), а величината $Y'(t)$ ($Z'(t)$) - импулсна проводимост (импулсно съпротивление). Импулсните характеристики имат размерност, равна на размерността на съответната преходна характеристика, умножена по s^{-1} .

Може да се докаже, че импулсните характеристики представляват оригинали на съответните операторни коефициенти на предаване на пасивен четириполусник. Това позволява тези характеристики да бъдат определяни чрез търсене на оригинала на съответния операторен коефициент на предаване, намерен при нулеви начални условия. При такава постановка клонът, в който се осъществява въздействието се нарича входен, а клонът, в който определя реакцията на веригата - изходен. По отношение на двата клона - входен и изходен, останалата част от веригата се разглежда като пасивен четириполусник.

Например, за импулсната характеристика по напрежение $h_u(t)$ може да се запише:

$$h_{\delta u}(t) = K_u(p) = \frac{U_2(p)}{U_1(p)}, \quad (8.8.18)$$

където $K_U(p)$ е операторният коефициент на предаване по напрежение на пасивен четириполусник;

$U_2(p)$ - операторният образ на изходното му напрежение $u_2(t)$;

$U_1(p)$ - операторният образ на входното му напрежение $u_1(t)$.

Съответно за импулсната характеристика на тока $h'_i(t)$ може да бъде записано:

$$h_{\delta i}(t) = K_I(p) = I_2(p)/I_1(p), \quad (8.8.19)$$

където $K_U(p)$ е операторният коефициент на предаване по ток на пасивен четириполусник;

$I_2(p)$ - операторният образ на изходния му ток $i_2(t)$;

$I_1(p)$ - операторният образ на входния му ток $i_1(t)$.

Във формула (8.8.18) въздействието е импулсно напрежение, а във формула (8.8.19) - импулсен ток. Съответните операторни коефициенти на предаване $K_U(p)$ и $K_I(p)$ се определят от параметрите на пасивния четириполусник и от параметрите на изходния клон, разглеждан като товар на четириполусника.

4. Връзки между преходните и импулсните характеристики на електрическите вериги

а) в операторната област:

Между операторните образи на преходната характеристика по напрежение $H_U(p)$ (ток $H_I(p)$) и импулсната характеристика по напрежение $H'_U(p)$ (ток $H'_I(p)$) могат да бъдат установени следните връзки:

$$H_U(p) = \frac{1}{p} H_{\delta U}(p) = \frac{1}{p} K_U(p); \quad (8.8.20)$$

$$H_I(p) = \frac{1}{p} H_{\delta I}(p) = \frac{1}{p} K_I(p). \quad (8.8.21)$$

За операторните образи на преходната проводимост $Y(p)$ и на преходното съпротивление $Z(p)$ могат да бъдат записани следните формули:

$$Y(p) = Y_{B3}(p)/p = H_{\delta u}(p)/pZ_T(p) = K_U(p)/pZ_T(p); \quad (8.8.22)$$

$$Z(p) = Z_{B3}(p)/p = Z_T(p)H_{\delta i}(p)/p = Z_T(p)K_I(p)/p, \quad (8.8.23)$$

където $Y_{B3}(p)$ и $Z_{B3}(p)$ са взаимната операторна проводимост, съответно взаимното операторно съпротивление между входа и изхода на операторната заместваща

схема на разглежданата верига, а $Z_T(p)$ е операторното съпротивление на изходния й клон.

Формули (8.8.20) ... (8.8.23) показват, че операторните образи на всички преходни характеристики могат да бъдат намерени чрез съответните операторни коефициенти на предаване $K_U(p)$ и $K_I(p)$.

б) във временната област:

Както бе споменато по-горе, импулсните характеристики могат да бъдат разглеждани като производни на съответните преходни характеристики. Например, за връзката между преходната характеристика по напрежение $h_u(t)$ и импулсната характеристика по напрежение $h'_{\delta u}(t)$ може да бъде записано:

$$h_u(t) = \int_0^t h'_{\delta u}(\tau) d\tau. \quad (8.8.24)$$

За обратната връзка между тези характеристики може да се изходи от връзката им в операторната област (вж. формула (8.8.20)), съгласно която $H_{\delta u}(p) = p H_u(p)$. Оттук за импулсната характеристика по напрежение $h'_{\delta u}(t)$ се записва:

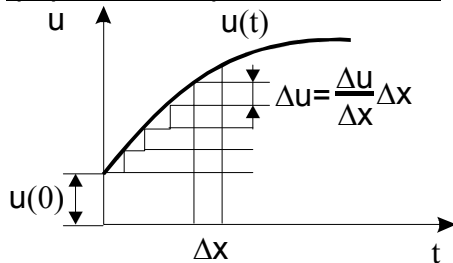
$$h'_{\delta u}(t) = \frac{dh_u(t)}{dt}. \quad (8.8.25)$$

Тук трябва да се има предвид, че последната формула, е в сила при нулева начална стойност на преходната характеристика $h_u(t)$, т.е. ако при $t = 0_+$, то $h(0_+) = 0$.

Ако стойността $h(0_+) \neq 0$, то импулсната характеристика по напрежение $h'_{\delta u}(t)$ се определя по следния начин:

$$h'_{\delta u}(t) = \frac{dh_u(t)}{dt} + \delta(t) \cdot h_u(0_+). \quad (8.8.26)$$

5. Пресмятане на преходните процеси при въздействие на ЕДН с произволна форма. Интеграл на Дюамел



Фиг. 8.8.9.

Разглежда се следната постановка: Пасивна линейна електрическа верига при нулеви начални условия в момент $t = 0$ се включва към непрекъснато изменящо се напрежение $u(t)$ (фиг.8.8.9). Търси се токът или напрежението в произволен клон на веригата.

Действителната крива на напрежението $u(t)$ с приближение може да бъде представена със стъпаловидна крива с елементарен правоъгълен скок Δu на интервал по оста t , равен на Δx . В такъв случай реакцията на веригата, например токът $i(t)$ на входа й, може да се приеме, че се дължи на действието на серия от скоковидни напрежения, изместени едно от друго на интервал от време Δx и имащи знак плюс или минус в зависимост от това, дали кривата на напрежението $u(t)$ е нарастваща или намаляваща.

Първият скок е в момента $t = 0$ и е равен на $u(0)$. Следващите скокове са $\Delta u = \frac{\Delta u}{\Delta x} \Delta x$. Съставката на тока, дължаща се на скока ΔU , е $\Delta U \cdot Y(t - x)$. Тук преходната проводимост се разглежда като функция на аргумента $(t - x)$ тъй като интервалът от време от момента на възникване $t = x$ на скока ΔU до момента t е $(t - x)$. При такава постановка действителният ток $i(t)$ с известно приближение може да бъде представен като сума от съставки, дължащи се на отделните скокове на напрежението $u(t)$, т.е.:

$$i(t) \approx u(0)Y(t) + \sum_{x=0}^{x=t} Y(t-x) \frac{\Delta U}{\Delta x} \Delta x. \quad (8.8.27)$$

При намаляване на интервала Δx стъпаловидната крива на напрежението преминава към зададената крива $u(t)$ и се достига до следния израз за тока:

$$i(t) = u(0)Y(t) + \int_0^t Y(t-x)u'(x)dx. \quad (8.8.28)$$

Формула (8.8.28) носи названието интеграл на Дюамел и позволява определянето на тока при непрекъснато изменение на приложеното напрежение. Тази формула се нарича още първа форма на интеграла на Дюамел.

За получаване на другите форми на интеграла на Дюамел се прилага интегриране по части и теоремата на Борел. Математическият запис на тази теорема е следният:

$$F(p) = F_1(p)F_2(p) \quad \stackrel{!}{=} f(t) = \int_0^t f_1(x)f_2(t-x)dx = \int_0^t f_1(t-x)f_2(x)dx, \quad (8.8.29)$$

където $F_1(p)$ и $F_2(p)$ са операторните образи на функциите $f_1(t)$ и $f_2(t)$.

Ако теоремата на Борел се приложи към формула (8.8.28) се получава втората форма на интеграла на Дюамел:

$$i(t) = u(0)Y(t) + \int_0^t Y(x)u'(t-x)dx. \quad (8.8.30)$$

При интегриране по части на израза $\int_0^t Y(t-x)u'(x)dx$ от формула (8.8.28) се достига до третата форма на интеграла на Дюамел:

$$i(t) = u(t)Y(0) + \int_0^t Y'(t-x)u(x)dx. \quad (8.8.31)$$

Ако теоремата на Борел се приложи към последната формула се получава четвъртата форма на интеграла на Дюамел:

$$i(t) = u(t)Y(0) + \int_0^t Y'(x)u(t-x)dx. \quad (8.8.32)$$

Съществуват още пета и шеста форма на интеграла на Дюамел. Техният запис е съответно следният:

$$i(t) = \frac{d}{dt} \int_0^t u(t-x)Y(x)dx; \quad (8.8.33)$$

$$i(t) = \frac{d}{dt} \int_0^t u(x)Y(t-x)dx. \quad (8.8.34)$$

Ако се извърши диференцирането във формула (8.8.33), се получава първата и втората форма на интеграла на Дюамел. Съответно, ако се извърши диференцирането във формула (8.8.34), се достига до третата и четвъртата форма на интеграла на Дюамел. Ето защо петата и шестата форми на интеграла на Дюамел могат да бъдат разглеждани като съкратен запис на първата или втората, съответно на третата или четвъртата му форми.

Изборът на форма на интеграла на Дюамел зависи от конкретната задача. Ако напрежението $u(t)$ се изменя от нула т.е.: $u(0) = 0$, то първата съставка в първата и втората форма на интеграла на Дюамел ще бъде равна на нула. В случай, че се определя токът в индуктивен клон, т.е. токът не може да се изменя със скок, то:

$Y(0) = 0$. В този случай първата съставка в третата и четвъртата форма на интеграла на Дюамел е равна на нула. Третата и четвъртата форми на интеграла на Дюамел е целесъобразно да бъдат използвани и в случая, когато напрежението $u(t)$ има точки на прекъсване. Така отпада необходимостта от диференциране на функцията с точки на прекъсване.

Пресмятанията например, при използването на първата форма на интеграла на Дюамел се извършват в следния ред:

1. За разглежданата верига се определя проводимостта $Y(t)$. За целта чрез класическия или операторния метод се пресмята токът $i(t)$ от преходния процес включване на веригата към постоянно напрежение U при нулеви начални условия. Проводимостта $Y(t)$ е равна на $i(t)/U$.

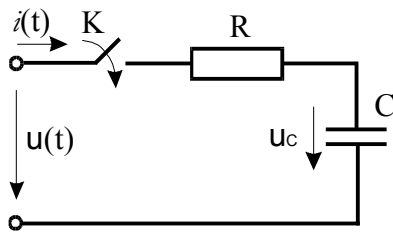
2. Определя се $Y(t - x)$. За целта във формулата за $Y(t)$ се заменя t с $(t - x)$.

3. Определя се $u'(x)$. За целта напрежението $u(t)$ се диференцира по t и в получения израз t се замества с x .

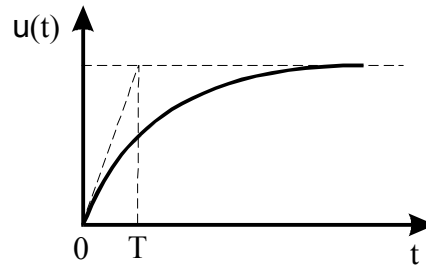
4. Определените в т.т. 1 ... 3 функции се заместват в първата форма на интеграла на Дюамел и се извършва интегриране спрямо променливата x .

За илюстрация се разглежда следният пример: Последователна R, C верига (фиг.8.8.10) при нулеви начални условия се включва към напрежение $u(t) = \frac{U}{1 - e^{-\frac{t}{T}}}$

(фиг.8.8.11). Търси се токът $i(t)$ при преходния процес. Константата T определя



Фиг. 8.8.10.



Фиг. 8.8.11.

скоростта на нарастване на напрежението. Ако $T = 0$, това означава включване на веригата към постоянно напрежение $U = \text{const}$.

За разглежданата верига преходната проводимост е: $Y(t) = \frac{1}{R} e^{-\frac{t}{\tau}}$ ($\tau = RC$ е

времеконстантата на веригата). Съответно за $Y(t - x)$ се записва: $Y(t - x) = \frac{1}{R} e^{-\frac{t-x}{\tau}}$

От израза за напрежението $u(t)$ може да се установи :

$$u(0) = 0 ; u'(t) = \frac{U}{T} e^{-\frac{t}{T}} \text{ и } u'(x) = \frac{U}{T} e^{-\frac{x}{T}}$$

След заместване в първата формула на интеграла на Дюамел за тока $i(t)$ се получава:

$$i(t) = \int_0^t \frac{1}{R} e^{-\frac{t-x}{\tau}} \frac{U}{T} e^{-\frac{x}{T}} dx = \frac{U}{R} \frac{\tau}{T - \tau} \left(e^{-\frac{T}{\tau}} - e^{-\frac{t}{\tau}} \right).$$

За енергията W_R , която се отделя в резистора R във вид на топлина при зареждането на кондензатора, се записва:

$$W_R = \int_0^\infty R i^2 dt = \frac{U^2}{2R} \frac{\tau^2}{\tau + T} = \frac{CU^2}{2} \frac{\tau}{\tau + T}.$$

За отношението на тази енергия към енергията W_e , занесена в електрическото поле на кондензатора, се получава:

$$a = \frac{W_R}{W_e} = \frac{W_R}{\frac{1}{2}CU^2} = \frac{1}{1 + \frac{T}{\tau}},$$

откъдето за к.п.д. η на зарядния процес на кондензатора се достига до израз:

$$\eta = \frac{W_e}{W_e + W_R} = \frac{1}{1 + a}.$$

Таблица 8.8.2

T/τ	a	η
0	1,00	0,50
1	0,50	0,67
2	0,33	0,75
4	0,20	0,83
∞	0,00	1,00

В табл.8.8.2 са преведени стойности на

величините a и η в зависимост от отношението $\frac{T}{\tau}$. От

таблицата може да се установи, че при намаляване скоростта на нарастване на приложеното напрежение, коефициентът η нараства и в граничния

случай при $\frac{T}{\tau} \rightarrow \infty$, то $\eta \rightarrow 1,00$.

8.9. Метод за изследване на преходни процеси чрез променливи на състоянието

1. Общи положения

При изследване на преходни процеси в сложни електрически вериги напоследък все по-широко приложение намира методът с променливи на състоянието. Същността му се състои в следното:

1. Индуктивните токове i_{L_k} и капацитивните напрежения u_{C_m} , а в общия случай пълните магнитни потоци на бобината Ψ_{L_k} и зарядите на кондензаторите q_{C_m} се избират за променливи на състояние. Изборът и названието на тези променливи се свързват с обстоятелството, че те определят енергийното състояние на веригата.

2. Чрез променливите на състоянието се изразяват останалите величини: индуктивните напрежения u_{L_k} , капацитивните токове i_{C_m} и напреженията и токовете в резисторите u_{R_p} и i_{R_p} .

3. За следкомутационната схема по законите на Кирхоф се съставя нехомогенната система уравнения, описващи преходния процес в изследваната верига. Тази система в матричен вид се записва по следния начин:

$$\underline{a}\underline{x} + \underline{b}\frac{d\underline{x}}{dt} = \underline{c}\underline{f}(t), \quad (8.9.1)$$

където $\underline{x}_t = \left[i_{L_1}, i_{L_2}, \dots, i_{L_k}, u_{C_1}, u_{C_2}, \dots, u_{C_m} \right]_t$ е многомерният вектор на променливите на състоянието;

$\underline{a}$, $\underline{b}$ и $\underline{c}$ - постоянни матрици;

$\underline{f}(t)$ - многомерният вектор на външните въздействия.

4. Нехомогенната система уравнения се привежда в нормална форма, т.е. се решава по отношение на първите производни на променливите на състоянието. В матричен вид нормалната ѝ форма се записва по следния начин:

$$\frac{d\underline{x}}{dt} = \underline{A}\underline{x} + \underline{B}\underline{f}(t), \quad (8.9.2)$$

където $\underline{A} = -\underline{b}^{-1}\underline{a}$ и $\underline{B} = \underline{b}^{-1}\underline{c}$.

Матрицата $\underline{A}$ е винаги квадратна, а ако размерите на многомерните вектори $\underline{x}$ и $\underline{f}(t)$ не съвпадат, то матрицата $\underline{B}$ е правоъгълна.

5. Системата уравнения (8.9.2) се интегрира при зададени начални стойности (условия) $i_{L_k}(0_+)$ и $u_{C_m}(0_+)$. Началните стойности на променливите на състоянието се определят въз основа на правилата на комутация непосредствено от установения режим във веригата преди комутацията. Решението на система уравнения (8.9.2) в матричен вид изглежда така:

$$\underline{x}(t) = e^{\underline{A}t} \underline{x}_0 + e^{\underline{A}t} \int_0^t e^{-\underline{A}\tau} \underline{B}\underline{f}(\tau) d\tau . \quad (8.9.3)$$

където $\underline{x}_0 = \underline{x}(0_+)$ е матрицата колона на началните стойности на променливите на състоянието.

Тук основната трудност е свързана с определянето на матричната експонента (преходната матрица) $e^{\underline{A}t}$. За изчисляването ѝ може да бъде използвана формулата на Силвестър:

$$e^{\underline{A}t} = \sum_{k=1}^n \frac{\prod_{s=1}^n (\underline{A} - p_s \cdot \underline{1})}{\prod_{s=1}^n (p_k - p_s)} e^{p_k t} , \quad (8.9.4)$$

където p_s са корените на характеристичното уравнение $\det(p\underline{1} - \underline{A}) = 0$, които са и собствените числа на матрицата $\underline{A}$.

6. Определят се изходните величини, които частично или изцяло могат да се различават от променливите на състоянието. Например, те могат да бъдат индуктивни напрежения u_{L_k} , капацитивни токове i_{C_m} , напрежения и токове в резистори u_{R_p} и i_{R_p} .

За целта изходните величини се разглеждат като елементи на нова матрица $\underline{Y}(t)$ и се изразяват като линейна комбинация от променливите на състоянието и производните им. Като се има в предвид, че производните $\frac{d\underline{x}(t)}{dt}$ се представят чрез променливите на състоянието $\underline{x}(t)$ и външните въздействия $\underline{f}(t)$, то матрицата $\underline{Y}(t)$ може да се запише по следния начин:

$$\underline{Y}(t) = \underline{C}\underline{x}(t) + \underline{D}\underline{f}(t) , \quad (8.9.5)$$

където $\underline{C}$ и $\underline{D}$ са постоянни матрици, в общия случай правоъгълни.

2. Определяне на променливите на състоянието

Както бе споменато по-горе, основната трудност при метода с променливи на състоянието е свързана с определянето на матричната експонента $e^{\underline{A}t}$. При метода с променливи на състоянието е необходимо още да бъдат намерени корените p_s на характеристичното уравнение, което се извършва чрез изчисляване на собствените числа на матрицата $\underline{A}$. Тези процедури са свързани със значителен обем изчисления. Ето защо методът с променливи на състоянието е целесъобразно да бъде прилаган ако се използва компютърна техника.

Решението (8.9.3) на матричното уравнение (8.9.2) е точно, но то е неудобно при използване на компютърна техника. В този случай променливите на състоянието могат да бъдат изчислявани само за някои дискретни стойности на

времето $t_s = sT$ (s е цяло число, а T - стъпката на интегриране). Ако израз (8.9.3) се преработи, може да се достигне до следната формула:

$$\underline{X}_{s+1} = e^{\underline{A}T} \underline{x}_s + e^{\underline{A}T} \int_0^T e^{-\underline{A}\tau} \underline{B} \underline{f}(sT + \tau) d\tau. \quad (8.9.5)$$

Последната формула позволява променливите на състоянието да бъдат определяни за всяка стъпка чрез данните от предшестващата стъпка. При достатъчно малка стъпка T , функцията $\underline{f}(sT + \tau)$ може да бъде апроксимирана с константа $\underline{f}_s$ за t в интервала $sT < t < (s+1)T$, т.е.:

$$\underline{f}(sT + \tau) = \underline{f}(sT) = \underline{f}_s. \quad (8.9.6)$$

В такъв случай от формула (8.9.5) може да бъде получен следният израз:

$$\underline{X}_{s+1} = e^{\underline{A}T} \underline{x}_s + (e^{\underline{A}T} - \underline{1}) \underline{A}^{-1} \underline{B} \underline{f}_s. \quad (8.9.7)$$

Съществено предимство на тази зависимост е, че матричната експонента $e^{\underline{A}T}$ се изчислява еднократно.

Тук следва да се отбележи, че при намаляване на стъпката T , матричната експонента $e^{\underline{A}T}$ се определя с по-малка грешка, а и апроксимацията (8.9.6) е по-точна. От друга страна обаче, броят на стъпките за дадено време t нараства, което води до натрупване на грешки от закръглени.

Изборът на стъпката T може да бъде направен въз основа на следното съображение: Тъй като продължителността на преходния процес в електрическите вериги се обуславя от стойностите на собствените числа на матрицата $\underline{A}$, то ако се

избере $T \leq \frac{C}{|p_{\max}(\underline{A})|}$ се осигурява в известна степен стабилност на изчислителния процес ($p_{\max}(\underline{A})$ е най-голямото собствено число на матрицата $\underline{A}$, а C - константа, равна на 1 или 2). От друга страна, за да се обхване целия преходен процес е необходимо $T_{кр} > 1/|p_{\min}(\underline{A})|$, където $T_{кр}$ е интервалът на интегриране, а $p_{\min}(\underline{A})$ - най-малкото собствено число на матрицата $\underline{A}$.

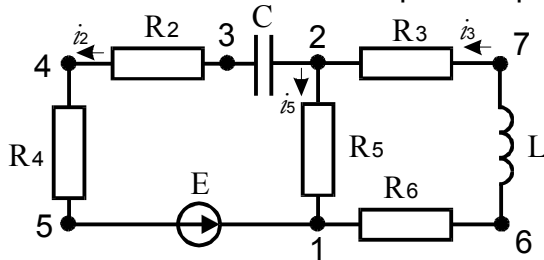
3. Определяне на изходните променливи

Както бе разгледано по-горе, изходните променливи $\underline{Y}(t)$ могат да бъдат представени като линейна комбинация от променливите на състоянието $\underline{x}(t)$ и външните въздействия $\underline{f}(t)$. За намиране на матриците $\underline{C}$ и $\underline{D}$ може да бъде използван методът на резисторната верига. Схемата на тази верига се съставя въз основа на следкомутационната схема на изследваната верига, като всеки кондензатор се заменя с източник на ЕДН с напрежение u_C и посока обратна на посоката на тока i_C , а всяка бобина - с източник на ток с ток i_L и с посока, съвпадаща с посоката на тока i_L .

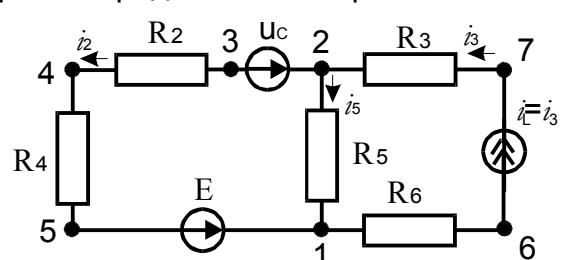
По такъв начин променливотоковата верига се заменя с постояннотокова, за която по някой от методите за анализ на сложни вериги се определят търсените величини $\underline{Y}(t)$. Последните се изразяват чрез променливите на състоянието $\underline{x}(t)$ и външните въздействия $\underline{f}(t)$.

За илюстрация на метода на резисторната верига се разглежда следният пример: За веригата, чиято схема е показана на фиг.8.9.1, да се определи токът $i_2(t)$.

Схемата на съответната резисторна верига е представена на фиг.8.9.2



Фиг. 8.9.1.



Фиг. 8.9.2.

По метода с възлови потенциали за потенциала φ_2 се записва:

$$\varphi_2 \cdot \left(\frac{1}{(R_2 + R_4)} + \frac{1}{R_5} \right) = i_L + \frac{(u_C - E)}{(R_2 + R_4)}.$$

Токът i_2 се определя по обобщения закон на Ом:

$$i_2 = \frac{(\varphi_2 - u_C + E)}{(R_2 + R_4)}.$$

След заместване на потенциала φ_2 , за тока i_2 се достига до изрази:

$$i_2 = \left[\frac{R_5}{(R_2 + R_4 + R_5)(R_2 + R_4)} - \frac{1}{R_2 + R_4} \right] u_C + \frac{R_5}{R_2 + R_4 + R_5} i_L + \left[\frac{R_5}{(R_2 + R_4 + R_5)(R_2 + R_4)} - \frac{1}{R_2 + R_4} \right] E,$$

т.е.: $i_2 = C(1,1)u_C + C(1,2)i_L + D(1,1)E$.

Тук за първа променлива на състоянието е прието напрежението u_C , а за втора променлива на състоянието - токът i_L . Съответното външно въздействие е ЕДН Е.

Елементите на матриците $\underline{C}$ и $\underline{D}$ се въвеждат в компютър и се изчисляват изходните величини (в случая токът $i_2(t)$) чрез променливите на състоянието и външните въздействия за същите моменти от време.

4. Предимства и недостатъци на метода с променливи на състоянието

А. Предимства на метода

1. Това е съвременен метод, пригоден за използване на компютърна техника.
2. Методът е приложим, както за анализ на преходни процеси, така и за изследване на установени режими.
3. Търсеното решение се намира директно в зависимост от началните условия, което позволява влиянието на началните условия да се проследи непосредствено. Освен това дава възможност отделно да се проследи влиянието на външните въздействия върху решението.

4. Матричната форма на решението позволява едновременно да се намерят всички търсени величини.

5. Методът е приложим за изследване на преходните процеси и в нелинейни електрически вериги.

6. Методът позволява за изследваната верига да се състави системата диференциални уравнения от възможно най-нисък ред.

Б. Недостатъци на метода

1. Методът е неприложим при вериги с разпределени параметри.
2. Прилагането на метода е свързано с проблеми от изчислителен характер - някои от елементите на матрицата $\underline{A}$ са нули и тя е несиметрична.
3. При метода съществуват значителни трудности при съставянето на системата уравнения за сложни вериги.

4. При метода съществуват трудности и при изчисляване на матричната експонента $e^{\underline{A}t}$.

ТЕОРЕТИЧНА ЕЛЕКТРОТЕХНИКА - I ЧАСТ

Автори: доц. д-р инж. Никола Колев Армянов
доц. д-р инж. Таня Методиева Стоянова

Рецензент: доц. д-р инж. Емил Николаев Павликянов
Научен редактор: доц. д-р инж. Никола Колев Армянов
Стилов редактор: доц. д-р инж. Таня Методиева Стоянова

Издателски коли: 16 Печатни коли: 32
формат: ; тираж: ; поръчка

По тематичен план за 2001 година
Първо издание

ПЕЧАТНА БАЗА при РУ “АНГЕЛ КЪНЧЕВ” - РУСЕ