доц. д-р инж. Никола К. Армянов
доц. д-р инж. Таня М. Стоянова

ТЕОРЕТИЧНА ЕЛЕКТРОТЕХНИКА
II ЧАСТ

РУСЕНСКИ УНИВЕРСИТЕТ ”АНГЕЛ КЪНЧЕВ”
РУСЕ, 2002 г.

Учебникът по дисциплината “Теоретична електротехника – II част” е предназначен за студентите от редовно и задочно обучение на всички специалности от факултет “Електротехника, електроника и автоматика” при Русенски университет “Ангел Кънчев”. Той може да се използува и от студентите на останалите технически университети в страната.

П Р Е Д Г О В О Р

Учебникът по дисциплината “Теоретична електротехника – II част” има задачата да облекчи, разшири и затвърди теоретичната подготовка на студентите от факултет “Електротехника, електроника и автоматика” при Русенски университет “Ангел Кънчев” по едноименната дисциплина.

Тематиката на разделите е съобразена с утвърдените учебни програми по тази дисциплина и обхваща всички теми на лекционния курс на обучение. Материалът по някои раздели е изложен по-подробно, отколкото това е необходимо за студентите от образователно-квалификационната степен бакалавър, което позволява учебникът да бъде използуван и от студентите от образователно-квалификационната степен магистър. В т.т. 6.17 и 7.10 са разгледани въпроси, свързани с изследователски области на авторите. Тези въпроси третират практически аспекти на приложението на теорията на електрическите вериги и респективно на теорията на електромагнитното поле и авторите смятат, че те ще представляват интерес не само за студентите от II курс, но и за студентите от по-горните курсове.

Разделите на учебника са подготвени от авторите, както следва: раздел 5 - от доц. д-р инж. Т. М. Стоянова, а останалите раздели – от доц. д-р инж. Н. К. Армянов.

Техническото изпълнение на текста е направено от ст. ас. инж. Т. К. Гачовска и студентите Д. И. Иванов, Ц. В. Георгиев, И. С. Димитрова, Д. Д. Стойков, Й. В. Димитров, Т. И. Георгиев, Д. И. Велчев, М. В. Рушкарски, Д. Х. Христов, И. А. Ненков, Т. С. Недялкова, В. С. Вълчев, Х. Б. Хюсеин и Н. Р. Радева.

Илюстративният материал е подготвен от ст. ас. инж. Т. К. Гачовска и студентите Т. И. Илчев, А. А. Ставрев и Й. В. Димитров.

Този учебник отразява дългогодишния труд и опит на авторите му.

Основата на учебника по дисциплината “Теоретична електротехника – II част” е поставена от доц. д-р инж. Г. М. Антонов – дългогодишен преподавател по дисциплината “Теоретична електротехника” в Русенски университет “Ангел Кънчев”, за което авторите му изказват своята дълбока признателност и сърдечна благодарност.

Авторите изказват своята благодарност и на рецензента доц. д-р инж. Е.Н. Павликянов за внимателното прочитане на ръкописа и за направените от него ценни забележки и препоръки.

Като първо издание учебникът не е лишен от пропуски и недостатъци. Поради това молим всички критични бележки, мнения и препоръки да бъдат изпращани на адрес:

7017 Русе, ул. “Студетска” № 8
Русенски университет “Ангел Кънчев”,
Катедра “Теоретична и измервателна електротехника”

АВТОРИТЕ

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Армянов, Н. К. Изследване възможностите за ускоряване узряването на тютюн чрез напречна електроискрова обработка на стъблата на корен. Дисертация, Русе, 1987.
2. Армянов, Н. К., Т. М. Стоянова, Д. В. Киряков и Пл. Ст. Пашев. Изследване на индуктивни преобразуватели на интензитета на нискочестотно електрическо поле. Научни трудове на ВВОВУ “В. Левски”, кн. 26, стр. 276 – 281, В. Търново, 1993.
3. Армянов, Н. К., Т. М. Стоянова и А. К. Кючуков. Изследване на индуктивни преобразуватели на интензитета на нискочестотно електрическо поле във въздушна среда. Научни трудове на ВТУ “А. Кънчев”, т. XXXV, серия 6, стр. 74 - 80, Русе, 1994.
4. Армянов, Н. К., Ив. Й. Палов, Ст. П. Стефанов, Т. М. Стоянова, К. Ал. Сираков и С. Л. Стефанова. Изследване на електрическото съпротивление на клубени на картофи. Селскостопанска техника, кн. 2, стр. 8 – 12 1998.
5. Атабеков, Г. И. Основы теории цепей. Энергия, М., 1969.
6. Атабеков, Г. И. Теоретические основы электротехники. Ч.1, Энергия, М., 1978.
7. Атабеков, Г. И., С. Д. Купалян, А. Б. Тимофеев и С. С. Хухриков. Теоретические основы электротехники. Ч. 2 и 3, Энергия, М., 1978.
8. Бессонов, Л. А. Теоретические основы электротехники. Электрические цепи. Высшая школа, М., 1984.
9. Бессонов, Л. А. Теоретические основы электротехники. Электромагнитное поле. Высшая школа, М., 1986.
10. Генов, Л. Г. Теоретични основи на електротехниката. Техника, С., 1991.
11. Гордиенко, В. И., Н. И. Калашников и К. Д. Надточий. Измерение низкочастотных вихровых электрических полей. Наукова думка, Киев, 1975.
12. Жуховицкий Б. Я. и И. Б. Негневцкий. Теоретические основы электротехники. Ч. 2, Энергия, М. 1972.13.
13. Зевеке, Г. В , П. А.. Йонкин, А. В. Нетушил и С. В. Страхов. Основы теории цепей. Энергия, М., 1975.
14. Златев, М. П. Теоретична електротехника. Т.2, Техника, С., 1973.
15. Златев, М. П. Теоретична електротехника. Т.3, Техника, С., 1975.
16. Козарев, А. Ст. и Ст. Ат. Стефанов. Теоретични основи на електротехниката. Ч.1., Техника, С., 1978.
17. Козарев, А. Ст. и Ст. Ат. Стефанов. Теоретични основи на електротехниката. Ч.2., Техника, С., 1982.
18. Нейман, Л. Р. и К. С. Демирчян. Теоретические основы электротехники. Т.1 и II., Энергоиздат, Л., 1981.
19. Папазов, С. П. и С. Л. Фархи. Теоретична електротехника. Ч. 3., Техника, С., 1988.
20. Поливанов, К. М. Теоретические основы электротехники. Ч.1., Энергия, М., 1972.
21. Поливанов, К. М. Теоретические основы электротехники. Ч.3., Энергия, М., 1975.
22. Савов С. В. Теоретична електротехника. Ч.2. Електрически вериги. Колор принт, Варна, 1999.
23. Фархи, С. Л. Теория на електрическите вериги. Техника, С., 1972.

24. Фархи, С. Л., С. П. Папазов. Теоретична електротехника. Ч.1, Техника, С., 1987.
25. Фархи, С. Л., С. П. Папазов. Теоретична електротехника. Ч.2, Техника, С., 1990.
26. Филиппов, Е. Нелинейная электротехника. Пер. с нем., Энергия, М., 1976.
27. Armyanov, N.K., V. I. Baev, V. N. Savchuk, M. F. Diprose, S. L. Stefanova, T. M. Stoyanova & N. As. Nedyalkov. Basic treatment parameters in electric spark processing of plants and their impact upon its effectiveness. Agricultural engineering. Research papers, Vol. 31(3), Raundondvaris, 1999.

С Ъ Д Ъ Р Ж А Н И Е

стр.

ПРЕДГОВОР 3
ЛИТЕРАТУРА. 4
СЪДЪРЖАНИЕ 6
I. ТРИФАЗНИ ВЕРИГИ 8
1.1. Многофазни вериги - основни понятия и класификации. Основни съединения на трифазните вериги 8
1.2. Анализ на трифазни вериги при симетричен и несиметричен режим . . . 11
1.3. Метод на симетричните съставки 14
1.4. Приложение на метода на симетричните съставки 17
1.5. Въртящо се магнитно поле 21
1.6. Висши хармоници в трифазните вериги 22
II. ЧЕТИРИПОЛЮСНИЦИ 24
2.1. Четириполюсници – основни понятия. Уравнения на пасивен четириполюсник 24
2.2. Експериментално определяне на параметрите на четириполюсника . . 28
2.3. Еквивалентни схеми на четириполюсника 30
2.4. Уравнения на четириполюсника в матрична форма. Верижно, последователно, паралелно и смесено съединения на четириполюсници. Регулярност на съединението на четириполюсници 31
2.5. Предавателни функции на пасивни четириполюсници.. Обратни връзки. Диференциращи и интегриращи вериги 38
2.6. Характеристични параметри на пасивни четириполюсници 44
2.7. Верижни схеми 49
2.8. Характеристични параметри на еквивалентните схеми на пасивни четириполюсници 50
2.9. Активни четириполюсници 52
III. ЕЛЕКТРИЧЕСКИ ФИЛТРИ 56
3.1. Електрически филтри – основни понятия и класификации. Реактивни електрически филтри – общи теоретични положения 56
3.2. Нискочестотни реактивни електрически филтри тип κ 64
3.3. Нискочестотни реактивни електрически филтри тип m 67
3.4. Високочестотни, лентови и заграждащи реактивни филтри тип κ 73
IV. МНОГОПОЛЮСНИЦИ 79
4.1. Многополюсници – общи положения 79
4.2. Z - и Y - системи уравнения на многополюсник 80
4.3. Натоварен активен многополюсник 82
V. ЕЛЕКТРИЧЕСКИ ВЕРИГИ С РАЗПРЕДЕЛЕНИ ПАРАМЕТРИ 85
5.1. Електрически вериги с разпределени параметри – основни понятия и класификации. Опростена теория 85
5.2. Диференциални уравнения на еднородна линия 87
5.3. Установен синусоидален процес в еднородна двупроводна линия 89
5.4. Бягащи вълни 92
5.5. Линия без изкривявания 96
5.6. Режими на работа на еднородна линия 97
5.7. Линия без загуби 101
5.8. Преходни процеси в еднородна линия 119
VI. НЕЛИНЕЙНИ ЕЛЕКТРИЧЕСКИ ВЕРИГИ 134
6.1. Нелинейни електрически вериги. Елементи. Параметри 134
6.2. Постоянни режими в нелинейни електрически вериги. Графични методи за анализ на вериги с последователно, паралелно и смесено съединение

стр.
на участъци, съдържащи нелинейни елементи 137
6.3. Приложение на теорията на активните многополюсници за анализ на постоянни режими в нелинейни електрически вериги 143
6.4. Периодични режими в нелинейни електрически вериги с инерционни нелинейни елементи. Метод на последователните приближения 148
6.5. Периодични режими в електрически вериги с безинерционни нелинейни елементи. Метод на еквивалентните синусоиди 151
6.6. Бобина с феромагнитна сърцевина. Векторна диаграма и еквивалентна заместваща електрическа схема. Комплексно магнитно съпротивление и комплексна магнитна проницаемост 154
6.7. Ферорезонанс при последователно и паралелно съединени бобина с феромагнитна сърцевина и кондензатор 156
6.8. Феромагнитни стабилизатори на напрежение и усилватели на мощност 159
6.9. Метод на хармоничния баланс 162
6.10. Метод с отрезово-линейна апроксимация 168
6.11. Преходни процеси в нелинейните електрически вериги. Метод на графичното интегриране 175
6.12. Метод на аналитичната апроксимация 178
6.13. Метод на последователните интервали 181
6.14. Метод на условната линеаризация на уравнението на верига 182
6.15. Метод на фазовата равнина 184
6.16. Устойчивост на нелинейните електрически вериги 188
6.17. Растителната тъкан като електрически обект 194
VII. ТЕОРИЯ НА ЕЛЕКТРОМАГНИТНОТО ПОЛЕ 206
7.1. Уравнения на Максуел в интегрална и диференциална форма 206
7.2. Ток на разместване в пустотата 214
7.3. Следствия от уравненията на Максуел 217
7.4. Скаларен и векторен потенциал. Обобщение на интензитета на електрическото поле 219
7.5. Постоянно електрическо поле в поляризуема среда 226
7.6. Постоянно магнитно поле в среда с магнитна поляризация 234
7.7. Потенциални полета. Метод с разделяне на променливите 239
7.8. Поляризиран елипсоид. Размагнитващи фактори. Коефициенти на деполяризация 243
7.9. Метод с огледални образи 248
7.10. Метод на функцията на комплексната променлива 251
7.11. Потенциални и зарядни коефициенти. Частични капацитети 255
7.12. Електромагнитни параметри. Общи положения 258
7.13. Преобразуване на енергията в електромагнитното поле 263
7.14. Предаване на енергията на електромагнитното поле по двупроводна линия и чрез трансформатор 267
7.15. Теорема на Пойнтинг - Хевисайд в комплексна форма 269
7.16. Променливо електромагнитно поле в диелектрик и проводяща среда 270
7.17. Понятие за излъчване на електромагнитни вълни. Закъсняващи потенциали 275
7.18. Излъчване на електрически дипол 278
7.19. Вектори на Херц. Принцип на взаимността 284

I. ТРИФАЗНИ ВЕРИГИ

Встъпителни бележки

В раздела се дават основните понятия и класификации на многофазните вериги и основните съединения на трифазните вериги. Разглежда се анализът на трифазните вериги при симетричен и несиметричен режим, а също така методът на симетричните съставки като се привеждат примери с използване на този метод. В раздела се разглеждат също и въпроси, свързани с получаването на въртящо се магнитно поле и с висшите хармоници в трифазните вериги.

1.1. Многофазни вериги - основни понятия и класификации. Основни съединения на трифазните вериги

А) Многофазни вериги и системи – основни понятия

При разглеждането на сложни вериги обикновено не се уточнява броят на източниците на ЕДН нито началните им фази, т.е. фазовите разлики между отделните ЕДН. При такава постановка източниците, респективно техните ЕДН се разглеждат като самостоятелни и независими един от друг. Ако се приеме, че всички ЕДН имат една и съща ъглова честота, фазово са отместени едно спрямо друго и се произвеждат в един източник на електрическа енергия, то такъв източник се нарича многофазен. Въз основа на това определение следва, че многофазният източник има няколко извода, към които се включват отделни вериги. Съвкупността от електрически вериги, свързани към многофазен източник, носи названието многофазна верига.

Многофазният генератор съдържа няколко намотки, в които се индуктират ЕДН. Прието е всяка от намотките да се нарича фаза, така че под понятието фаза освен аргументът на синусоидалната величина се разбира още и намотката на многофазен генератор. Понякога не съвсем прецизно фази се наричат проводниците на предавателните линии.

Прието е броят на фазите на многофазната верига да се означава с "m". Най-голямо разпространение са намерили многофазните вериги, респективно многофазните източници при $m = 3$. Трифазните генератори имат три намотки,поместени в специално изработени за целта канали на статора, като осите им са отместени в пространството на ъгъл $2\pi/3$ при двуполюсен генератор или на ъгъл $2\pi/3p$ при генератор с брой на чифтовете полюси, равен на p.

Съвкупностите от ЕДН, действуващи във фазите на многофазните вериги, също така съвкупностите от токове и напрежения в многофазните вериги е прието да се наричат многофазни системи от ЕДН, съответно от токове и напрежения.

Б) Класификация на многофазните вериги и системи

Известни са няколко класификации на многофазните вериги и системи. По-долу се дават основните класификации.

I. Първа класификация

Тази класификация се отнася за многофазните вериги и се прави в зависимост от това дали отделните фази са свързани помежду си или не. Според нея многофазните вериги биват: свързани и несвързани. В практиката най-голямо приложение са намерили свързаните трифазни вериги.

II. Втора класификация

Тази класификация се отнася също за многофазните вериги и се прави в зависимост от броя на фазите. Според нея многофазните вериги биват: двуфазни, трифазни и многофазни.

III. Трета класификация

Тази класификация се отнася както за многофазните вериги, така и за многофазните системи. Според нея те биват: симетрични и несиметрични. При симетричната многофазна верига параметрите на елементите в различните фази са

еднакви. При многофазните системи, например, при многофазните системи от ЕДН класификацията се прави в зависимост от максималната стойност на фазните ЕДН и фазовото отместване между тях. В случай на трифазни вериги под симетрична система се разбира такава трифазна система от ЕДН, при която максималните стойности на фазните ЕДН са равни, а фазовото отместване между тях е равно на $q.2\pi/3$, където $q = 0, 1, 2$.

В зависимост от стойността на q са въведени понятията :

$q = 0$ – трифазна система с нулева последователност;

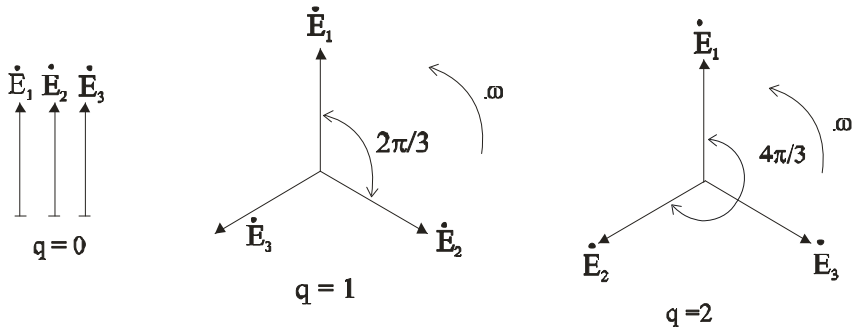
$q = 1$ – трифазна система с права последователност (директна система);

$q = 2$ – трифазна система с обратна последователност (индиректна система).

Трите вида трифазни симетрични системи на фазните ЕДН се записват по следния начин:

- за системата с нулева последователност:

$$\begin{vmatrix} e_1 = E_m \sin(\omega t + \psi_e); \\ e_2 = E_m \sin(\omega t + \psi_e); \\ e_3 = E_m \sin(\omega t + \psi_e). \end{vmatrix} \quad (1.1.1)$$



Фиг.1.1.1

- за системата с права последователност:

$$\begin{vmatrix} e_1 = E_m \sin(\omega t + \psi_e); \\ e_2 = E_m \sin(\omega t + \psi_e - 2\pi/3); \\ e_3 = E_m \sin(\omega t + \psi_e - 4\pi/3). \end{vmatrix} \quad (1.1.2)$$

- за системата с обратна последователност:

$$\begin{vmatrix} e_1 = E_m \sin(\omega t + \psi_e); \\ e_2 = E_m \sin(\omega t + \psi_e + 2\pi/3); \\ e_3 = E_m \sin(\omega t + \psi_e + 4\pi/3). \end{vmatrix} \quad (1.1.3)$$

В комплексен вид трите системи от фазни ЕДН се записват така :

- за системата с нулева последователност:

$$\dot{E}_1 = \dot{E}_2 = \dot{E}_3 = E.e^{j\psi_e},$$

където $E = E_m/\sqrt{2}$. (1.1.4)

- за системата с права последователност:

$$\dot{E}_1 = E.e^{j\psi_e}; \ \dot{E}_2 = \dot{E}_1 e^{-j\frac{2\pi}{3}}; \ \dot{E}_3 = \dot{E}_1 e^{-j\frac{4\pi}{3}}; \quad (1.1.5)$$

- за системата с обратна последователност:

$$\dot{E}_1 = E.e^{j\psi_e}; \ \dot{E}_2 = \dot{E}_1 e^{-j\frac{4\pi}{3}}; \ \dot{E}_3 = \dot{E}_1 e^{-j\frac{2\pi}{3}}. \quad (1.1.6)$$

Трите системи от фазни ЕДН могат да бъдат изобразени с комплексни вектори. Това е илюстрирано на фиг.1.1.1 за случая при $\psi_e = 0$.

За системите с права и обратна последователност при $m > 2$ може да се докаже равенството: $\sum_{к=1}^{m} \dot{E}_к = 0$, което за трифазните системи $(m = 3)$ се записва така: $\sum_{к=1}^{3} \dot{E}_к = 0$. И действително, тези системи образуват симетрични звезди, т.е. се изобразяват във вид на симетрични звездообразни векторни диаграми.

Ако максималните стойности и (или) фазовите отмествания между отделните фазни ЕДН са различни, т.е. условията за симетричност са нарушени заедно (или поотделно), то многофазните системи са несиметрични.

IV. Четвърта класификация

Тази класификация се отнася за многофазните вериги и се прави в зависимост от това, дали сумарната моментна мощност е постоянна или е функция на времето. Според нея многофазните вериги биват уравновесени и неуравновесени. Дали една многофазна верига е уравновесена или не, е от съществено значение от гледна точка на експлоатацията. Например, при уравновесените вериги моментът на вала на двигателя е постоянен, а при неуравновесеност той пулсира с удвоена честота. И действително, за моментната мощност на к-та фаза при трифазна верига се записва:

$$p_к = e_к i_к = E_m \sin[\omega t - (к-1)\frac{2\pi}{3}].I_m \sin[\omega t - (к-1)\frac{2\pi}{3} - \varphi] =$$

$$= EI\cos\varphi - EI\cos[2\omega t - (к-1)\frac{2\pi}{3} - \varphi]. \qquad (1.1.7)$$

След сумиране на всички моментни мощности се получава:

$$p = \sum_{K=1}^{3} p_K = \sum_{K=1}^{3} EI\cos\varphi = 3EI\cos\varphi = P = const. \qquad (1.1.8)$$

При сумирането на вторите членове на уравненията от вида (1.1.7) се получава нула, тъй като тези членове образуват симетрична система.

От уравнение (1.1.8) може да се заключи, че моментната мощност на трифазната уравновесена верига е постоянно число. Ако системата от фазни ЕДН е несиметрична, за да се получи уравновесяване, отделните фази се натоварват неравномерно. При такова натоварване в някои от фазите могат да се получат отрицателни активни съпротивления на консуматора, поради което в тези фази се включват допълнителни източници на енергия.

В) Основни свързвания на трифазните вериги

Съществуват два основни начина на свързване на трифазните вериги: свързване в звезда и свързване в триъгълник.

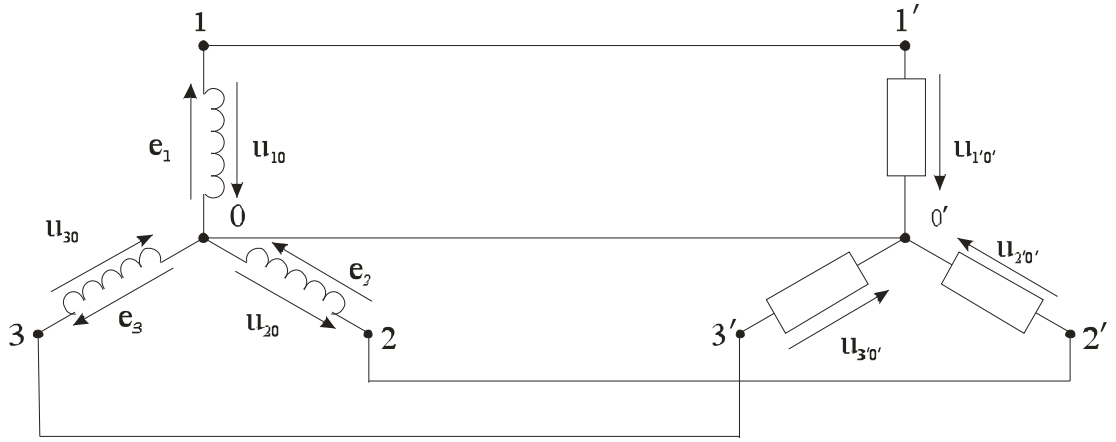
Свързването в звезда е показано на фиг.1.1.2. То се характеризира с това, че началата на трите намотки на генератора са свързани в една точка, която се нарича “звезден център” или “нулева точка”, или още “неутрална точка“. Консуматорът е свързан също в звезда.

Проводниците, свързващи краищата (изводите) на консуматора с изводите на генератора се наричат линейни, а проводникът, свързващ неутралните точки на консуматора и генератора – неутрален.

Токовете, преминаващи от източника към консуматора по линейните проводници се наричат линейни. Те се сумират в неутралната точка на консуматора и сумата им се връща в генератора по неутралния проводник.

Линейните токове образуват звезда и при симетричен генератор и консуматор сумата им е равна на нула. Поради това при симетрия токът в неутралния проводник е равен на нула. Тъй като този ток представлява геометрична сума от

линейните токове, то даже и при много големи несиметрии стойността му е по-малка



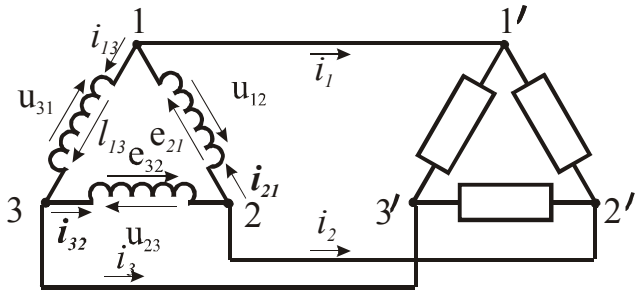
Фиг.1.1.2

от стойността на кой да е от линейните токове. Ето защо сечението на неутралния проводник винаги е по-малко от това на линейните проводници.

Във фазите на генератора и консуматора преминават така наречените "фазни токове". При свързването в звезда линейните проводници представляват пряко продължение на фазите на генератора. Ето защо фазните и линейните токове при това свързване са равни.

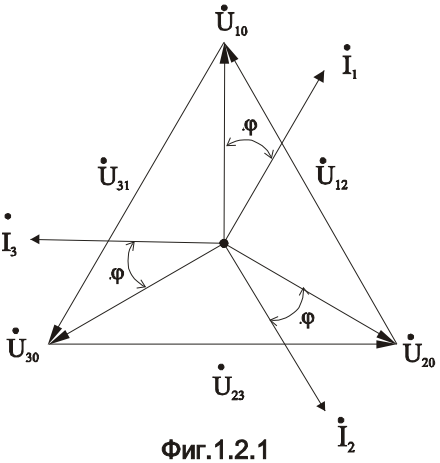
Напреженията между края и началото на всяка фаза се наричат фазни, а напреженията между краищата на кои да е две фази – линейни. При свързването в звезда фазните и линейните напрежения не са равни.

Би могло всяка фаза на консуматора да се свърже чрез два самостоятелни проводника към съответна фаза на генератора. В случая това не е необходимо, тъй като началата на фазите на генератора и съответно на консуматора са свързани в една точка. Освен това при симетрия неутралният проводник е даже излишен, тъй като през него не преминава ток. Необходимостта от този проводник се обуславя само в случай на поява на евентуална несиметрия.



Фиг.1.1.3

Свързването в триъгълник е показано на фиг.1.1.3. То се характеризира с това, че краят на първа фаза е свързан с началото на втора фаза, краят на втора фаза – с началото на трета фаза, а нейният край с началото на първа фаза. Така трите фази на генератора образуват затворен контур. Точките на свързване на началата и краищата на фазите образуват изводите на генератора, към които чрез линейни проводници се свързват изводите на консуматора. При свързването в триъгълник липсва неутрална точка, а оттам отпада и необходимостта от неутрален проводник, така че консуматорът се свързва към генератора само чрез трите линейни проводника.



Фиг.1.2.1

При свързването в триъгълник може да се отбележи, че фазните и линейните напрежения са равни, докато фазните и линейните токове се различават помежду си.

1.2. Анализ на трифазни вериги при симетричен и несиметричен режим

А) Анализ на трифазни вериги при симетричен режим

Отначало се разглежда симетричен режим при свързване в звезда. Векторната диаграма на комплексните фазни и линейни напрежения и фазни токове е представена на фиг.1.2.1.

Тъй като се разглежда симетричен режим фазните напрежения и фазните токове образуват симетрични звезди. В случая товарът има активно-индуктивен характер и фазните токове изостават от фазните напрежения на ъгъл φ .

Поради симетрията токът $\dot{I}_0$ в неутралния проводник е равен на нула, т.е. :

$$\dot{I}_0 = \dot{I}_1 + \dot{I}_2 + \dot{I}_3 = 0 \qquad (1.2.1)$$

Линейните напрежения се определят като разлики от фазните напрежения, т.е.:

$$\dot{U}_{12} = \dot{U}_{10} - \dot{U}_{20};\ \dot{U}_{23} = \dot{U}_{20} - \dot{U}_{30};\ \dot{U}_{31} = \dot{U}_{31} - \dot{U}_{10}. \qquad (1.2.2)$$

От фиг.1.2.1. може да се види, че линейните напрежения образуват равностранен триъгълник. Въз основа на това се достига до следната връзка между линейните и фазните напрежения (за удобство фазните величини се означават с индекс "ф", а линейните величини – с индекс "л") :

$$U_{Л} = 2U_{ф}\cos 30^{\circ} = \sqrt{3}U_{ф}, \qquad (1.2.3)$$

т.е. линейното напрежение е $\sqrt{3}$ пъти по-голямо от фазното напрежение.

За активната мощност на генератора се записва :

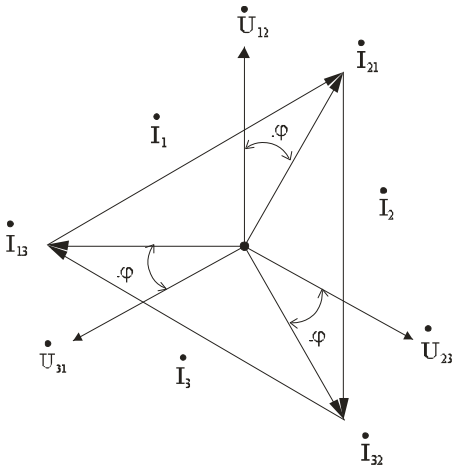
$$P = 3.U_{ф}I_{ф}\cos\varphi. \qquad (1.2.4)$$

Като се има в предвид, че при свързването в звезда фазните и линейните токове са равни , т.е.: $I_{ф} = I_{л}$, то активната мощност може да бъде изразена и чрез линейните напрежения и токове, т.е. :

$$P = \sqrt{3}.U_{л}I_{л}\cos\varphi. \qquad (1.2.5)$$

Аналогично за реактивната мощност се записва :

$$Q = 3U_{ф}.I_{ф}\sin\varphi = \sqrt{3}.U_{л}I_{л}\sin\varphi. \qquad (1.2.6)$$



Фиг.1.2.2

Оттук пълната мощност ще бъде:

$$S = 3U_{ф}.I_{ф} = \sqrt{3}U_{л}I_{л}. \qquad (1.2.7)$$

По-нататък се разглежда симетричен режим при свързване в триъгълник. Векторната диаграма на комплексните фазни и линейни токове и фазни напрежения е представена на фиг.1.2.2. Тук фазните и линейните напрежения са равни и образуват симетрична звезда. Поради активно-индуктивния характер на товара, фазните токове изостават от фазните напрежения на ъгъл φ .

Линейните токове се определят като разлики от фазните токове, т.е.:

$$\dot{I}_1 = \dot{I}_{21} - \dot{I}_{13};\ \dot{I}_2 = \dot{I}_{32} - \dot{I}_{21};\ \dot{I}_3 = \dot{I}_{13} - \dot{I}_{32}. \qquad (1.2.8)$$

От фиг.1.2.2. може да се види, че линейните токове образуват равностранен триъгълник. Оттук може да се заключи, че те са $\sqrt{3}$ пъти по-големи от фазните токове, т.е.:

$$I_л = 2\,I_ф \cos 30^\circ = \sqrt{3}.I_ф\,. \qquad (1.2.9)$$

Ако се направи сравнение между съединенията “звезда” и “триъгълник” може да се установи, че изразите за мощностите при съединението “триъгълник” ще бъдат същите, както при съединението “звезда”, т.е.:

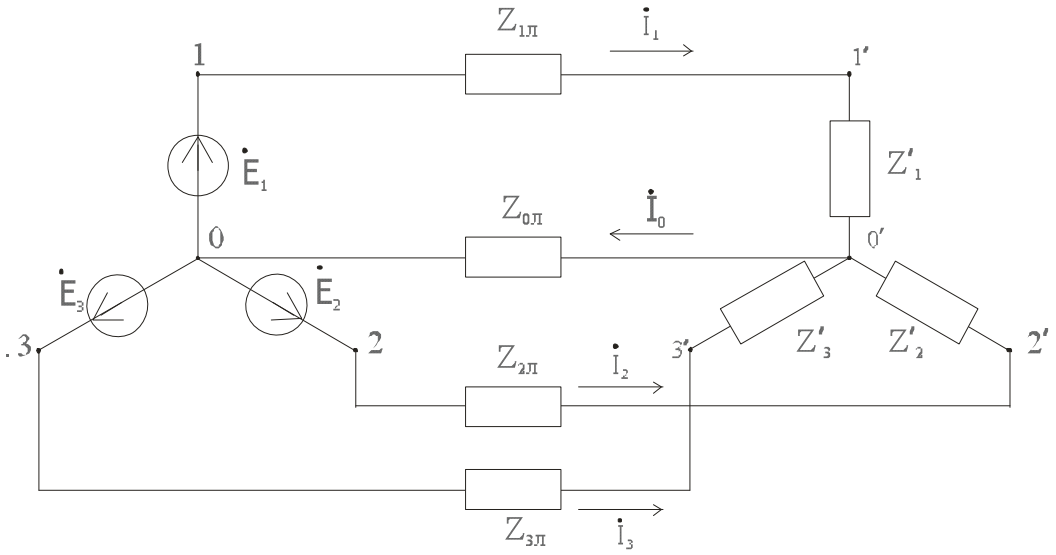
$$\begin{aligned} P &= 3.U_ф I_ф \cos\varphi = \sqrt{3}.U_л I_л \cos\varphi\,; \\ Q &= 3.U_ф I_ф \sin\varphi = \sqrt{3}.U_л I_л \sin\varphi\,; \\ S &= 3.U_ф I_ф = \sqrt{3}.U_л I_л\,. \end{aligned} \qquad (1.2.10)$$

Б) Анализ на трифазни вериги при несиметричен режим

При анализа на трифазни вериги при несиметричен режим се въвеждат следните ограничения :

- товарът е статичен, т.е. отсъствуват електродвигатели;
- падовете на напрежение в генератора се пренебрегват.

При тези ограничения трифазната верига може да бъде разглеждана като сложна верига, за анализа на която може да бъде приложен кой да е от методите за анализ на сложни електрически вериги. В случай, че генераторът и консуматорът са свързани в звезда (фиг.1.2.3), веригата съдържа само два възела и най-удобен за анализа й е методът с възлови потенциали.



Фиг1.2.3

Ако се приеме, че потенциалът на неутралната точка на генератора е равен на нула, т.е.: $\dot{\varphi}_0 = 0$, то за напрежението между двете неутрални точки може да се запише:

$$\dot{U}_{0'0} = (\dot{E}_1 Y_1 + \dot{E}_2 Y_2 + \dot{E}_3 Y_3)/(Y_1 + Y_2 + Y_3 + Y_0)\,, \qquad (1.2.11)$$

където Y_1, Y_2, Y_3, Y_0 са проводимостите на клоновете на веригата.

Тези проводимости се определят от изразите:

$$Y_1 = \frac{1}{Z'_1 + Z_{1л}};\quad Y_2 = \frac{1}{Z'_2 + Z_{2л}};\quad Y_3 = \frac{1}{Z'_3 + Z_{3л}} \text{ и } Y_0 = \frac{1}{Z_0}. \qquad (1.2.12)$$

Оттук за линейните токове и тока през неутралния проводник се записва:

$$\dot{I}_1 = (\dot{E}_1 - \dot{U}_{0'0}).Y_1;\ \dot{I}_2 = (\dot{E}_2 - \dot{U}_{0'0}).Y_2;\ \dot{I}_3 = (\dot{E}_3 - \dot{U}_{0'0}).Y_3 \text{ и } \dot{I}_0 = \dot{U}_{0'0}.Y_0. \qquad (1.2.13)$$

Ако неутралният проводник липсва, то проводимостта $Y_0 = 0$ и изразът за напрежението $\dot{U}_{0'0}$ добива вида :

$$\dot{U}_{0'0} = (\dot{E}_1 Y_1 + \dot{E}_2 Y_2 + \dot{E}_3 Y_3)/(Y_1 + Y_2 + Y_3). \qquad (1.2.14)$$

Ако съпротивленията на намотките на генератора се приемат равни на нула, то тогава фазните напрежения на генератора са равни на фазните ЕДН, т.е.: $\dot{U}_{10} = \dot{E}_1; \dot{U}_{20} = \dot{E}_2$ и $\dot{U}_{30} = \dot{E}_3$. При тази постановка за напрежението $\dot{U}_{0'0}$ може да се запише :

$$\dot{U}_{0'0} = (\dot{U}_{10} Y_1 + \dot{U}_{20} Y_2 + \dot{U}_{30} Y_3)/(Y_1 + Y_2 + Y_3). \qquad (1.2.15)$$

При липса на неутралния проводник се задават не фазните, а линейните напрежения. Като се има в предвид, че тяхната сума е равна на нула (това е сумата от напрежения в затворения контур, съединяващ изводите на генератора), т.е.: $\dot{U}_{12} + \dot{U}_{23} + \dot{U}_{31} = 0$, то е достатъчно да се знаят само две линейни напрежения.

Нека например са известни напреженията $\dot{U}_{12}$ и $\dot{U}_{31}$. Може да се смята, че тези напрежения се дължат на два източника на ЕДН $\dot{U}_{21} = \dot{E}_{12}$ и $\dot{U}_{31} = \dot{E}_{13}$. Това е равносилно да се приеме, че във втора и трета фаза са включени източници на ЕДН $\dot{E}_2 = \dot{E}_{12}$ и $\dot{E}_3 = \dot{E}_{13}$, и че неутралната точка е преместена от точка 0 в точка 1. При такава постановка фазното напрежение $\dot{U}_{10} = \dot{U}_{11} = 0$, т.е. първият член в числителя на формула (1.2.15) става равен на нула, а за останалите две фазни напрежения се записва: $\dot{U}_{20} = \dot{U}_{21}$ и $\dot{U}_{30} = \dot{U}_{31}$.

Оттук за напрежението $\dot{U}_{0'0}$ се достига до израза:

$$\dot{U}_{0'0} = \dot{U}_{1'0} = (\dot{U}_{21} Y_2 + \dot{U}_{31} Y_3)/(Y_1 + Y_2 + Y_3). \qquad (1.2.16)$$

Токовете в линейните проводници се определят по формулите:

$$\begin{aligned} \dot{I}_1 &= -Y_1 \dot{U}_{0'0}; \\ \dot{I}_2 &= Y_2(\dot{E}_2 - \dot{U}_{0'0}) = Y_2(\dot{U}_{21} - \dot{U}_{0'0}); \\ \dot{I}_3 &= Y_3(\dot{E}_3 - \dot{U}_{0'0}) = Y_3(\dot{U}_{31} - \dot{U}_{0'0}). \end{aligned} \qquad (1.2.17)$$

Ако консуматорът е свързан в триъгълник, той се преобразува в еквивалентна звезда, а след това се процедира както в случая при липса на неутрален проводник.

В случай на наличие на индуктивна връзка между проводниците или фазите на консуматора, то тя се отчита аналогично както при анализа на електрически вериги с индуктивна връзка.

1.3. Метод на симетричните съставки

Методът на симетричните съставки намира широко приложение при анализа на несиметрични режими в трифазните вериги. Същността му се състои в това , че всеки несиметричен режим в трифазните вериги, характеризиращ се със съответни ЕДН, токове и напрежения, може да бъде представен като сума от три симетрични системи на тези величини. Симетричните системи се наричат симетрични съставки и представляват системите с нулева, права и обратна последователност.

За удобство при по-нататъшно разглеждане фазните величини вместо с индекси 1, 2 и 3 се означават с индекси A, B и C. И така, дадена е несиметрична система от фазни ЕДН $\dot{E}_A$, $\dot{E}_B$ и $\dot{E}_C$. Приема се, че всяко ЕДН представлява сума от три симетрични съставки, т.е. от три симетрични системи – с нулева, права и обратна последователност.

При представяне на симетричните съставки е удобно да се използува комплексният множител “a”, наречен оператор на Щайнмец. Той се дава с израза:

$$a = e^{j\frac{2\pi}{3}} = e^{-j\frac{4\pi}{3}} = \cos\frac{2\pi}{3} + j\sin\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2} \ . \qquad (1.3.1)$$

За a^2, a^3 и a^4 се записва :

$$\left|\begin{array}{l} a^2 = e^{j\frac{4\pi}{3}} = e^{-j\frac{2\pi}{3}} = \cos\frac{4\pi}{3} + j\sin\frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2}; \\ a^3 = e^{j2\pi} = \cos 2\pi + j\sin 2\pi = 1; \\ a^4 = a \ . \end{array}\right. \qquad (1.3.2)$$

От горните изрази следва равенството:

$$1 + a + a^2 = 0 \ . \qquad (1.3.3)$$

С помощта на комплексния множител a ЕДН на трите фази се изразяват по следния начин:

$$\dot{E}_{A0} = \dot{E}_0; \ \dot{E}_{B0} = \dot{E}_0; \ \dot{E}_{C0} = \dot{E}_0; \qquad (1.3.4)$$

$$\dot{E}_{A1} = \dot{E}_1; \ \dot{E}_{B1} = a^2\dot{E}_1; \ \dot{E}_{C1} = a\dot{E}_1; \qquad (1.3.5)$$

$$\dot{E}_{A2} = \dot{E}_2; \ \dot{E}_{B2} = a\dot{E}_2; \ \dot{E}_{C2} = a^2\dot{E}_2 . \qquad (1.3.6)$$

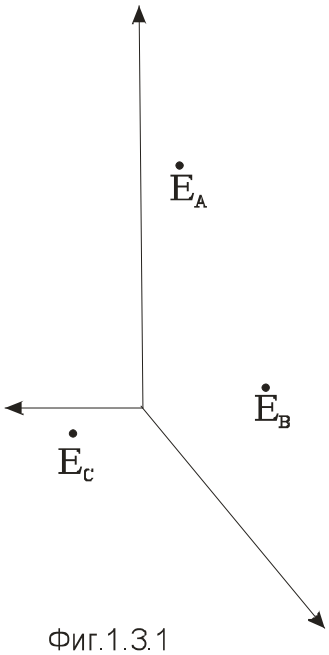
Горните три уравнения представляват трите симетрични съставки с нулева, права и обратна последователност. Например, уравнение (1.3.5) дава симетричната система с права последователност. И действително, ако $\dot{E}_{A1} = \dot{E}_1$, то: $\dot{E}_{B1} = \dot{E}_{A1}e^{j\frac{4\pi}{3}} = a^2\dot{E}_{A1} = a^2\dot{E}_1$, респективно: $\dot{E}_{C1} = \dot{E}_{A1}e^{j\frac{4\pi}{3}} = a\dot{E}_{A1} = a\dot{E}_1$.

Въз основа на уравнения (1.3.4) ... (1.3.6) фазните ЕДН на несиметричната трифазна система могат да бъдат изразени с помощта на трите симетрични съставки по следния начин:

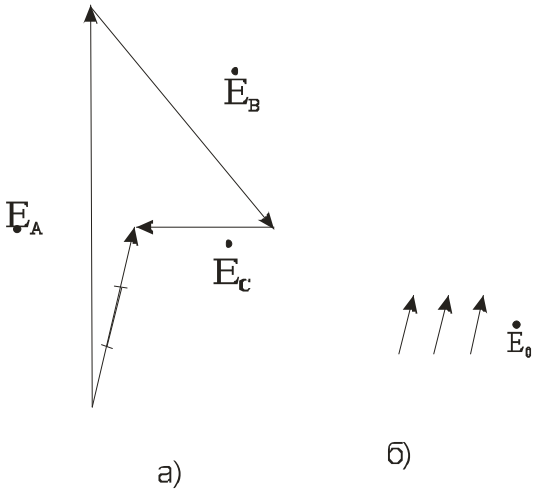
$$\left|\begin{array}{l} \dot{E}_A = \dot{E}_{A0} + \dot{E}_{A1} + \dot{E}_{A2} = \dot{E}_0 + \dot{E}_1 + \dot{E}_2; \\ \dot{E}_B = \dot{E}_{B0} + \dot{E}_{B1} + \dot{E}_{B2} = \dot{E}_0 + a^2\dot{E}_1 + a\dot{E}_2; \\ \dot{E}_C = \dot{E}_{C0} + \dot{E}_{C1} + \dot{E}_{C2} = \dot{E}_0 + a\dot{E}_1 + a^2\dot{E}_2 . \end{array}\right. \qquad (1.3.7)$$

Последната система уравнения дава възможност симетричните съставки да се изразят чрез несиметричната система от фазни ЕДН.

Като се имат предвид равенствата: $1 + a + a^2 = 0$; $a^3 = 1$ и $a^4 = a$, то след сумиране на трите уравнения се получава $3\dot{E}_0$; след умножаване на второто уравнение с a, а третото с a^2 и сумирането на трите уравнения се получава $3\dot{E}_1$; след умножаването на второто уравнение с a^2, а третото – с a и сумирането на трите уравнения се получава $3\dot{E}_2$. И така за симетричните съставки се достига до системата:

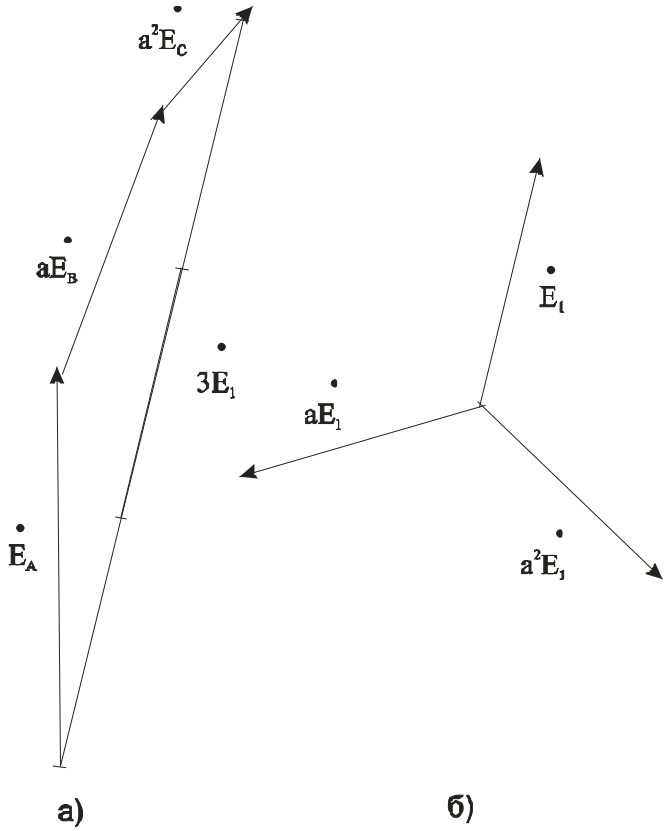


Фиг.1.3.1

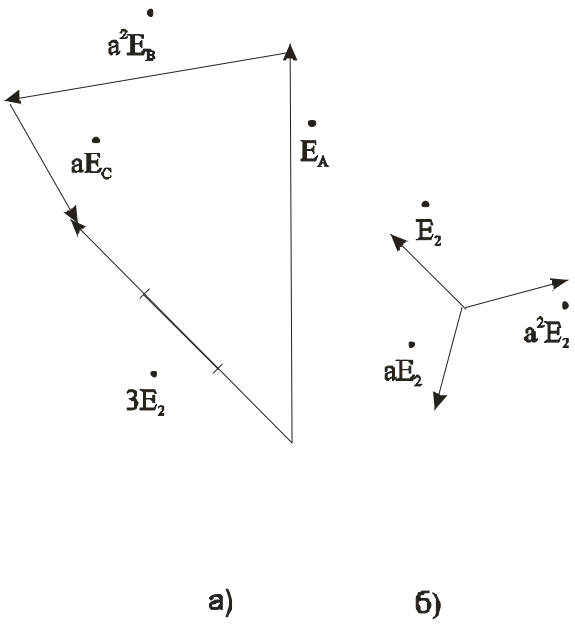


Фиг.1.3.2

$$\begin{vmatrix} \dot{E}_0 = (\dot{E}_A + \dot{E}_A + \dot{E}_C)/3; \\ \dot{E}_1 = (\dot{E}_A + a\dot{E}_B + a^2\dot{E}_C)/3; \\ \dot{E}_2 = (\dot{E}_A + a^2\dot{E}_B + a\dot{E}_C)/3. \end{vmatrix} \qquad (1.3.8)$$



Фиг.1.3.3



Фиг.1.3.4

Последната система уравнения е приложена към несиметричната трифазна система от фазни ЕДН от фиг.1.3.1 за намиране на симетричните й съставки. Получаването на симетричните съставки е показано на фиг. 1.3.2а, 1.3.3а и 1.3.4а, а

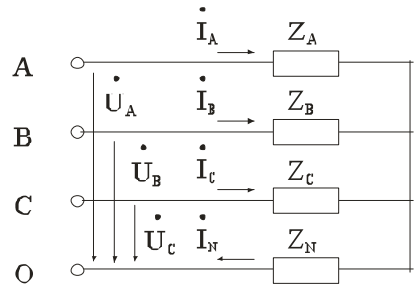
трите симетрични системи с нулева, права и обратна последователност - на фиг.1.3.2б, 1.3.3б и 1.3.4б.

Ако геометричната сума на трите величини е равна на нула, то нулевата съставка ще бъде равна на нула. Така например системата от линейни напрежения няма да има нулева съставка. Нулевата съставка ще отсъства и в системата линейни токове в случай, че трифазната верига е без неутрален проводник. При наличие на неутрален проводник през него ще преминава само утроената нулева съставка на несиметричната система токове.

1.4. Приложение на метода на симетричните съставки

Анализът на несиметричните режими в трифазните вериги е задача със значителна сложност. Тази задача например при несиметрия на ЕДН, чрез метода на симетричните съставки може да бъде сведена до три по-прости задачи. Необходимостта от прилагане на този метод се проявява особено в случаите, когато съпротивленията на веригата зависят от характера на несиметрия на токовете, т.е. когато те имат различни стойности за различните симетрични съставки на токовете.

За потвърждаване на горното твърдение се разглежда трифазна четирипроводна симетрична верига със съпротивления в трите фази $Z_A = Z_B = Z_C = Z$ и съпротивление на неутралния проводник Z_N (фиг.1.4.1).



Фиг. 1.4.1

Ако към веригата се подаде симетрична система от фазни напрежения с права последователност: $\dot{U}_A = \dot{U}_{A1}$; $\dot{U}_B = \dot{U}_{B1}$; $\dot{U}_C = \dot{U}_{C1}$, то системата токове ще бъде също симетрична и с права последователност: $\dot{I}_A = \dot{I}_{A1}$; $\dot{I}_B = \dot{I}_{B1}$; $\dot{I}_C = \dot{I}_{C1}$. Отношението от комплексните симетрични фазни напрежения с права последователност към комплексните симетрични фазни токове с права последователност определя комплексното съпротивление на веригата за токовете с права последователност, т.е.:

$$\dot{Z}_1 = \frac{\dot{U}_{A1}}{\dot{I}_{A1}} = \frac{\dot{U}_{B1}}{\dot{I}_{B1}} = \frac{\dot{U}_{C1}}{\dot{I}_{C1}} = Z. \qquad (1.4.1)$$

Ако към веригата се подаде симетрична система фазни напрежения с обратна последователност: $\dot{U}_A = \dot{U}_{A2}$; $\dot{U}_B = \dot{U}_{B2}$; $\dot{U}_C = \dot{U}_{C2}$, то системата токове ще бъде също симетрична и с обратна последователност: $\dot{I}_A = \dot{I}_{A2}$; $\dot{I}_B = \dot{I}_{B2}$; $\dot{I}_C = \dot{I}_{C2}$. Отношението от комплексните симетрични фазни напрежения с обратна последователност към комплексните симетрични фазни токове с обратна последователност определя комплексното съпротивление на веригата за токовете с обратна последователност, т.е.:

$$Z_2 = \frac{\dot{U}_{A2}}{\dot{I}_{A2}} = \frac{\dot{U}_{B2}}{\dot{I}_{B2}} = \frac{\dot{U}_{C2}}{\dot{I}_{C2}} = Z. \qquad (1.4.2)$$

И накрая, ако към веригата се подаде симетрична система фазни напрежения с нулева последователност: $\dot{U}_{A0} = \dot{U}_0$; $\dot{U}_{B0} = \dot{U}_0$; $\dot{U}_{C0} = \dot{U}_0$, то системата токове ще бъде също симетрична и с нулева последователност: $\dot{I}_{A0} = \dot{I}_0$; $\dot{I}_{B0} = \dot{I}_0$; $\dot{I}_{C0} = \dot{I}_0$. Токът в неутралния проводник ще бъде $\dot{I}_N = 3\dot{I}_0$. Отношението

от комплексните симетрични фазни напрежения с нулева последователност към комплексните симетрични фазни токове с нулева последователност определя комплексното съпротивление на веригата за токовете с нулева последователност т.е.:

$$Z_0 = \frac{\dot{U}_{A0}}{\dot{I}_{A0}} = \frac{\dot{U}_{B0}}{\dot{I}_{B0}} = \frac{\dot{U}_{C0}}{\dot{I}_{C0}} = \frac{\dot{U}_0}{\dot{I}_0}. \qquad (1.4.3)$$

Определянето на съпротивлението Z_0 може да се извърши въз основа на втория закон на Кирхоф, приложен за контур, образуван от коя да е от трите фази, например фаза A и неутралния проводник:

$$\dot{U}_A = Z_A.\dot{I}_A + Z_N.\dot{I}_N. \qquad (1.4.4)$$

Като се има предвид, че $\dot{U}_A = \dot{U}_0$; $Z_A = Z$; $\dot{I}_A = \dot{I}_0$ и $\dot{I}_N = 3\dot{I}_0$, се получава:

$\dot{U}_0 = (Z + 3\dot{Z}_N)\dot{I}_0$, откъдето се записва:

$$Z_0 = \frac{\dot{U}_0}{\dot{I}_0} = Z + 3Z_N. \qquad (1.4.5.)$$

Въз основа на разгледания по-горе пример може да се заключи, че $Z_1 = Z_2 = Z > Z_0 = Z + 3Z_N$, т.е. за трифазната четирипроводна симетрична верига съпротивленията й за токовете с права и обратна последователност са равни по между си и различни от съпротивлението й за токовете с нулева последователност.

Характерен случай на зависимост на съпротивленията от несиметрията на токовете са електрическите машини – генератори и двигатели. При тях не само съпротивлението Z_0 се различава от съпротивленията Z_1 и Z_2, но и съпротивленията Z_1 и Z_2 са различни . За изясняване на тези разлики се разглежда асинхронен двигател. При нормален режим на работа на двигателя, когато към намотките му е приложена симетрична система напрежения с права последователност, магнитното поле и роторът на двигателя се въртят съпосочно. При това ъгловата скорост на ротора е по-ниска от тази на въртящото се магнитно поле с около $1{,}5 \ldots 4\ \%$.

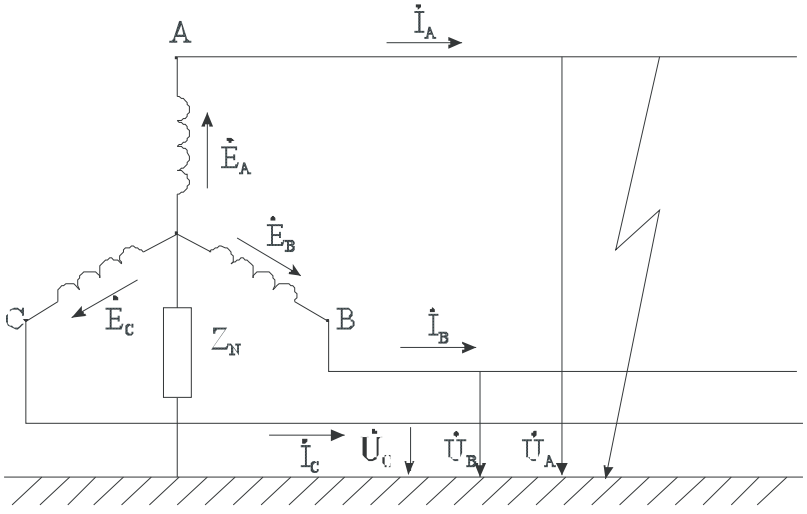
При симетричен режим с напрежения и токове с обратна последователност условията съществено се изменят. Обратна последователност може да се получи, ако се смени редът на две от фазите на статора. При това в намотките на двигателя ще преминават токове, представляващи симетрична система с обратна последователност. Ако се запази същата посока на въртене на ротора, както в нормален режим (при права последователност), например роторът се върти от друг двигател, то въртящото се магнитно поле ще се върти спрямо ротора със скорост почти два пъти по-голяма от скоростта му спрямо статора. При това положение, в сравнение с нормалния режим, токовете , индуктирани в ротора рязко нарастват. Тези токове съгласно правилото на Ленц ще въздействат много по-силно върху пораждащото ги магнитно поле и ще го намаляват много повече, отколкото това се получава при нормален режим. Това от своя страна води до намаляване на индуктираните в намотките на статора ЕДН. Тъй като приложените към намотките на статора напрежения компенсират основно именно тези ЕДН, то тяхното намаляване ще предизвика рязко увеличаване на токовете, преминаващи в намотките на статора.

И така при една и съща стойност на приложените към намотките на статора симетрични системи напрежения с права и обратна последователност и неизменни

скорост и посока на въртене на ротора токовете с обратна последователност се получават по-големи от токовете с права последователност. Това означава, че пълното съпротивление на двигателя за токовете с обратна последователност е по-малко от съпротивлението му за токовете с права последователност, т.е.: $Z_2 < Z_1$.

От своя страна токовете с нулева последователност не създават въртящо се магнитно поле. Това означава, че условията на преминаването им в намотките на двигателя се отличават съществено от тези на преминаването на токовете с права и обратна последователност, което дава пълно основание да се запише неравенството: $Z_0 \neq Z_1 \neq Z_2$.

Методът на симетричните съставки намира широко приложение при пресмятането на токовете на късо съединение в трифазните линии. Като пример се разглежда случай, когато към симетричен генератор, свързан в звезда, е включена трифазна линия (фиг. 1.4.2).



Фиг.1.4.2

Неутралната точка на генератора е свързана със земята през съпротивлението Z_N. Поради симетрия системата фазни ЕДН съдържа само симетрична съставка с права последователност, т.е.: $\dot{E}_1 = \dot{E}$; $\dot{E}_0 = 0$ и $\dot{E}_2 = 0$.

Предполага се, че някъде по линията е възникнало късо съединение между първа фаза и земята (еднофазно късо съединение). До мястото на късото съединение трифазната верига, включително и генераторът, са симетрични. В мястото на късото съединение системите фазни напрежения $\dot{U}_A$, $\dot{U}_B$, $\dot{U}_C$ и фазни токове $\dot{I}_A$, $\dot{I}_B$, $\dot{I}_C$ стават несиметрични . Те се разлагат на симетрични съставки, за които са в сила равенствата :

$$0 = \dot{I}_0 Z_0 + \dot{U}_0;\ \dot{E}_1 = \dot{E} = \dot{I}_1 Z_1 + \dot{U}_1 \text{ и } 0 = \dot{I}_2 Z_2 + \dot{U}_2. \qquad (1.4.6)$$

Чрез тези равенства се определят токовете на късо съединени при различните видове късо съединение.

Уравнения (1.4.6) са три на брой, а се търсят шест величини – трите симетрични съставки на токовете $\dot{I}_0$, $\dot{I}_1$ и $\dot{I}_2$ или определените чрез тях фазни

токове $\dot{I}_A$, $\dot{I}_B$ и $\dot{I}_C$, и трите симетрични съставки на напреженията $\dot{U}_0$, $\dot{U}_1$ и $\dot{U}_2$ или определените чрез тях фазни напрежения $\dot{U}_A$, $\dot{U}_B$ и $\dot{U}_C$.

Необходимите три допълнителни уравнения се намират въз основа на следните съображения :

- при еднофазно късо съединение, каквото в случая е късото съединение, фазното напрежение $\dot{U}_A = 0$;
- при еднофазно късо съединение токовете в останалите две фазни $\dot{I}_B$ и $\dot{I}_C$ се пренебрегват в сравнение с тока на късото съединение $\dot{I}_A$.

И така трите допълнителни уравнения имат вида:

$$\dot{U}_A = 0;\ \dot{I}_B = 0 \text{ и } \dot{I}_C = 0. \qquad (1.4.7)$$

Като се има в предвид, че $\dot{U}_A = \dot{U}_0 + \dot{U}_1 + \dot{U}_2 = 0$, то след сумиране на трите уравнения на системата (1.4.6) се получава:

$$\dot{E} = \dot{I}_0 Z_0 + \dot{I}_1 Z_1 + \dot{I}_2 Z_2. \qquad (1.4.8)$$

Тъй като $\dot{I}_B = \dot{I}_C = 0$, то следва, че:

$$\dot{I}_0 = \dot{I}_1 = \dot{I}_2 = \dot{I}_A / 3. \qquad (1.4.9)$$

След заместване на токовете $\dot{I}_0$, $\dot{I}_1$ и $\dot{I}_2$ в израза (1.4.8) се записва:

$$\dot{E} = \dot{I}_A (Z_0 + Z_1 + Z_2)/3, \qquad (1.4.10)$$

откъдето се получава:

$$\dot{I}_A = 3\dot{E}/(Z_0 + Z_1 + Z_2). \qquad (1.4.11)$$

След заместване на симетричните съставки $\dot{I}_0$, $\dot{I}_1$ и $\dot{I}_2$ чрез тока $\dot{I}_A$ (вж. формули (1.4.9) и (1.4.11)) в равенства (1.4.6) за симетричните съставки на напреженията $\dot{U}_0$, $\dot{U}_1$ и $\dot{U}_2$ се записва:

$$\left|\begin{array}{l} \dot{U}_0 = \dfrac{\dot{I}_A}{3}.Z_0 = -\dfrac{\dot{E}\ Z_0}{Z_0 + Z_1 + Z_2}; \\ \dot{U}_1 = \dot{E} - \dfrac{\dot{I}_A}{3}.Z_1 = \dfrac{\dot{E}\ (Z_0 + Z_2)}{Z_0 + Z_1 + Z_2}; \\ \dot{U}_2 = -\dfrac{\dot{I}_A}{3}.Z_2 = -\dfrac{\dot{E}\ Z_2}{Z_0 + Z_1 + Z_2}. \end{array}\right. \qquad (1.4.12)$$

Ако съпротивленията на трите фази на генератора и проводниците са еднакви за трите симетрични съставки на тока и равни на Z, както в случая при веригата от фиг.1.4.1 , то токът $\dot{I}_A$ би могло да бъде определен въз основа на закона на Ом, приложен за контура, през който преминава токът $\dot{I}_A$. Този контур е образуван от участъка, свързващ неутралната точка на генератора със земята,

фаза А на генератора, проводника в тази фаза до мястото на късото съединение и земята. При тази постановка токът $\dot{I}_A$ да се определя по формулата:

$$\dot{I}_A = \dot{E}.(Z_N + Z). \qquad (1.4.13)$$

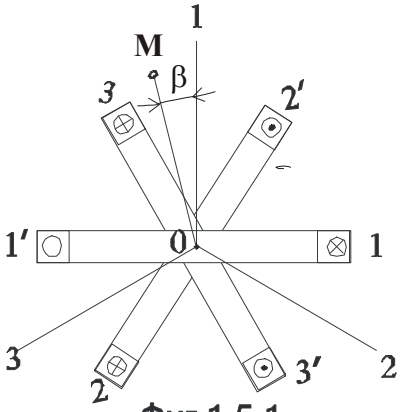
До израз (1.4.13) се достига, ако в уравнение (1.4.11) за съпротивленията за трите симетрични съставки на токовете се приеме :

$$Z_0 = 3Z_N + Z \ ; \ Z_1 = Z \ \text{и} \ Z_2 = Z \ .$$

И наистина, след заместване на съпротивленията Z_0, Z_1 и Z_2 във формула (1.4.11) се получава :

$$\dot{I}_A = \frac{3\dot{E}}{(3Z_N + Z + Z + Z)} = \frac{\dot{E}}{(Z_N + Z)}$$, т.е. се достига до същия израз, както и по закона на Ом. В действителност, както бе разгледано по-горе, при електрическите машини съпротивленията на фазите им за трите симетрични съставки на тока са различни. Поради това формула (1.4.13) е неприложима за определяне на тока на еднофазното късо съединение, а оттам и на останалите величини. Ето защо в тези случаи трябва да се използва уравнение (1.4.11).

1.5. Въртящо се магнитно поле



Фиг.1.5.1

Едно от основните предимства на трифазните системи е възможността за получаване на въртящо се магнитно поле. Това позволява създаването на широк клас електрически машини за променлив ток – генератори и двигатели.

Въртящото се магнитно поле е получено през 1884 г. от Г. Ферарис, но той е направил грешния извод, че то е неприложимо за създаване на електродвигатели. През 1887 – 1888 г. Н. Тесла е конструирал двуфазния асинхронен двигател, а през 1889 г. М. О. Доливо-Доброволски е конструирал и създал трифазния асинхронен двигател.

Намотките на трифазните двигатели се поставят в специално изработени канали на статора. Схематично, трите намотки за двуполюсен двигател са показани на фиг.1.5.1, като положителните посоки на токовете в тях са означени с кръстчета и точка. Намотките се разполагат в каналите на статора така, че магнитните им оси (на фиг.1.5.1 осите са означени със стрелки и цифри 1, 2 и 3) да сключват ъгъл в пространството, равен на $2\pi/3$.

Магнитните линии се затварят през статора, ротора и въздушната междина между тях. Магнитното съпротивление се определя основно от това на въздушната междина, тъй като то е много по-голямо от магнитните съпротивления на статора и ротора. Освен това трифазните електрически машини се конструират така, че разпределението на магнитната индукция по периферията на статора да е синусоидално или близко до синусоидалното. При тези условия магнитната индукция ще се изменя във фаза със съответния ток.

Приема се, че токовете в трите намотки на статора образуват симетрична система с права последователност, т.е.:

$$\begin{cases} i_1 = I_m \cos\omega t\,; \\ i_2 = I_m \cos(\omega t - \frac{2\pi}{3})\,; \\ i_3 = I_m \cos(\omega t - \frac{4\pi}{3})\,. \end{cases} \qquad (1.5.1)$$

Разглежда се магнитното поле в точка M от периферията на статора. За магнитните индукции на полетата на трите тока в тази точка се записва:

$$B_1 = B_m.\cos\omega t\cos\beta\,;$$

$$B_2 = B_m.\cos(\omega t - \frac{2\pi}{3})\cos(\beta + \frac{2\pi}{3})\,; \qquad (1.5.2)$$

$$B_3 = B_m.\cos(\omega t - \frac{4\pi}{3})\cos(\beta + \frac{4\pi}{3})\,,$$

където β е ъгълът, който сключва лъчът, свързващ точка M с центъра на намотките (точка O), и магнитната ос на първата намотка (фаза).

Общата магнитна индукция се определя като сума от трите индукции, т.е.:

$$B_M = B_1 + B_2 + B_3\,. \qquad (1.5.3)$$

Като се използува формулата: $\cos\alpha.\cos\beta = [\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)]/2$, за магнитната индукция B_M се получава:

$$B_M = \frac{B_m}{2}\left[\cos(\omega t+\beta) + \cos(\omega t-\beta) + \cos(\omega t+\beta) + \cos(\omega t-\beta-\frac{4\pi}{3}) + \cos(\omega t+\beta) + \cos(\omega t-\beta-\frac{8\pi}{3})\right] =$$

$$= \frac{3}{2}B_m.\cos(\omega t+\beta)\,. \qquad (1.5.4)$$

Сумата от вторите членове в разложенията е равна на нула, тъй като те образуват симетрична система.

Приема се, че точка M се върти в отрицателна посока, т.е. по часовата стрелка, с ъглова скорост ω. В такъв случай за ъгъл β се записва: $\beta = -\omega t + \beta_0$ и след заместване във формула (1.5.4) се получава :

$$B_M = \frac{3}{2}B_m.\cos(\omega t - \omega t + \beta_0) = \frac{3}{2}B_m.\cos\beta_0 = \text{const.} \qquad (1.5.5)$$

Въз основа на последния израз може да се заключи, че в движещата се с ъглова скорост ω в отрицателна посока точка M магнитната индукция запазва една и съща стойност и не се изменя във времето. Това означава, че общото магнитно поле, определено от магнитната индукция B_M, се върти в същата посока, както и точка M, т.е. по часовата стрелка. Такова магнитно поле се нарича кръгово въртящо се магнитно поле. Магнитната му индукция е постоянна величина и има стойност, равна на $3B_m/2$.

В каналите на ротора обикновено се поставя намотка. Въртящото се магнитно поле, пресичайки тази намотка, индуктира в нея токове , които взаимодействуват с токовете на статора. Така се получава въртящ момент. Благодарение на този момент роторът се върти в същата посока, в която се върти и въртящото се магнитно поле.

Магнитното поле на всяка от намотките се нарича пулсиращо. То може да бъде разложено на две въртящи се с една и съща ъглова скорост, но в противоположни посоки полета, максималната стойност на магнитната индукция на които е равна на половината от максималната стойност на магнитната индукция на пулсиращото поле. Например, магнитното поле на първа фаза може да бъде разложено на две въртящи се магнитни полета по следния начин:

$$B_1 = B_m \cos\omega t.\cos\beta = \frac{B_m}{2}\cos(\omega t + \beta) + \frac{B_m}{2}\cos(\omega t - \beta). \qquad (1.5.6)$$

1.6 Висши хармоници в трифазните вериги

Както бе разгледано вече, фазните ЕДН на симетричен генератор са отместени фазово едно от друго на ъгъл $2\pi/3$. Приема се, че те съдържат висши хармоници. В такъв случай к-тият хармоник например във втора фаза ще изостава на ъгъл $к.2\pi/3$, т.е. фазовото отместване между к-тите хармоници в кои да е две фази ще бъде на ъгъл $к.2\pi/3$.

Въз основа на горното може да се установи, че хармониците с номер, кратен на 3 (к = 3, 6, 9, 12, 15, ...) ще бъдат отместени на ъгъл 2π, т.е. ще бъдат във фаза или другояче казано образуват системи с нулева последователност. Всички хармоници, чиито номер минус единица е кратен на 3 (к = 4, 7, 10, 13, ...) образуват системи с права последователност. От своя страна хармониците, чиито номер плюс единица е кратен на 3 (к = 2, 5, 8, 11, 14, ...) образуват системи с обратна последователност.

По-нататък се анализира състоянието на трифазните вериги и по-точно влиянието на трите групи хармоници. Отначало се разглежда трифазен генератор, чиито намотки са свързани в триъгълник.

За контура на триъгълника, сумата на първите хармоници на ЕДН и на всичките им хармоници, чиито номер не е кратен на 3, е равна на нула (това са системите с права и обратна последователност).

Сумата на хармониците, чиито номер е кратен на 3, не е равна на нула, тъй като те са във фаза. Това ще предизвика преминаването на ток в намотките на генератора, независимо, че може и да не е включен товар към него. От този ток върху намотките се установяват падове на напрежения, които компенсират ЕДН, предизвикали тока. Оттук следва, че напреженията на изводите на генератора няма да съдържат хармоници с номер, кратен на 3. Същият резултат по отношение на тези хармоници се получава и при трансформаторите. И така, чрез свързване на намотките на генератора или трансформатора в триъгълник се компенсира влиянието на всички хармоници с номер, кратен на 3.

Тук трябва да се отбележи още, че при симетрични ЕДН липсват четните хармоници.

Ако намотките на генератора или трансформатора са свързани в звезда, то линейните напрежения, които представляват разлика от фазните напрежения, няма да съдържат хармоници с номер, кратен на 3, независимо, че във фазните напрежения тези хармоници съществуват. Ето защо отношението от линейните и фазните напрежения при наличието на висши хармоници ще бъде по-малко от $\sqrt{3}$:

$$\frac{U_л}{U_ф} = \frac{\sqrt{3}.\sqrt{U_1^2 + 0 + U_5^2 + U_7^2 + 0 + U_{11}^2 + 0 + ...}}{\sqrt{U_1^2 + U_3^2 + U_5^2 + U_7^2 + U_9^2 + U_{11}^2 + U_{13}^2 + U_{15}^2 + ...}} < \sqrt{3}. \qquad (1.6.1)$$

Ако трифазната верига е трипроводна, то линейните токове няма да съдържат хармоници с номер, кратен на 3, тъй като тези хармоници отсъствуват в линейните напрежения, поради което във фазните напрежения на консуматора те също ще липсват. Това от своя страна означава, че между двете неутрални точки на генератора и консуматора ще се появи напрежение с утроена честота, което често може да достигне стойности опасни за живота на човека. Във връзка с това е възникнала и необходимостта от компенсиране на хармониците с номер, кратен на 3. Единият от начините, както бе разгледано по-горе, е чрез свързване на намотките в триъгълник. Друг вид компенсация, прилагана при трансформаторите, е чрез въвеждане на допълнителна намотка без изводи, свързана в триъгълник.

II. ЧЕТИРИПОЛЮСНИЦИ

Встъпителни бележки

В раздела се дават основните понятия и класификация на четириполюсниците, системите уравнения и основните съединения на пасивните четириполюсници. Разглеждат се еквивалентните заместващи схеми, коефициентите на предаване и характеристичните параметри на пасивен четириполюсник, а също така еквивалентните заместващи схеми на активен четириполюсник.

2.1. Четириполюсници – основни понятия. Уравнения на пасивен четириполюсник

А) Четириполюсници – основни понятия

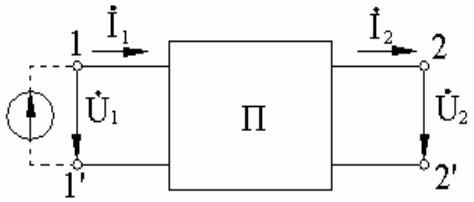
В редица случаи анализът на сложни електрически вериги може да бъде опростен, ако те се разделят на многополюсници. Тъй като всеки клон се свързва към останалата част на дадена електрическа верига в две точки, то може да бъде отделена част от веригата с четири извода (полюса или клеми), при което към два от тях се включва източникът на енергия, а към останалите две – консуматорът.

И така, част от електрическа верига с произволна конфигурация, притежаваща две двойки изводи (полюси или клеми) за включване на източник и консуматор, се нарича четириполюсник. Изводите, към които се свързва източникът се наричат входни, а изводите към които се свързва консуматорът – изходни.

Четириполюсниците се делят на активни и пасивни. Активните четириполюсници съдържат в клоновете си източници на енергия, които не се компенсират взаимно по отношение на входните и изходните им изводи. Това означава, че ако даден активен четириполюсник не е включен към външни вериги, то на изводите му могат да бъдат измерени напрежения. Пасивните четириполюсници не съдържат в клоновете си източници на енергия или ако ги съдържат, те се компенсират взаимно по отношение на изводите им. Като примери за активни четириполюсници могат да бъдат посочени различни усилватели, а като примери за пасивни четириполюсници – различни трансформатори, филтри, предавателни линии и др.

Б) Системи уравнения на пасивен четириполюсник

На фиг.2.1.1. е показан схематично пасивен четириполюсник. Входните му изводи са отбелязани с 1 и 1', а изходните му изводи – с 2 и 2'. Напрежението и токът на входа са означени с $\dot{U}_1$ и $\dot{I}_1$, а тези на изхода с $\dot{U}_2$ и $\dot{I}_2$. Посоките на токовете $\dot{I}_1$ и $\dot{I}_2$ сочат посоката на предаване на енергията от източника към четириполюсника, и от него към товара, т.е. на входа тя е насочена към четириполюсника, а на изхода – от четириполюсника.



Фиг. 2.1.1

При по-нататъшното разглеждане се приема, че четириполюсникът е обратим, т.е. за него е валиден принципът на взаимността. Освен това се приема, че напреженията и токовете на захранващите източници са синусоидални с една и съща ъглова честота. В такъв случай токовете и напреженията във всички участъци на четириполюсника ще бъдат също синусоидални със същата ъглова честота.

Приема се че реалната електрическа схема на четириполюсника от фиг.2.1.1 съдържа n независими контура, като за първи контур се избира контурът на входа, включващ източника на енергия, а като втори контур – контурът на изхода, включващ консуматора.

Въз основа на метода с контурни токове се записва следната система уравнения:

$$\begin{cases} Z'_{11}\dot{I}_1 + Z'_{12}.\dot{I}_2 + ... + Z'_{1n}.\dot{I}_n = \dot{U}_1; \\ Z'_{21}\dot{I}_1 + (Z'_{22} + Z_T).\dot{I}_2 + ... + Z'_{2n}.\dot{I}_n = 0; \\ ..... \\ Z'_{n1}\dot{I}_1 + Z'_{n2}.\dot{I}_2 + ... + Z'_{nn}.\dot{I}_n = 0. \end{cases} \quad (2.1.1)$$

В тази система собствените съпротивления Z'_{kk} и общите съпротивления Z'_{ik} на контурите са означени допълнително със знака “прим” (′) с цел да бъдат различавани от параметрите $\dot{U}_p$ на четириполюсника, които ще бъдат получени по-нататък.

Като се има предвид, че $\dot{I}_2.Z_T = \dot{U}_2$, то система (2.1.1) добива вида:

$$\begin{cases} Z'_{11}\dot{I}_1 + Z'_{12}.\dot{I}_2 + ... + Z'_{1n}.\dot{I}_n = \dot{U}_1; \\ Z'_{21}\dot{I}_1 + Z'_{22}.\dot{I}_2 + ... + Z'_{2n}.\dot{I}_n = -\dot{U}_2; \\ ..... \\ Z'_{n1}\dot{I}_1 + Z'_{n2}.\dot{I}_2 + ... + Z'_{nn}.\dot{I}_n = 0. \end{cases} \quad (2.1.2)$$

От последната система се определят токовете $\dot{I}_1$ и $\dot{I}_2$, т.е.:

$$\begin{cases} \dot{I}_1 = \frac{D_{11}}{D}.\dot{U}_1 - \frac{D_{12}}{D}.\dot{U}_2; \\ \dot{I}_2 = \frac{D_{21}}{D}.\dot{U}_1 - \frac{D_{22}}{D}.\dot{U}_2, \end{cases} \quad (2.1.3)$$

където D е детерминантата на матрицата от коефициентите пред неизвестните в система (2.1.2), а D_{11} ... D_{22} са съответните адюнгирани количества.

Въвеждат се означенията:

$$\frac{D_{11}}{D} = Y_{11}; \; -\frac{D_{12}}{D} = Y_{12}; \; \frac{D_{21}}{D} = Y_{21} \text{ и } -\frac{D_{22}}{D} = Y_{22}. \quad (2.1.4)$$

Тогава система (2.1.3) добива вида:

$$\begin{cases} \dot{I}_1 = Y_{11}.\dot{U}_1 + Y_{12}.\dot{U}_2; \\ \dot{I}_2 = Y_{21}.\dot{U}_1 + Y_{22}.\dot{U}_2. \end{cases} \quad (2.1.5)$$

Величините $\begin{cases} \dot{U}_1 = Z_{11}.\dot{I}_1 + Z_{12}.\dot{I}_2; \\ \dot{U}_2 = Z_{21}.\dot{I}_1 + Z_{22}.\dot{I}_2, \end{cases}$ са известни като Y - параметри на четириполюсника. Те имат размерност на проводимост.

Като се има предвид, че за обратим пасивен четириполюсник $D_{12} = D_{21}$, то следва, че $Y_{12} = -Y_{21}$. Последното означава, че от четирите Y - параметри, три са независими.

В случай, че равенството Z_{10} не е в сила, то четириполюсникът се нарича невзаимен. Такъв четириполюсник се характеризира с четири независими параметъра и не е обект на разглеждане в по-нататъшното изложение.

Система (2.1.5) може да бъде решена по отношение на напреженията $\dot{U}_1$ и $\dot{U}_2$, т.е.:

$$\begin{cases} \dot{U}_1 = Z_{11}.\dot{I}_1 + Z_{12}.\dot{I}_2 ; \\ \dot{U}_2 = Z_{21}.\dot{I}_1 + Z_{22}.\dot{I}_2 , \end{cases} \qquad (2.1.6)$$

където $Z_{11} = \frac{Y_{22}}{Y_{11}.Y_{22} - Y_{12}.Y_{21}}$; $Z_{12} = \frac{-Y_{12}}{Y_{11}.Y_{22} - Y_{12}.Y_{21}}$; $Z_{21} = \frac{-Y_{21}}{Y_{11}.Y_{22} - Y_{12}.Y_{21}}$ и $Z_{22} = \frac{Y_{11}}{Y_{11}.Y_{22} - Y_{12}.Y_{21}}$.

Величините $Z_{11} \ldots Z_{22}$ се наричат $Z-$параметри на четириполюсника. Те имат размерност на съпротивления. За тях може да се запише: $Z_{12} = -Z_{21}$. Системата (2.1.6) се нарича система уравнения на четириполюсника със $Z-$параметри.

При анализа на четириполюсници често се използува система уравнения, в която входните величини $\dot{U}_1$ и $\dot{I}_1$ са изразени чрез изходните величини $\dot{U}_2$ и $\dot{I}_2$. Тя е известна като система с A – параметри или предавателна система уравнения и има вида:

$$\begin{cases} \dot{U}_1 = A.\dot{U}_2 + B.\dot{I}_2 ; \\ \dot{I}_1 = C.\dot{U}_2 + D.\dot{I}_2 . \end{cases} \qquad (2.1.7)$$

Тази система може да бъде получена от система (2.1.6). За целта от второто уравнение на система (2.1.6) се определя токът $\dot{I}_1$, т.е.:

$$\dot{I}_1 = \frac{1}{Z_{21}}.\dot{U}_2 - \frac{Z_{22}}{Z_{21}}.\dot{I}_2 . \qquad (2.1.8)$$

Токът $\dot{I}_1$ се замества в първото уравнение на система (2.1.6) и се получава:

$$\dot{U}_1 = \frac{Z_{11}}{Z_{21}}.\dot{U}_2 - \frac{Z_{11}.Z_{22} - Z_{12}.Z_{21}}{Z_{21}}.\dot{I}_2 . \qquad (2.1.9)$$

От уравнения (2.1.8) и (2.1.9) може да се запише:

$A = \frac{Z_{11}}{Z_{21}}$; $B = -\frac{Z_{11}.Z_{22} - Z_{12}.Z_{21}}{Z_{21}}$; $C = \frac{1}{Z_{21}}$ и $D = -\frac{Z_{22}}{Z_{21}}$.

От тези изрази може да се установи, че параметрите A и D са безразмерни величини, параметърът B има размерност на съпротивление, а параметърът C на проводимост.

Като се има предвид равенството: $Z_{12} = -Z_{21}$, може да се докаже, че A – параметрите са свързани със съотношението: $A.D - B.C = 1$, т.е. от четирите A – параметри три са независими. Последното уравнение се нарича характеристично уравнение на пасивния четириполюсник.

В някои случаи се използува система уравнения на четириполюсника, при която входното напрежение $\dot{U}_1$ и изходният ток $\dot{I}_2$ са изразени чрез входния ток $\dot{I}_1$ и изходното напрежение $\dot{U}_2$, т.е.:

$$\begin{cases} \dot{U}_1 = H_{11}.\dot{I}_1 + H_{12}.\dot{U}_2 ; \\ \dot{I}_2 = H_{21}.\dot{I}_1 + H_{22}.\dot{U}_2 . \end{cases} \qquad (2.1.10)$$

Тази система е известна като система с H – параметри и намира приложение при заместващите схеми на транзистори. Тя може да бъде получена от система (2.1.6). За целта от второто ѝ уравнение се определя токът $\dot{I}_2$, т.е.:

$$\dot{I}_2 = \frac{1}{Z_{22}}.\dot{U}_2 - \frac{Z_{21}}{Z_{22}}.\dot{I}_1 . \qquad (2.1.11)$$

Токът $\dot{I}_2$ се замества в първото уравнение на система (2.1.6) и се получава:

$$\dot{U}_1 = \frac{Z_{11}.Z_{22} - Z_{12}.Z_{21}}{Z_{22}}.\dot{I}_1 + \frac{Z_{12}}{Z_{22}}.\dot{U}_2 . \qquad (2.1.12)$$

От уравнение (2.1.11) и (2.1.12) може да се запише:

$H_{11} = \frac{Z_{11}.Z_{22} - Z_{12}.Z_{21}}{Z_{22}}$; $H_{12} = \frac{Z_{12}}{Z_{22}}$; $H_{21} = -\frac{Z_{21}}{Z_{22}}$ и $H_{22} = \frac{1}{Z_{22}}$.

От тези изрази може да се установи, че параметрите H_{12} и H_{21} са безразмерни величини, параметърът H_{11} има размерност на съпротивление, а параметърът H_{22} - на проводимост.

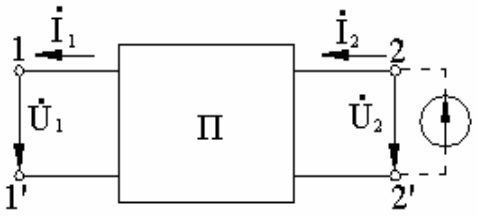
Известна е още система уравнения на четириполюсника, при която входният ток $\dot{I}_1$ и изходното напрежение $\dot{U}_2$ са изразени чрез входното напрежение $\dot{U}_1$ и изходния ток $\dot{I}_2$, т.е.:

$$\begin{vmatrix} \dot{I}_1 = G_{11}.\dot{U}_1 + G_{12}.\dot{I}_2 ; \\ \dot{U}_2 = G_{21}.\dot{U}_1 + G_{22}.\dot{I}_2 . \end{vmatrix} \qquad (2.1.13)$$

Тази система се нарича система с G – параметри. Очевидно е, че параметрите G_{12} и G_{21} са безразмерни величини, параметърът G_{11} има размерност на проводимост, а параметърът G_{22} - на съпротивление.

Системите уравнения с H – и G – параметри се наричат хибридни системи уравнения.

Разглежда се режим на работа на пасивен четириполюсник, при който захранването на четириполюсника се подава на изходните изводи 2 и 2′ , а товарът се включва към изводи 1 и 1′ (фиг.2.1.2).



Фиг. 2.1.2

Положителните посоки на токовете са избрани в съответствие с посоката на предаване на енергията, която в случая е от изводи 2 и 2′ към изводи 1 и 1′. Тъй като четириполюсникът на фиг. 2.1.2 е същият, както на фиг. 2.1.1, то системите уравнения, с помощта на които се описва режимът му ще бъдат същите. Същите ще бъдат и параметрите му. Единствената разлика е в това, че посоките на токовете $\dot{I}_1$ и $\dot{I}_2$ на фиг.2.1.2 са противоположни на тези от фиг.2.1.1. Това изисква в уравненията на четириполюсника пред токовете $\dot{I}_1$ и $\dot{I}_2$ да се постави отрицателен знак. Така със същите уравнения може да се изрази режимът на четириполюсника, когато захранването се подава на изходните изводи. Например, системата с A–параметри се записва по следния начин:

$$\begin{vmatrix} \dot{U}_1 = A.\dot{U}_2 - B.\dot{I}_2 ; \\ -\dot{I}_1 = C.\dot{U}_2 - D.\dot{I}_2 . \end{vmatrix} \qquad (2.1.14)$$

Поставя се задачата величините $\dot{U}_2$ и $\dot{I}_2$ да се изразят чрез величините $\dot{U}_1$ и $\dot{I}_1$.

За целта от второто уравнение на системата (2.1.14) се определя токът $\dot{I}_2$, т.е.:

$$\dot{I}_2 = \frac{C}{D}.\dot{U}_2 + \frac{1}{D}\dot{I}_1. \qquad (2.1.15)$$

Токът $\dot{I}_2$ се замества в първото уравнение на системата (2.1.14) и се получава:

$\dot{U}_1 = A.\dot{U}_2 - \frac{B.C}{D}.\dot{U}_2 - \frac{B}{D}.\dot{I}_1 = \frac{A.D - B.C}{D}.\dot{U}_2 - \frac{B}{D}\dot{I}_1 = \frac{1}{D}.\dot{U}_2 - \frac{B}{D}.\dot{I}_1$, откъдето за напрежението $\dot{U}_2$ се записва:

$$\dot{U}_2 = D.\dot{U}_1 + B.\dot{I}_1. \qquad (2.1.16)$$

Напрежението $\dot{U}_2$ се замества в уравнение (2.1.15) и се получава:

$$\dot{I}_2 = C.\dot{U}_1 + \frac{B.C}{D}.\dot{I}_1 + \frac{1}{D}.\dot{I}_1 = C.\dot{U}_1 + \frac{B.C+1}{D}.\dot{I}_1. \qquad (2.1.17)$$

Като се има предвид, че $B.C + 1 = A.D$ се записва:

$$\dot{I}_2 = C.\dot{U}_1 + A.\dot{I}_1. \qquad (2.1.18)$$

Така се достига до системата:

$$\begin{vmatrix} \dot{U}_2 = D.\dot{U}_1 + B.\dot{I}_1 ; \\ \dot{I}_2 = C.\dot{U}_1 + A.\dot{I}_1 . \end{vmatrix} \qquad (2.1.19)$$

От последната система може да се установи, че при обратно захранване на четириполюсника параметрите A и D си разменят местата в уравненията.

Ако към източник се включва консуматор чрез пасивен четириполюсник, то режимът на източника се определя от входното съпротивление на четириполюсника – $Z_{вх1}$ или $Z_{вх2}$. То зависи, както от структурата и параметрите на елементите на четириполюсника, така и от съпротивлението на консуматора $Z_т$.

В случай на захранване на четириполюсника от към изводите 1 и 1′ с право захранване, като се има предвид, че $\dot{U}_2 = Z_т.\dot{I}_2$ за входното съпротивление $Z_{вх1}$ се записва:

$$Z_{вх1} = \frac{\dot{U}_1}{\dot{I}_1} = \frac{A.\dot{U}_2 + B.\dot{I}_2}{C.\dot{U}_2 + D.\dot{I}_2} = \frac{A.Z_т + B}{C.Z_т + D}. \qquad (2.1.20)$$

При захранване на четириполюсника откъм изводите 2 и 2′ (обратно захранване) и като се има предвид, че $\dot{U}_1 = Z_т.\dot{I}_1$, за входното съпротивление $Z_{вх2}$ се записва:

$$Z_{вх2} = \frac{\dot{U}_2}{\dot{I}_2} = \frac{D.\dot{U}_1 + B.\dot{I}_1}{C.\dot{U}_1 + A.\dot{I}_1} = \frac{D.Z_т + B}{C.Z_т + A}. \qquad (2.1.21)$$

Ако последният израз се сравни с израз (2.1.20) може да се види, че са си сменили местата параметрите A и D. В случай, че тези параметри са равни, т.е.: $A = D$, то $Z_{вх1} = Z_{вх2}$. Такъв четириполюсник се нарича симетричен. Както ще бъде разгледано в по-нататъшното изложение, той се характеризира с вертикална ос на симетрия по отношение на вътрешната си структура.

2.2. Експериментално определяне на параметрите на четириполюсника

Един четириполюсник е зададен, ако са известни параметрите му. Както бе разгледано по-горе, достатъчно е да се знаят три от параметрите на взаимния четириполюсник, за да се намери четвъртият му параметър. При това, ако се знае една от системите параметри, например системата Y – параметри, то чрез нея могат да бъдат определени останалите системи параметри.

Параметрите на четириполюсника могат да бъдат определени аналитично или експериментално. За аналитичното им определяне е необходимо да се знае схемата на четириполюсника, а също така параметрите на елементите му.

Най-лесно параметрите на четириполюсника могат да бъдат определени експериментално, като се извършат опити на празен ход и късо съединение на входа и изхода му.

Например, при право захранване и празен ход на вторичните изводи, т.е. когато $\dot{I}_2 = 0$ и $\dot{U}_2 = \dot{U}_{20} = \dot{U}_{2н}$, въз основа на система (2.1.7) се записва:

$$\dot{U}_{10} = A.\dot{U}_2 \text{ и } \dot{I}_{10} = C.\dot{U}_2, \tag{2.2.1}$$

откъдето за параметрите A и C се получава:

$$A = \frac{\dot{U}_{10}}{\dot{U}_2} \text{ и } C = \frac{\dot{I}_{10}}{\dot{U}_2}. \tag{2.2.2}$$

При право захранване и късо съединение на вторичните изводи, т.е. когато $\dot{U}_2 = 0$ и $\dot{I}_2 = \dot{I}_{2к} = \dot{I}_{2н}$ въз основа на система (2.1.7) се записва:

$$\dot{U}_{1к} = B.\dot{I}_2 \text{ и } \dot{I}_{1к} = D.\dot{I}_2, \tag{2.2.3}$$

откъдето за параметрите B и D се получава:

$$B = \frac{\dot{U}_{1к}}{\dot{I}_2} \text{ и } D = \frac{\dot{I}_{1к}}{\dot{I}_2}. \tag{2.2.4}$$

От тези два опита за входното съпротивление на четириполюсника на празен ход и късо съединение на вторичната му страна се записва:

$$Z_{10} = \frac{\dot{U}_{10}}{\dot{I}_{10}} = \frac{A}{C} \text{ и } Z_{1к} = \frac{\dot{U}_{1к}}{\dot{I}_{1к}} = \frac{B}{D}. \tag{2.2.5}$$

И така, измерването на величините $\dot{U}_{10}$, $\dot{I}_{10}$ и $\dot{U}_2$ при празен ход, а също така и на величините $\dot{U}_{1к}$, $\dot{I}_{1к}$ и $\dot{I}_2$ при късо съединение е напълно достатъчно за определянето на четирите A – параметри.

Аналогичен резултат се получава при обратно захранване чрез опитите на празен ход и късо съединение на първичната страна.

Например, при празен ход на първичната страна, т.е. когато $\dot{I}_{10} = 0$ и $\dot{U}_1 = \dot{U}_{10} = \dot{U}_{1н}$, въз основа на системата (2.1.19) се записва:

$$\dot{U}_{20} = D.\dot{U}_1 \text{ и } \dot{I}_{20} = C.\dot{U}_1, \tag{2.2.6}$$

откъдето за параметрите D и C се получава:

$$D = \frac{\dot{U}_{20}}{\dot{U}_1} \text{ и } C = \frac{\dot{I}_{20}}{\dot{U}_1}. \tag{2.2.7}$$

При късо съединение на първичната страна, т.е. когато $\dot{U}_1 = 0$ и $\dot{I}_1 = \dot{I}_{1к} = \dot{I}_{1н}$, въз основа на система (2.1.19) се записва:

$$\dot{U}_{2к} = B.\dot{I}_1 \text{ и } \dot{I}_{2к} = A.\dot{I}_1, \qquad (2.2.8)$$

откъдето за параметрите B и A се получава:

$$B = \frac{\dot{U}_{2к}}{\dot{I}_1} \text{ и } A = \frac{\dot{I}_{2к}}{\dot{I}_1}. \qquad (2.2.9)$$

От тези два опита за входното съпротивление на четириполюсника при празен ход и късо съединение на първичната му страна се записва:

$$Z_{20} = \frac{\dot{U}_{20}}{\dot{I}_{20}} = \frac{D}{C} \text{ и } Z_{2к} = \frac{\dot{U}_{2k}}{\dot{I}_{2к}} = \frac{B}{A}. \qquad (2.2.10)$$

По-удобен начин за експериментално определяне на параметрите на четириполюсника е чрез извършване на три опита – два опита на празен ход и късо съединение на едната страна и един опит на празен ход на другата страна. При това се измерват само първичните или само вторичните токове и напрежения.

Например, при празен ход и късо съединение на първичната страна се измерват само величините $\dot{U}_{20}$ и $\dot{I}_{20}$, респективно величините $\dot{U}_{2к}$ и $\dot{I}_{2к}$, от които съгласно уравнения (2.2.10) се получават съпротивленията Z_{20} и $Z_{2к}$.

Аналогично, при празен ход на вторичната страна се измерват само величините $\dot{U}_{10}$ и $\dot{I}_{10}$, от които съгласно уравнения (2.2.5) се получава съпротивлението Z_{10}.

Като се има предвид, че $Z_{10} = \frac{A}{C}$, $Z_{20} = \frac{D}{C}$, $Z_{2к} = \frac{B}{A}$ и $A.D - B.C = 1$, се установява, че:

$$Z_{20} - Z_{2к} = \frac{A.D - B.C}{A.C} = \frac{Z_{10}}{A^2}, \qquad (2.2.11)$$

откъдето за параметъра A се записва:

$$A = \left[Z_{10} / \left(Z_{20} - Z_{2к}\right)\right]^{\frac{1}{2}}. \qquad (2.2.12)$$

Съответните изрази за останалите A – параметри са:

$$B = A.Z_{2к};\ C = \frac{A}{Z_{10}} \text{ и } D = C.Z_{20} = \frac{Z_{20}}{Z_{10}}A. \qquad (2.2.13)$$

За проверка би могло да се извърши допълнителен опит на късо съединение на вторичната страна, от който се определя съпротивлението $Z_{1к}$. За проверка се използува съотношението:

$$\frac{Z_{10}}{Z_{20}} = \frac{Z_{1к}}{Z_{2к}} = \frac{A}{D}. \qquad (2.2.14)$$

От уравненията на четириполюсника, записани за Z – или Y – параметри, могат да бъдат установени следните изрази:

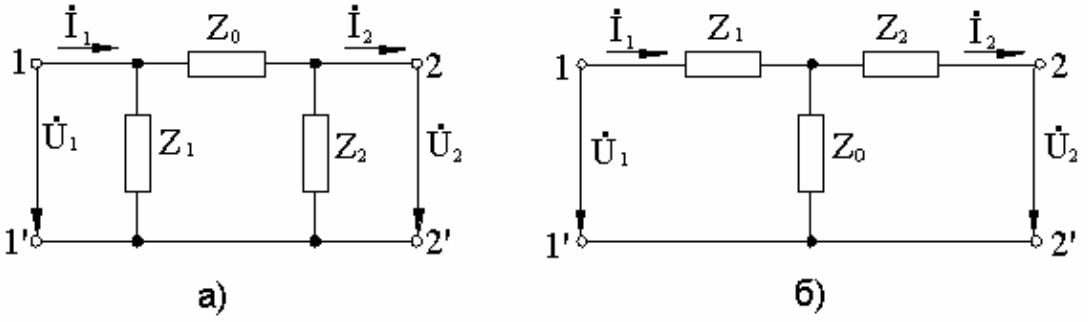
$$Z_{10} = \frac{1}{Y_{10}} = Z_{11};\ Z_{20} = \frac{1}{Y_{20}} = -Z_{22} \text{ и } Z_{1к} = Z_{11} - \frac{Z_{12}.Z_{21}}{Z_{22}}; \qquad (2.2.15)$$

$$\begin{Vmatrix}\dot{I}_1\\ \dot{I}_2\end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix}Y_{11} & Y_{12}\\ Y_{21} & Y_{22}\end{Vmatrix}\begin{Vmatrix}\dot{U}_1\\ \dot{U}_2\end{Vmatrix} \text{ и } \begin{Vmatrix}\dot{I}_1\\ \dot{I}_2\end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix}Y_{11} & Y_{12}\\ Y_{21} & Y_{22}\end{Vmatrix}\begin{Vmatrix}\dot{U}_1\\ \dot{U}_2\end{Vmatrix};\ Y_{2к} = \frac{1}{Z_{2к}} = -Y_{22} \text{ и } Y_{10} = Y_{11} - \frac{Y_{12}.Y_{21}}{Y_{22}}. \qquad (2.2.16)$$

2.3. Еквивалентни схеми на четириполюсника

Както бе разгледано в 2.1, всеки взамен четириполюсник се характеризира с три независими параметъра. Това позволява той да бъде представен с триелементна еквивалентна П–образна или Т–образна схема (фиг.2.3.1).

За намиране на връзките между съпротивленията Z_1, Z_2 и Z_0 на елементитена еквивалентните схеми от фиг.2.3.1 и A – параметрите на четириполюсника се използуват законите на Ом и Кирхоф.



Фиг. 2.3.1

За П – образната схема се записват следните уравнения:

$$\dot{U}_1 = \left(\frac{\dot{U}_2}{Z_2} + \dot{I}_2\right).Z_0 + \dot{U}_2 = \left(1 + \frac{Z_0}{Z_2}\right)\dot{U}_2 + Z_0.\dot{I}_2 = A.\dot{U}_2 + B.\dot{I}_2; \qquad (2.3.1)$$

$$\dot{I}_1 = \frac{\dot{U}_1}{Z_1} + \frac{\dot{U}_2}{Z_2} + \dot{I}_2 = \left(\frac{1}{Z_1} + \frac{Z_0}{Z_1.Z_2} + \frac{1}{Z_2}\right).\dot{U}_2 + \left(1 + \frac{Z_0}{Z_1}\right).\dot{I}_2 = C.\dot{U}_2 + D.\dot{I}_2. \qquad (2.3.2)$$

От изразите (2.3.1) и (2.3.2) се установява, че:

$$A = 1 + \frac{Z_0}{Z_2}\ ;\ B = Z_0\ ;\ C = \frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} + \frac{Z_0}{Z_1.Z_2} \text{ и } D = 1 + \frac{Z_0}{Z_1}. \qquad (2.3.3)$$

Ако в изразите (2.3.3) за параметрите A и D се положи $Z_0 = B$ се получава:

$$Z_1 = B/(D-1)\ ;\ Z_2 = B/(A-1) \text{ и } Z_0 = B. \qquad (2.3.4)$$

За Т–образната схема се записват следните уравнения:

$$\dot{I}_1 = \dot{I}_2 + \left(\dot{U}_2 + \dot{I}_2.Z_2\right).\frac{1}{Z_0} = \frac{1}{Z_0}.\dot{U}_2 + \left(1 + \frac{Z_2}{Z_0}\right).\dot{I}_2 = C.\dot{U}_2 + D.\dot{I}_2\ ; \qquad (2.3.5)$$

$$\dot{U}_1 = Z_1.\dot{I}_1 + Z_2.\dot{I}_2 + \dot{U}_2 = \left(1 + \frac{Z_1}{Z_0}\right).\dot{U}_2 + \left(Z_1 + Z_2 + \frac{Z_1.Z_2}{Z_0}\right).\dot{I}_2 = A.\dot{U}_2 + B.\dot{I}_2. \qquad (2.3.6)$$

От изрази (2.3.5) и (2.3.6) се установява, че:

$$A = 1 + \frac{Z_1}{Z_0}\ ;\ B = Z_1 + Z_2 + \frac{Z_1.Z_2}{Z_0}\ ;\ C = \frac{1}{Z_0} \text{ и } D = 1 + \frac{Z_2}{Z_0}. \qquad (2.3.7)$$

Ако в изразите (2.3.7) за параметрите A и D се положи $Z_0 = 1/C$ се получава:

$$Z_1 = (A-1)/C\ ;\ Z_2 = (D-1)/C \text{ и } Z_0 = 1/C. \qquad (2.3.8)$$

2.4. Уравнения на четириполюсника в матрична форма. Верижно, последователно, паралелно и смесено съединения на четириполюсници. Регулярност на съединенията на четириполюсници

А) Уравнения на четириполюсника в матрична форма

Уравненията на четириполюсника могат да бъдат записани в матрична форма. Това е удобно във връзка с анализа на съединенията на четириполюсниците.

Системата с Y – параметри се записва в матрична форма по следния начин:

$$\begin{Vmatrix}\dot{I}_1\\ \dot{I}_2\end{Vmatrix}=\begin{Vmatrix}Y_{11} & Y_{12}\\ Y_{21} & Y_{22}\end{Vmatrix}.\begin{Vmatrix}\dot{U}_1\\ \dot{U}_2\end{Vmatrix},\ \text{т.е.:}\ \underline{\dot{I}}=\underline{Y}.\underline{\dot{U}}. \qquad (2.4.1)$$

Матричният запис на системата със Z – параметри е:

$$\begin{Vmatrix}\dot{U}_1\\ \dot{U}_2\end{Vmatrix}=\begin{Vmatrix}Z_{11} & Z_{12}\\ Z_{21} & Z_{22}\end{Vmatrix}.\begin{Vmatrix}\dot{I}_1\\ \dot{I}_2\end{Vmatrix},\ \text{т.е.:}\ \underline{\dot{U}}=\underline{Z}.\underline{\dot{I}}. \qquad (2.4.2)$$

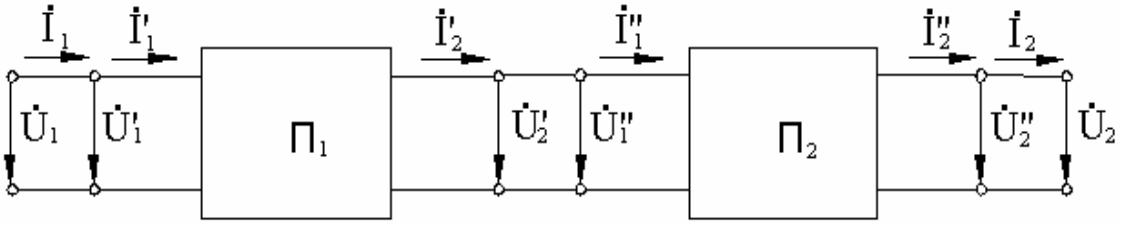
Съответният матричен запис на системата с A – параметри е:

$$\begin{Vmatrix}\dot{U}_1\\ \dot{I}_1\end{Vmatrix}=\begin{Vmatrix}A & B\\ C & D\end{Vmatrix}.\begin{Vmatrix}\dot{U}_2\\ \dot{I}_2\end{Vmatrix},\ \text{т.е.:}\ \begin{Vmatrix}\dot{U}_1\\ \dot{I}_1\end{Vmatrix}=\underline{A}\begin{Vmatrix}\dot{U}_2\\ \dot{I}_2\end{Vmatrix}. \qquad (2.4.3)$$

Б) Верижно, последователно, паралелно и смесено съединения на четириполюсници

1) Верижно съединение на четириполюсници

Верижното (каскадното или стъпалното) съединение на два четириполюсника е показано на фиг.2.4.1. От фигурата за това съединение могат да се установят



Фиг. 2.4.1

следните равенства:

$$\dot{U}_1=\dot{U}'_1;\ \dot{U}'_2=\dot{U}''_1;\ \dot{U}''_2=\dot{U}_2;$$
$$\dot{I}_1=\dot{I}'_1;\ \dot{I}'_2=\dot{I}''_1;\ \dot{I}''_2=\dot{I}_2. \qquad (2.4.4)$$

Тези равенства могат да бъдат записани и в матрична форма, т.е.:

$$\begin{Vmatrix}\dot{U}_1\\ \dot{I}_1\end{Vmatrix}=\begin{Vmatrix}\dot{U}'_1\\ \dot{I}'_1\end{Vmatrix};\ \begin{Vmatrix}\dot{U}'_2\\ \dot{I}'_2\end{Vmatrix}=\begin{Vmatrix}\dot{U}''_1\\ \dot{I}''_1\end{Vmatrix};\ \begin{Vmatrix}\dot{U}''_2\\ \dot{I}''_2\end{Vmatrix}=\begin{Vmatrix}\dot{U}_2\\ \dot{I}_2\end{Vmatrix} \qquad (2.4.5)$$

От израз (2.4.5) може да се установи, че в случая е удобно да се използуват системите уравнения с A – параметри. Матричният запис на тези системи за двата четириполюсника е:

$$\begin{Vmatrix}\dot{U}'_1\\ \dot{I}'_1\end{Vmatrix}=\begin{Vmatrix}A' & B'\\ C' & D'\end{Vmatrix}.\begin{Vmatrix}\dot{U}'_2\\ \dot{I}'_2\end{Vmatrix}\ \text{и}\ \begin{Vmatrix}\dot{U}''_1\\ \dot{I}''_1\end{Vmatrix}=\begin{Vmatrix}A'' & B''\\ C'' & D''\end{Vmatrix}.\begin{Vmatrix}\dot{U}''_2\\ \dot{I}''_2\end{Vmatrix}. \qquad (2.4.6)$$

От изрази (2.4.5) и (2.4.6) може да се получи, че:

$$\left\|\begin{matrix}\dot{U}_1\\ \dot{I}_1\end{matrix}\right\| = \left\|\begin{matrix}\dot{U}'_1\\ \dot{I}'_1\end{matrix}\right\| = \left\|\begin{matrix}A' & B'\\ C' & D'\end{matrix}\right\|.\left\|\begin{matrix}\dot{U}'_2\\ \dot{I}'_2\end{matrix}\right\| = \left\|\begin{matrix}A' & B'\\ C' & D'\end{matrix}\right\|.\left\|\begin{matrix}\dot{U}''_1\\ \dot{I}''_1\end{matrix}\right\| = \left\|\begin{matrix}A' & B'\\ C' & D'\end{matrix}\right\|.\left\|\begin{matrix}A'' & B''\\ C'' & D''\end{matrix}\right\|.\left\|\begin{matrix}\dot{U}''_2\\ \dot{I}''_2\end{matrix}\right\| =$$

$$= \left\|\begin{matrix}A'.A''+B'.C'' & A'.B''+B'.D''\\ C'.A''+D'.C'' & C'B''+D'.D''\end{matrix}\right\|.\left\|\begin{matrix}\dot{U}_2\\ \dot{I}_2\end{matrix}\right\| = \left\|\begin{matrix}A & B\\ C & D\end{matrix}\right\|.\left\|\begin{matrix}\dot{U}_2\\ \dot{I}_2\end{matrix}\right\| = \underline{A}.\left\|\begin{matrix}\dot{U}_2\\ \dot{I}_2\end{matrix}\right\| \qquad (2.4.7)$$

От последния израз може да се установи, че матрицата на A – параметрите на два верижно съединени четириполюсника е равна на произведението на матриците на A – параметрите на двата четириполюсника. Този резултат може да бъде обобщен при верижно съединение на повече от два четириполюсника, т.е.:

$$\underline{A} = \prod_{i=1}^{n} \underline{A}_i \ . \qquad (2.4.8)$$

Тук трябва да се има предвид това, че мястото на матриците $\underline{A}_i$ в прозведението (2.4.8) трябва да съответствува на мястото на съответните четириполюсници в каскадното съединение.

2) Последователно съединение на четириполюсници

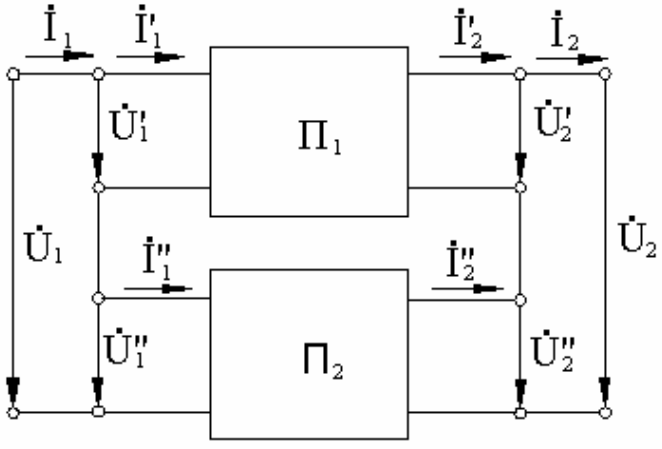
Последователното съединение на два четириполюсника е показано на фиг.2.4.2. От фигурата за това съединение могат да бъдат установени следните равенства:

$$\dot{I}_1 = \dot{I}'_1 = \dot{I}''_1 \ ; \quad \dot{I}_2 = \dot{I}'_2 = \dot{I}''_2 \ ; \quad \dot{U}_1 = \dot{U}'_1 + \dot{U}''_1 \ ; \quad \dot{U}_2 = \dot{U}'_2 + \dot{U}''_2 \ . \qquad (2.4.9)$$

Матричният запис на тези равенства е следният:

$$\left\|\begin{matrix}\dot{I}_1\\ \dot{I}_2\end{matrix}\right\| = \left\|\begin{matrix}\dot{I}'_1\\ \dot{I}'_2\end{matrix}\right\| = \left\|\begin{matrix}\dot{I}''_1\\ \dot{I}''_2\end{matrix}\right\| \quad \text{и} \quad \left\|\begin{matrix}\dot{U}_1\\ \dot{U}_2\end{matrix}\right\| = \left\|\begin{matrix}\dot{U}'_1\\ \dot{U}'_2\end{matrix}\right\| + \left\|\begin{matrix}\dot{U}''_1\\ \dot{U}''_2\end{matrix}\right\| . \qquad (2.4.10)$$

От изрази (2.4.10) може да се установи, че в случая е удобно да се използуват системите уравнения с Z – параметри. Матричният запис на тези системи за двата четириполюсника е:



Фиг. 2.4.2

$$\left\|\begin{matrix}\dot{U}'_1\\ \dot{U}'_2\end{matrix}\right\| = \left\|\begin{matrix}Z'_{11} & Z'_{12}\\ Z'_{21} & Z'_{22}\end{matrix}\right\|.\left\|\begin{matrix}\dot{I}'_1\\ \dot{I}'_2\end{matrix}\right\| \quad \text{и} \quad \left\|\begin{matrix}\dot{U}''_1\\ \dot{U}''_2\end{matrix}\right\| = \left\|\begin{matrix}Z''_{11} & Z''_{12}\\ Z''_{21} & Z''_{22}\end{matrix}\right\|.\left\|\begin{matrix}\dot{I}''_1\\ \dot{I}''_2\end{matrix}\right\| . \qquad (2.4.11)$$

От изрази (2.4.10) и (2.4.11) може да се получи,че:

$$\left\|\begin{matrix}\dot{U}_1\\ \dot{U}_2\end{matrix}\right\| = \left\|\begin{matrix}\dot{U}'_1\\ \dot{U}'_2\end{matrix}\right\| + \left\|\begin{matrix}\dot{U}''_1\\ \dot{U}''_2\end{matrix}\right\| = \left\|\begin{matrix}Z'_{11} & Z'_{12}\\ Z'_{21} & Z'_{22}\end{matrix}\right\| . \left\|\begin{matrix}\dot{I}'_1\\ \dot{I}'_2\end{matrix}\right\| + \left\|\begin{matrix}Z''_{11} & Z''_{12}\\ Z''_{21} & Z''_{22}\end{matrix}\right\| . \left\|\begin{matrix}\dot{I}''_1\\ \dot{I}''_2\end{matrix}\right\| =$$

$$= \left\|\begin{matrix}Z'_{11}+Z''_{11} & Z'_{12}+Z''_{12}\\ Z'_{21}+Z''_{21} & Z'_{22}+Z''_{22}\end{matrix}\right\| . \left\|\begin{matrix}\dot{I}_1\\ \dot{I}_2\end{matrix}\right\| = \left\|\begin{matrix}Z_{11} & Z_{12}\\ Z_{21} & Z_{22}\end{matrix}\right\| . \left\|\begin{matrix}\dot{I}_1\\ \dot{I}_2\end{matrix}\right\| . \qquad (2.4.12)$$

От последния израз може да се установи, че матрицата на Z–параметрите на два последователно свързани четириполюсника е равна на сумата на матриците на Z–параметрите на двата четириполюсника. Този резултат може да бъде обобщен при последователно съединение на повече от два четириполюсника, т.е.:

$$\underline{Z} = \sum_{i=1}^{n} \underline{Z}_i \, . \qquad (2.4.13)$$

3) Паралелно съединение на четириполюсници.

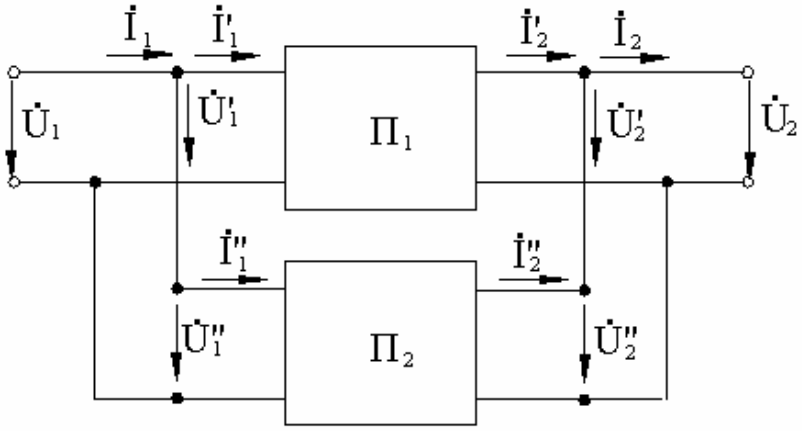
Паралелно съединение на два четириполюсника е показано на фиг. 2.4.3. От фигурата за това съединение могат да бъдат установени следните равенства:

$$\dot{U}_1 = \dot{U}'_1 = \dot{U}''_1 \; ; \quad \dot{U}_2 = \dot{U}'_2 = \dot{U}''_2 \; ;$$
$$\dot{I}_1 = \dot{I}'_1 + \dot{I}''_1 \; ; \quad \dot{I}_2 = \dot{I}'_2 + \dot{I}''_2 \; . \qquad (2.4.14)$$

Матричният запис на тези равенства е следният:

$$\left\|\begin{matrix}\dot{U}_1\\ \dot{U}_2\end{matrix}\right\| = \left\|\begin{matrix}\dot{U}'_1\\ \dot{U}'_2\end{matrix}\right\| = \left\|\begin{matrix}\dot{U}''_1\\ \dot{U}''_2\end{matrix}\right\| \quad \text{и} \quad \left\|\begin{matrix}\dot{I}_1\\ \dot{I}_2\end{matrix}\right\| = \left\|\begin{matrix}\dot{I}'_1\\ \dot{I}'_2\end{matrix}\right\| + \left\|\begin{matrix}\dot{I}''_1\\ \dot{I}''_2\end{matrix}\right\| . \qquad (2.4.15)$$

От изрази (2.4.15) може да се установи, че в случая е удобно да се използуват системите уравнения с Y – параметри. Матричният запис на тези системи за двата



Фиг. 2.4.3

четириполюсника е:

$$\left\|\begin{matrix}\dot{I}'_1\\ \dot{I}'_2\end{matrix}\right\| = \left\|\begin{matrix}Y'_{11} & Y'_{12}\\ Y'_{21} & Y'_{22}\end{matrix}\right\| . \left\|\begin{matrix}\dot{U}'_1\\ \dot{U}'_2\end{matrix}\right\| \quad \text{и} \quad \left\|\begin{matrix}\dot{I}''_1\\ \dot{I}''_2\end{matrix}\right\| = \left\|\begin{matrix}Y''_{11} & Y''_{12}\\ Y''_{21} & Y''_{22}\end{matrix}\right\| . \left\|\begin{matrix}\dot{U}''_1\\ \dot{U}''_2\end{matrix}\right\| . \qquad (2.4.16)$$

От изрази (2.4.15) и (2.4.16) може да се получи, че:

$$\begin{Vmatrix}\dot{I}_1\\ \dot{I}_2\end{Vmatrix}=\begin{Vmatrix}\dot{I}'_1\\ \dot{I}'_2\end{Vmatrix}+\begin{Vmatrix}\dot{I}''_1\\ \dot{I}''_2\end{Vmatrix}=\begin{Vmatrix}Y'_{11} & Y'_{12}\\ Y'_{21} & Y'_{22}\end{Vmatrix}.\begin{Vmatrix}\dot{U}'_1\\ \dot{U}'_2\end{Vmatrix}+\begin{Vmatrix}Y''_{11} & Y''_{12}\\ Y''_{21} & Y''_{22}\end{Vmatrix}.\begin{Vmatrix}\dot{U}''_1\\ \dot{U}''_2\end{Vmatrix}=$$

$$\begin{Vmatrix}Y'_{11}+Y''_{11} & Y'_{12}+Y''_{12}\\ Y'_{21}+Y''_{21} & Y'_{22}+Y''_{22}\end{Vmatrix}.\begin{Vmatrix}\dot{U}_1\\ \dot{U}_2\end{Vmatrix}=\begin{Vmatrix}Y_{11} & Y_{12}\\ Y_{21} & Y_{22}\end{Vmatrix}.\begin{Vmatrix}\dot{U}_1\\ \dot{U}_2\end{Vmatrix}. \qquad (2.4.17)$$

От получения израз може да се установи, че матрицата с Y – параметрите на два паралелно съединени четириполюсника е равна на сумата от матриците с Y – параметрите на двата четириполюсника. Този резултат може да бъде обобщен при паралелно съединение на повече от два четириполюсника, т.е.:

$$\underline{Y}=\sum_{i=1}^{n}\underline{Y_i}\,. \qquad (2.4.18)$$

4) Смесено съединение на четириполюсници

Разглеждат се два типа смесено съединение на четириполюсници – последователно-паралелно и паралелно-последователно. При два четириполюсника те са показани на фиг.2.4.4, като а) се отнася за последователно-паралелно съединение, а б) – за паралелно-последователно съединение.

От фигурата може да се установи, че при първия тип съединение е удобно да се използуват системите уравнения с H – параметри, а при втория тип съединение – системите уравнения с G – параметри.

По аналогичен начин, както при последователното и паралелното съединение на два четириполюсника, за последователно-паралелното им съединение може да се получи, че:

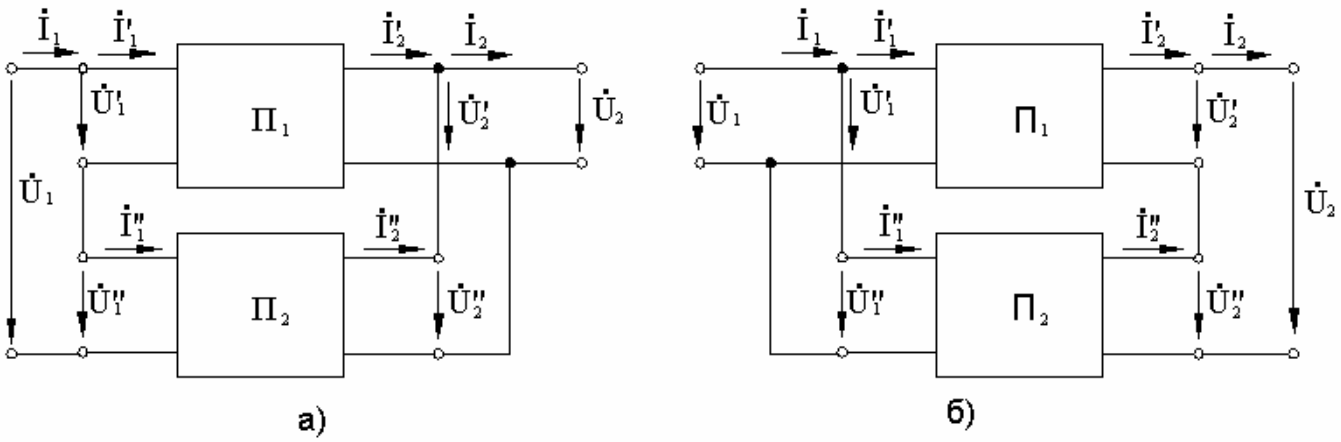
$$\underline{H}=\underline{H_1}+\underline{H_2}\,, \qquad (2.4.19)$$

а за паралелно-последователното им съединение съответно:

$$\underline{G}=\underline{G_1}+\underline{G_2}\,. \qquad (2.4.20)$$

В случай на смесено съединение на повече от два четириполюсника за последователно-паралелното им съединение може да се запише:

$$\underline{H}=\sum_{i=1}^{n}\underline{H_i}\,, \qquad (2.4.21)$$



Фиг. 2.4.4

а за паралелно-последователното им съединение съответно:

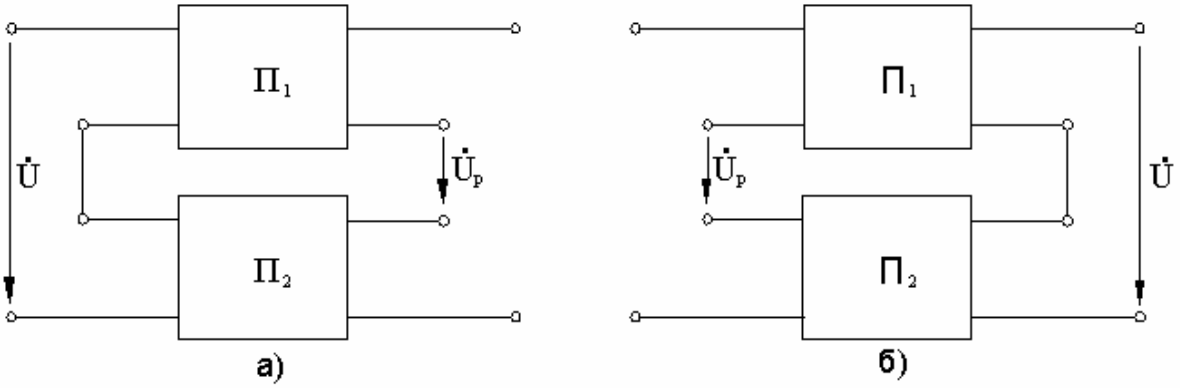
$$\underline{G} = \sum_{i=1}^{n} \underline{G_i} \,. \qquad (2.4.22)$$

В) Регулярност на съединенията на четириполюсници

Съединението на четириполюсници е регулярно, ако осъществяването му не води до преразпределение на токовете и напреженията в съставящите го четириполюсници. Верижното съединение на четириполюсници е винаги регулярно. За останалите съединения е необходимо да се прави проверка. За целта се извършват по два опита.

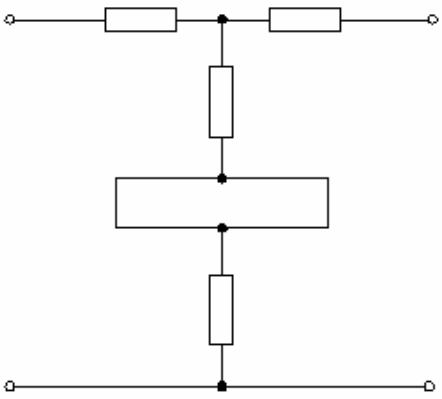
1) Проверка за регулярност при последователно съединение на четириполюсници

Проверката за регулярност при последователно съединение на четириполюсници се прави по схемите от фиг.2.4.5. В случай на регулярност напрежението $\dot{U}_p$ е равно на нула. Стойността му се измерва или се изчислява при известни вътрешни структури на четириполюсниците.

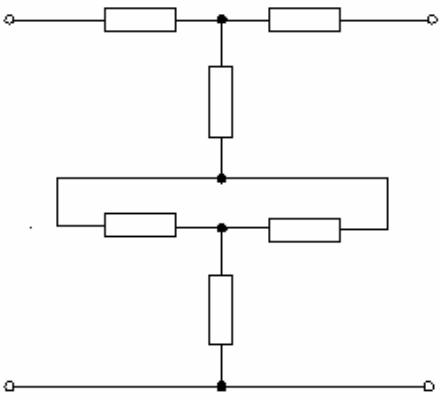


Фиг. 2.4.5

За илюстрация на фиг.2.4.6 е показано регулярно последователно съединение на два T – образни четириполюсника, а на фиг. 2.4.7 – нерегулярно последователно съединение на два четириполюсника от същия тип.

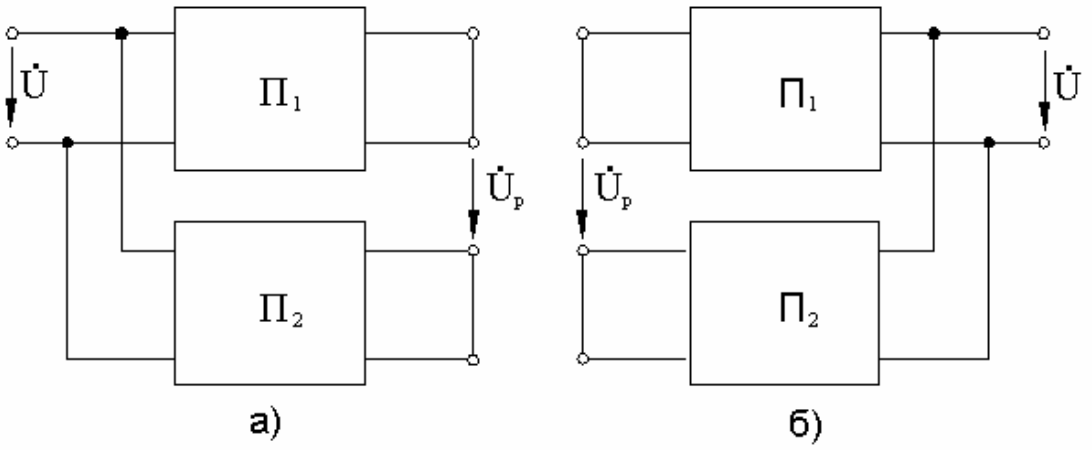


Фиг. 2.4.6



Фиг. 2.4.7

2) Проверка за регулярност при паралелно съединение на четириполюсници.



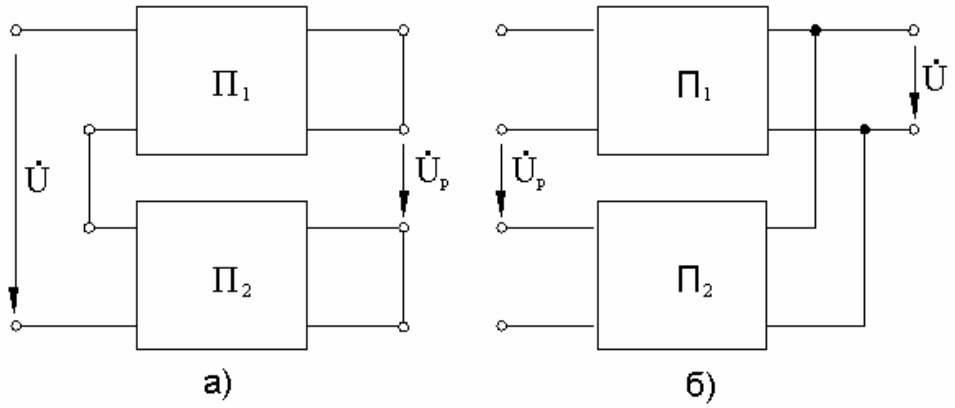
Фиг. 2.4.8

Проверката за регулярност при паралелно съединение на четириполюсници се прави по схемите от фиг.2.4.8.

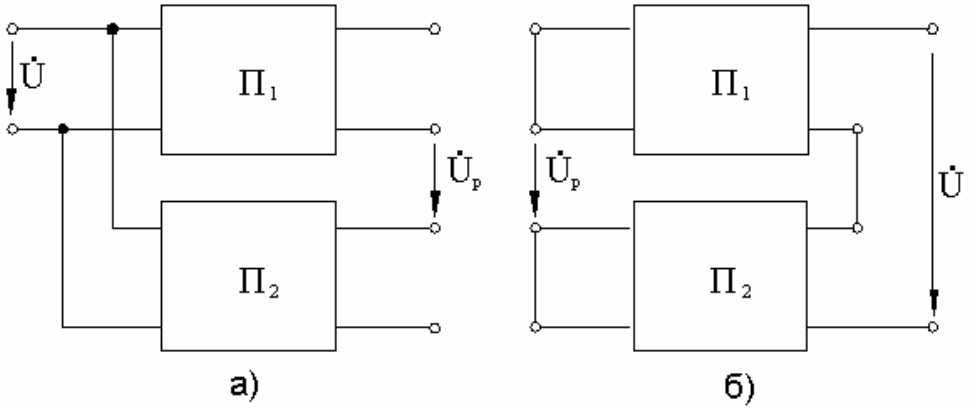
В случай, че напрежението $\dot{U}_p$ е равно на нула, то съединението им е регулярно.

1) Проверка за регулярност при смесено съединение на четириполюсници

Проверката за регулярност при последователно-паралелно съединение на четириполюсници се прави по схемите от фиг.2.4.9, а при паралелно-последователно съединение – по схемите от фиг.2.4.10. И тук ако напрежението $\dot{U}_p$ е равно на нула, то съединението е регулярно.



Фиг. 2.4.9



Фиг. 2.4.10

Във връзка с проверката за регулярност на съединенията на четириполюсници е целесъобразно да се имат предвид следните общи правила:

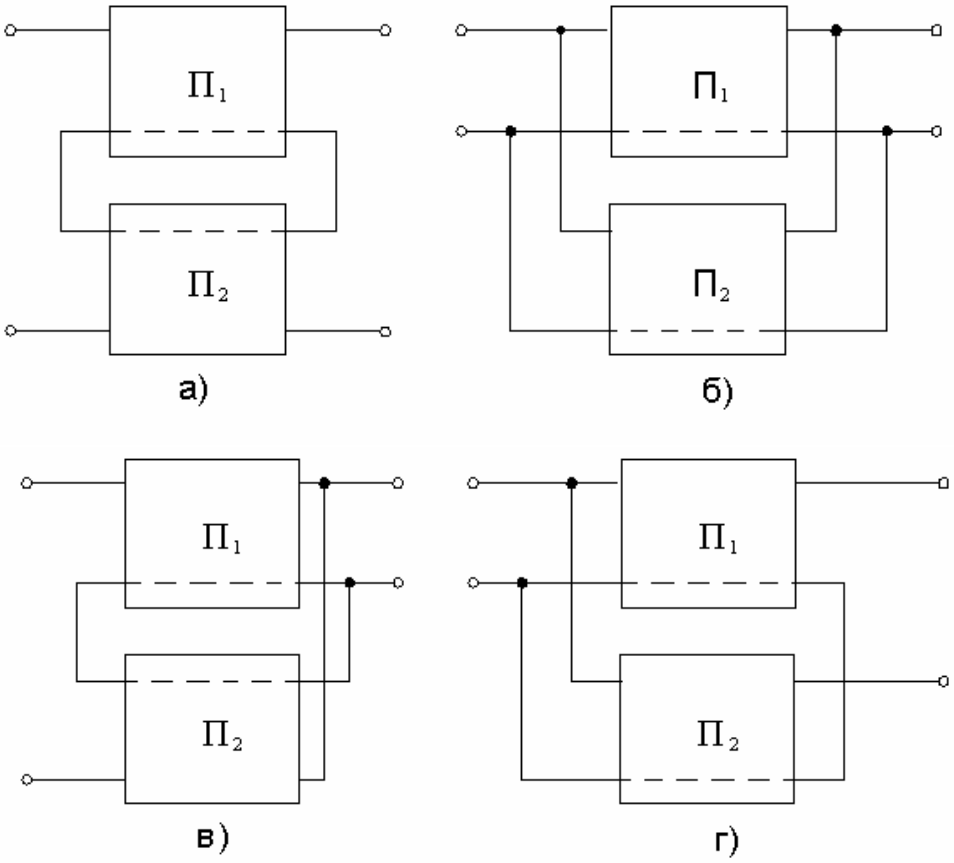
1. Всяко верижно съединение е регулярно.

2. Всяко нерегулярно съединение става регулярно чрез включване на идеални трансформатори.

3. За получаване на регулярно последователно, паралелно и смесено съединение на два четириполюсника, е необходимо общите им изводи да се свържат заедно. Това е илюстрирано на фиг.2.4.11.

4. Паралелното съединение на два уравновесени четириполюсника е регулярно. Под уравновесен четириполюсник се разбира такъв четириполюсник, който има хоризонтална ос на симетрия. Например, ако двата T–образни четириполюсника от фиг.2.4.6 са еднакви, то последователното им съединение представлява уравновесен четириполюсник.

5. Паралелното съединение на подобни четириполюсници с еднакви схеми и с пропорционални стойности на параметрите на елементите им е регулярно.



Фиг.2.4.11

2.5. Предавателни функции на пасивни четириполюсници. Обратни връзки. Диференциращи и интегриращи вериги

А) Предавателни функции на пасивен четириполюсник

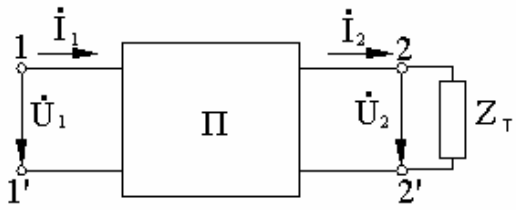
Разглежда се участък от сложна електрическа верига, за който напрежението е $u_1(t)$, а токът - $i_1(t)$. Приема се, че под действието на тези величини в друг участък на веригата възникват напрежение $u_2(t)$ и ток $i_2(t)$. Величините $u_1(t)$ и $i_1(t)$ се наричат входни, а величините $u_2(t)$ и $i_2(t)$ – изходни.

Под комплексна предавателна функция (комплексен коефициент на предаване) се разбира отношението от комплексите на изходната към входната величина, т.е.:

$$\dot{K}_I = \frac{\dot{I}_2}{\dot{I}_1}; \quad \dot{K}_U = \frac{\dot{U}_2}{\dot{U}_1}; \quad \dot{K}_Z = \frac{\dot{U}_2}{\dot{I}_1} \quad \text{и} \quad \dot{K}_Y = \frac{\dot{I}_2}{\dot{U}_1}. \tag{2.5.1}$$

Предавателните функции по ток $\dot{K}_I$ и по напрежение $\dot{K}_U$ са безразмерни. Предавателната функция по съпротивление $\dot{K}_Z$ има размерност на съпротивление, а предавателната функция по проводимост $\dot{K}_Y$ - на проводимост.

Ако входният и изходният участъци се отделят от веригата, останалата й част може да бъде разглеждана като пасивен четириполюсник. При такава постановка пасивният четириполюсник свързва входния и изходния участъци и служи за предаване на входното въздействие към изхода. В такъв случай предавателната функция ще се определя от параметрите на четириполюсника.



Фиг. 2.5.1

Приема се, че за четириполюсника от фиг.2.5.1 са известни входните величини $\dot{U}_1$ и $\dot{I}_1$, и съпротивлението на товара Z_T. Записва се системата със Z–параметри:

$$\begin{vmatrix} \dot{U}_1 = Z_{11}.\dot{I}_1 + Z_{12}.\dot{I}_2 ; \\ \dot{U}_2 = Z_{21}.\dot{I}_1 + Z_{22}.\dot{I}_2 . \end{vmatrix} \tag{2.5.2}$$

Като се има предвид, че съпротивлението Z_T е известно, то токът $\dot{I}_2$ ще бъде $\dot{I}_2 = \dot{U}_2 / Z_T$ и от второто уравнение на системата (2.5.2) за тока $\dot{I}_1$ се получава:

$$\dot{I}_1 = \frac{Z_T - Z_{22}}{Z_T.Z_{21}}.\dot{U}_2. \tag{2.5.3}$$

Така определен токът $\dot{I}_1$ се замества в първото уравнение на система (2.5.2), т.е.:

$$\dot{U}_1 = \frac{Z_{11}.Z_T - Z_{11}Z_{22} + Z_{12}.Z_{21}}{Z_{21}.Z_T}.\dot{U}_2. \tag{2.5.4}$$

От израз (2.5.4) за предавателната функция по напрежение $\dot{K}_U$ се получава:

$$\dot{K}_U = \frac{\dot{U}_2}{\dot{U}_1} = \frac{Z_{21}.Z_T}{Z_{11}.Z_T - Z_{11}.Z_{22} + Z_{12}.Z_{21}}. \tag{2.5.5}$$

Ако се разглежда режим на празен ход, т.е.: $Z_T \to \infty$, се записва:

$$\dot{K}_U = Z_{21}/Z_{11}. \tag{2.5.6}$$

От израз (2.5.3) за предавателната функция по съпротивление $\dot{K}_Z$ се получава:

$$\dot{K}_Z = \frac{\dot{U}_2}{\dot{I}_1} = \frac{Z_{21}.Z_T}{Z_T - Z_{22}}. \tag{2.5.7}$$

При празен ход ($Z_T \to \infty$) от последния израз може да се установи, че:

$$\dot{K}_Z = Z_{21} . \qquad (2.5.8)$$

Предавателните функции на пасивен четириполюсник могат да бъдат изразени и чрез A–параметрите на четириполюсника и съпротивлението на товара Z_T . За целта се изхожда от системата уравнения с A – параметри:

$$\begin{cases} \dot{U}_1 = A.\dot{U}_2 + B.\dot{I}_2 ; \\ \dot{I}_2 = C.\dot{U}_2 + D.\dot{I}_2 . \end{cases} \qquad (2.5.9)$$

В първото уравнение на система (2.5.9) се полага $\dot{I}_2 = \dot{U}_2 / Z_T$ и след заместване за предавателната функция $\dot{K}_U$ се получава:

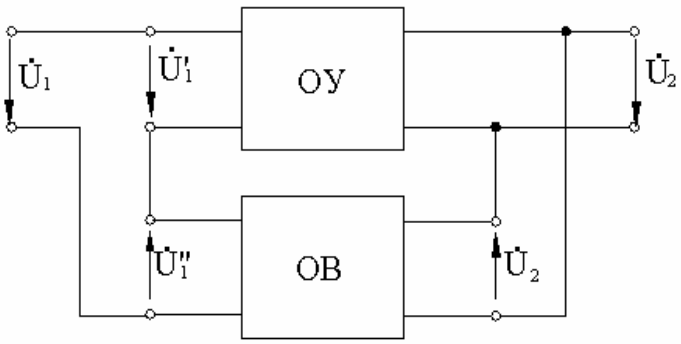
$$\dot{K}_U = \frac{Z_T}{A.Z_T + B} . \qquad (2.5.10)$$

В случай на празен ход ($Z_T \to \infty$) от последния израз може да се запише:

$$\dot{K}_U = 1/A . \qquad (2.5.11)$$

За определяне на предавателната функция $\dot{K}_I$ във второто уравнение на система (2.5.9) се полага $\dot{U}_2 = \dot{I}_2 .Z_T$ и след заместване се получава:

$$\dot{K}_I = \frac{1}{C.Z_T + D} . \qquad (2.5.12)$$



Фиг. 2.5.2

В случай на късо съединение ($Z_T = 0$) от последния израз може да се установи, че:

$$\dot{K}_I = 1/D . \qquad (2.5.13)$$

Уравненията на четириполюсника могат да бъдат записани в операторна форма. В такъв случай могат да бъдат получени операторни предавателни функции. Например, за операторната предавателна функция по напрежение $K_U(p)$ се записва:

$$K_U(p) = \frac{U_2(p)}{U_1(p)} = \frac{Z_{21}(p).Z_T(p)}{Z_{11}(p).Z_T(p) - Z_{11}(p).Z_{22}(p) + Z_{12}(p).Z_{21}(p)} . \qquad (2.5.14)$$

Ако входната и изходна величини удовлетворяват условията за прилагане на преобразуването на Фурие, то след заместване на p с $j\omega$ се получават честотните предавателни функции (характеристики) на четириполюсника. Например, за честотна предавателна функция по напрежение $K_U(j\omega)$ се получава:

$$K_U(j\omega) = \frac{U_2(j\omega)}{U_1(j\omega)} = K_U(\omega).e^{j\alpha_U(\omega)} , \qquad (2.5.15)$$

където $K_U(\omega)$ е амплитудно-честотната предавателна функция по напрежение;

$\alpha_U(\omega)$ - фазово-честотната предавателна функция по напрежение.

Б) Обратни връзки

Устройства, служещи за подаване на сигнала от изхода на някакво друго устройство, условно наречено основно устройство (ОУ), на входа му се наричат обратни връзки (ОВ). Двете устройства – ОУ и ОВ представляват четириполюсници (фиг. 2.5.2).

Входното напрежение на ОВ е изходното напрежение $\dot{U}_2$ на ОУ, а изходното напрежение $\dot{U}''_1$ на ОВ се подава на входа на ОУ.

С $\dot{U}_1$ се означава напрежението на системата “ОУ-ОВ”. За напрежението $\dot{U}''_1$ се приема, че то се добавя към напрежението $\dot{U}_1$, т.е. за напрежението $\dot{U}'_1$ на входа на ОУ се записва:

$$\dot{U}'_1 = \dot{U}_1 + \dot{U}''_1 . \qquad (2.5.16)$$

Приема се също, че операторната предавателна функция $K_U(p)$ на ОУ и операторната предавателна функция $W_U(p)$ на ОВ са известни. В случая те се определят по следния начин:

$$K_U(p) = \frac{U_2(p)}{U'_1(p)} \quad \text{и} \quad W_U(p) = \frac{U''_1(p)}{U_2(p)} . \qquad (2.5.17)$$

От изрази (2.5.16) и (2.5.17) може да се запише:

$$U_2(p)/K_U(p) = U'_1(p) = U_1(p) + U''_1(p) = U_1(p) + W_U(p).U_2(p) , \qquad (2.5.18)$$

откъдето се получава операторната предавателна функция $K_{CU}(p)$ на системата “ОУ-ОВ”:

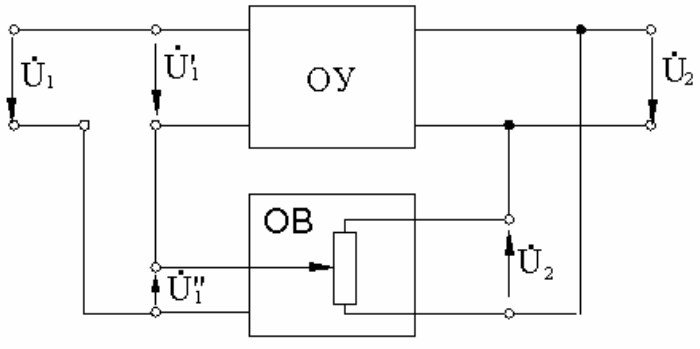
$$K_{CU}(p) = \frac{U_2(p)}{U_1(p)} = \frac{K_U(p)}{1 - W_U(p).K_U(p)} . \qquad (2.5.19)$$

Известни са две класификации на ОВ:

- I класификация – ОВ по напрежение и ОВ по ток;
- II класификация – положителна ОВ и отрицателна ОВ.

Отначало се разглежда ОВ по напрежение. В най-простия случай устройството за ОВ може да бъде делител на напрежение (фиг.2.5.3), за който се записва:

$$\dot{U}''_1 = \beta.\dot{U}_2 . \qquad (2.5.20)$$



Фиг. 2.5.3

В такъв случай операторната предавателна функция на ОВ ще бъде:

$$W_U(p) = \frac{U''_1(p)}{U_2(p)} = \beta . \qquad (2.5.21)$$

Ако операторната предавателна функция на ОУ е $K_U(p)$, то от изрази (2.5.19) и (2.5.21) за операторната предавателна функция на системата “ОУ-ОВ” се записва:

$$K_{CU}(p) = \frac{K_U(p)}{1 - \beta.K_U(p)} .$$

В случай, че операторната предавателна функция $K_U(p)$ на ОУ е реално число α, то операторната предавателна функция $K_{CU}(p)$ на системата “ОУ-ОВ” ще бъде също реално число, т.е.:

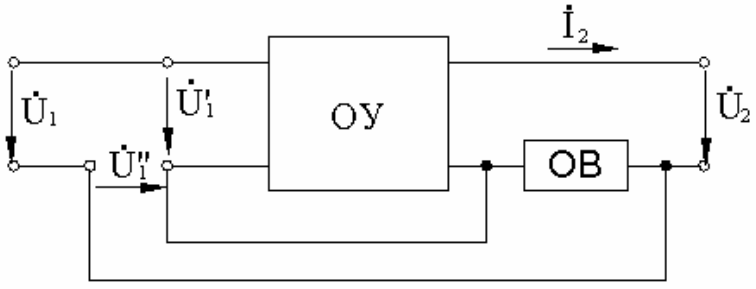
$$K_{CU}(p) = \frac{\alpha}{1-\beta.\alpha} = K' . \qquad (2.5.23)$$

Тук са възможни следните два случая:

1. Ако се приеме, че $\beta > 0$, то $K' > \alpha$, т.е. ОВ ще способствува за увеличаване на сигнала на изхода на ОУ. Такава ОВ се нарича положителна.

2. Ако се приеме, че $\beta < 0$, то $K' < \alpha$, т.е. ОВ ще способствува за намаляване на сигнала на изхода на ОУ. Такава ОВ се нарича отрицателна.

Докато при ОВ по напрежение изходното напрежение $\dot{U}''_1$ на ОВ се определя от напрежението $\dot{U}_2$ на изхода на ОУ, то при ОВ по ток изходното напрежение $\dot{U}''_1$ на ОВ се определя от изходния ток $\dot{I}_2$ на ОУ. За илюстрация на фиг.2.5.4 е показана схемата на системата “ОУ-ОВ” при ОВ по ток.



Фиг. 2.5.4

Приема се, че операторната предавателна функция $K_Y(p)$ на ОУ е известна, т.е.:

$$K_Y(p) = I_2(p)/U'_1(p) . \qquad (2.5.24)$$

Ако операторното съпротивление на ОВ е $Z(p)$, то:

$$U''_1(p) = Z(p).I_2(p) . \qquad (2.5.25)$$

От изрази (2.5.24) и (2.5.25) за напрежението $U'_1(p)$ се получава:

$$U'_1(p) = U_1(p) + U''_1(p) = U_1(p) + Z(p).I_2(p) = \frac{I_2(p)}{K_Y(p)} . \qquad (2.5.26)$$

От последния израз може да се запише:

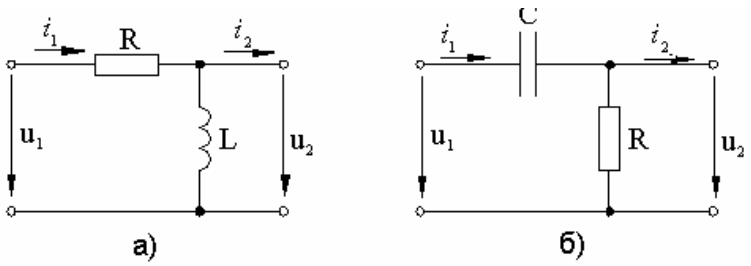
$$U_1(p) = \frac{1 - Z(p).K_Y(p)}{K_Y(p)} I_2(p) , \qquad (2.5.27)$$

откъдето за операторната предавателна функция $K_{CY}(p)$ на системата “ОУ-ОВ” се получава:

$$K_{CY}(p) = \frac{I_2(p)}{U_1(p)} = \frac{K_Y(p)}{1 - Z(p).K_Y(p)} . \qquad (2.5.28)$$

В) Диференциращи и интегриращи вериги

В автоматиката, изчислителната техника и др. намират широко приложение устройства, при които изходният сигнал е пропорционален на производната или на



Фиг. 2.5.5

интеграла на входния сигнал, т.е. изходното им напрежение е пропорционално на производната или интеграла на входното им напрежение. Такива устройства се наричат диференциращи или интегриращи вериги (звена).

На фиг.2.5.5 са показани схемите на две диференциращи вериги. Приема се, че към изходите им са свързани консуматори с достатъчно големи съпротивления, така че изходните им токове са много малки и могат да бъдат пренебрегнати, т.е.: i_2=0.

За веригата от фиг.2.5.5а при нулеви начални условия може да се запише:

$$U_2(p) = p.L.I_1(p) = \frac{p.L}{R + p.L} U_1(p), \qquad (2.5.29)$$

откъдето за операторната предавателна функция $K_U(p)$ се получава:

$$K_U(p) = \frac{U_2(p)}{U_1(p)} = \frac{p.L}{R + p.L}. \qquad (2.5.30)$$

Ако времеконстантата L/R е много по-малка от интервала от време, за който напрежението $u_1(t)$ се изменя забележимо, то:

$$I_1(p) \approx \frac{U_2(p)}{R}; \quad U_2(p) \approx \frac{L}{R}.p.U_1(p) \quad \text{и} \quad K_U(p) \approx \frac{L}{R}.p. \qquad (2.5.31)$$

Тъй като при нулеви начални условия $p.U_1(p) \;\doteqdot\; \frac{d}{dt}.u_1(t)$, то:

$$u_2(t) \approx \frac{L}{R}.\frac{d}{dt}.u_1(t). \qquad (2.5.32)$$

От последния израз може да се установи, че чрез разглежданата верига може да се получи изходно напрежение, което да бъде пропорционално на производната на входното напрежение.

Аналогичен резултат може да бъде получен и за веригата от фиг.2.5.5б. И действително, за напрежението $U_2(p)$ се записва:

$$U_2(p) = R.I_1(p) = \frac{R}{R + 1/p.C}.U_1(p), \qquad (2.5.33)$$

откъдето за операторната предавателна функция $K_U(p)$ се получава:

$$K_U(p) = \frac{U_2(p)}{U_1(p)} = \frac{R}{R + 1/p.C}. \qquad (2.5.34)$$

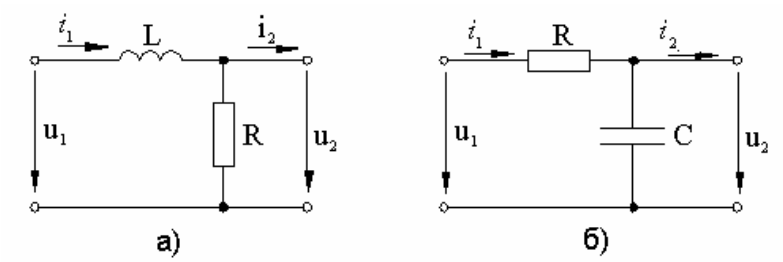
Ако времеконстантата $R.C$ е много по-малка от интервала от време, за който напрежението $u_1(t)$ се изменя забележимо, то:

$$I_1(p) \approx p.C.U_1(p); \quad U_2(p) \approx R.p.C.U_1(p) \quad \text{и} \quad K_U(p) \approx p.R.C. \qquad (2.5.35)$$

При нулеви начални условия се записва:

$$u_2(t) \approx R.C.\frac{d}{dt}.u_1(t), \qquad (2.5.36)$$

което означава, че и чрез тази верига може да се получи изходно напрежение, което



Фиг. 2.5.6

да бъде пропорционално на производната на входното напрежение.

На фиг.2.5.6 са показани схемите на две интегриращи вериги. И тук, както при диференциращите вериги, се приема, че съпротивленията на консуматорите им са достатъчно големи, така че изходните им токове са много малки и могат да бъдат пренебрегнати, т.е.: $i_2 = 0$.

За веригата от фиг.2.5.6а може да се запише:

$$U_2(p) = R.I_1(p) = \frac{R}{R + p.L} U_1(p), \qquad (2.5.37)$$

откъдето за операторната предавателна функция $K_U(p)$ се получава:

$$K_U(p) = \frac{U_2(p)}{U_1(p)} = \frac{R}{R + p.L}. \qquad (2.5.38)$$

Ако времеконстантата L/R е много по-голяма от интервала от време, за който напрежението $u_1(t)$ се изменя забележимо, то:

$$I_1(p) \approx \frac{U_1(p)}{p.L}; \quad U_2(p) \approx \frac{R}{L}.\frac{1}{p}.U_1(p) \quad \text{и} \quad K_U(p) \approx \frac{R}{p.L}. \qquad (2.5.39)$$

Тъй като $\frac{1}{p}.U_1(p) \;\rightleftharpoons\; \int_0^t u_1(t)dt$, то:

$$u_2(t) \approx \frac{R}{L}.\int_0^t u_1(t)dt. \qquad (2.5.40)$$

За веригата от фиг.2.5.6б може да се запише:

$$U_2(p) = \frac{I_1(p)}{p.C} = \frac{1/p.C}{R + 1/p.C}.U_1(p), \qquad (2.5.41)$$

откъдето за операторната предавателна функция $K_U(p)$ се получава:

$$K_U(p) = \frac{U_2(p)}{U_1(p)} = \frac{1/p.C}{R + 1/p.C}. \qquad (2.5.42)$$

Ако времеконстантата $R.C$ е много по-голяма от интервала от време, за който напрежението $u_1(t)$ се изменя забележимо, то:

$$I_1(p) \approx \frac{U_1(p)}{R}; \quad U_2(p) \approx \frac{U_1(p)}{R.p.C} \quad \text{и} \quad K_U(p) \approx \frac{1}{p.R.C}. \qquad (2.5.43)$$

От последните изрази може да се установи, че:

$$u_2(t) \approx \frac{1}{R.C}.\int_0^t u_1(t)dt. \qquad (2.5.44)$$

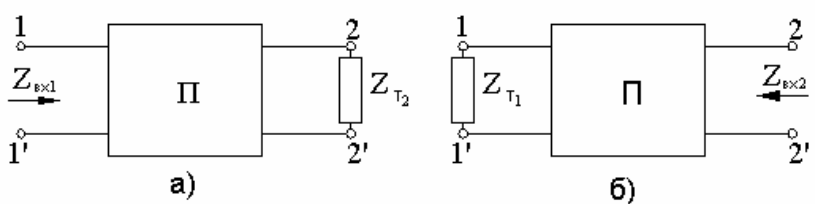
Въз основа на изложеното по-горе може да се заключи, че чрез веригите, показани на фиг.2.5.6 може да бъде осъществено интегриране на входния сигнал.

Недостатъкът на разгледаните диференциращи и интегриращи вериги е, че изходният им сигнал се получава значително по-малък от входния. Това налага да се включат допълнително усилватели или пък самите вериги да се усложняват чрез включване в тях на усилватели.

Разгледаното по-горе показва, че за получаването на диференциращи и интегриращи вериги могат да бъдат използувани комбинациите RL или RC. На практика предпочитание се дава на втората комбинация, която не само е по-лесно осъществима, но при нея и загубите са по-малки.

2.6. Характеристични параметри на пасивни четириполюсници

А) Входни и повторни съпротивления на пасивни четириполюсници



Фиг. 2.6.1

Въз основа на разгледаното в 2.1, входните съпротивления $Z_{вх.1}$ и $Z_{вх.2}$ на пасивен четириполюсник при право и обратно захранване (фиг.2.6.1) се определят от изразите:

$$Z_{вх.1}=\frac{\dot{U}_1}{\dot{I}_1}=\frac{A.\dot{U}_2+B.\dot{I}_2}{C.\dot{U}_2+D.\dot{I}_2} \quad \text{и} \quad Z_{вх.2}=\frac{\dot{U}_2}{\dot{I}_2}=\frac{D.\dot{U}_1+B.\dot{I}_1}{C.\dot{U}_1+D.\dot{I}_1}. \tag{2.6.1}$$

Като се има предвид, че при право захранване $\dot{U}_2=Z_{T2}.\dot{I}_2$, а при обратно захранване – $\dot{U}_1=Z_{T1}.\dot{I}_1$, то от изрази (2.6.1) се получава:

$$Z_{вх.1}=\frac{A.Z_{T2}+B}{C.Z_{T2}+D} \quad \text{и} \quad Z_{вх.2}=\frac{D.Z_{T1}+B}{C.Z_{T1}+A}. \tag{2.6.2}$$

Ако е изпълнено условието $Z_{вх.1}=Z_{T2}=Z_{П1}$ се дефинира величината първично повторно съпротивление.

От равенството $Z_{П1}=\left(A.Z_{П1}+B\right)/\left(C.Z_{П1}+D\right)$ се достига до уравнението:

$$C.Z_{П1}^2+\left(D-A\right)Z_{П1}-B=0. \tag{2.6.3}$$

Ако е изпълнено условието $Z_{вх.2}=Z_{T1}=Z_{П2}$, се дефинира величината вторично повторно съпротивление.

От равенството $Z_{П2}=\left(D.Z_{П2}+B\right)/\left(C.Z_{П2}+A\right)$ се достига до уравнението:

$$C.Z_{П2}^2+\left(A-D\right).Z_{П2}-B=0. \tag{2.6.4}$$

Решенията на уравнения (2.6.3) и (2.6.4) са:

$$Z_{П1}=\frac{\left(A-D\right)\pm\sqrt{\left(A-D\right)^2+4.B.C}}{2.C}=-Z_{П2}. \tag{2.6.5}$$

За взаимен четириполюсник като се има предвид условието $A.D-B.C=1$ се получава:

$$Z_{П1}=\frac{\left(A-D\right)\pm\sqrt{\left(A+D\right)^2-4}}{2.C}. \tag{2.6.6}$$

За симетричен четириполюсник $\left(A=D\right)$ се записва:

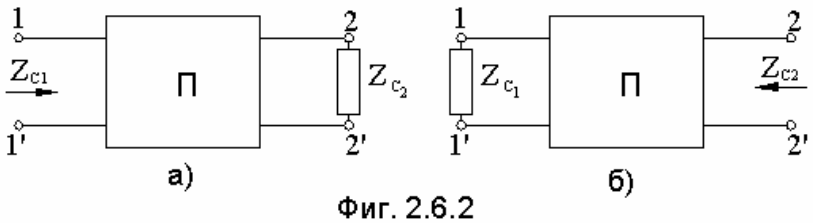
$$Z_{вх.1}=Z_{вх.2}=Z_{вх.}=\frac{A.Z_T+B}{C.Z_T+A}. \tag{2.6.7}$$

В този случай за повторните съпротивления се получава:

$$Z_{П1}=Z_{П2}=Z_П=\sqrt{B/C}. \tag{2.6.8}$$

Б) Характеристични съпротивления на пасивни четириполюсници

Разглежда се случай на съгласуван товар, т.е.: $Z_T=Z_{вх.}$. В този случай се дефинират величините характеристични съпротивления Z_{C1} и Z_{C2} (фиг.2.6.2).



Фиг. 2.6.2

Характеристичното съпротивление Z_{C1} е равно на такова товарно съпротивление Z_{T1}, включено между клеми 1-1′, така че между клеми 2-2′ да се получи $Z_{вх.2}=Z_{C2}$. Съответно характеристичното съпротивление Z_{C2} е равно на

такова товарно съпротивление Z_{T2}, включено между клеми 2-2′, така че между клеми 1-1′ да се получи $Z_{вх.1} = Z_{C1}$.

Съпротивленията Z_{C1} и Z_{C2} удовлетворяват условията:

$Z_{вх.1} = Z_{C1}$ при $Z_{T2} = Z_{C2}$ и $Z_{вх.2} = Z_{C2}$ при $Z_{T1} = Z_{C1}$. (2.6.9)

Въз основа на горните условия, като се има предвид изрази (2.6.2) се записват уравненията:

$$Z_{C1} = \frac{AZ_{C2} + B}{CZ_{C2} + D} \text{ и } Z_{C2} = \frac{DZ_{C1} + B}{CZ_{C1} + A}. \quad (2.6.10)$$

от съвместното решаване на които се достига до изразите:

$$Z_{C1} = \sqrt{\frac{AB}{CD}} \text{ и } Z_{C2} = \sqrt{\frac{DB}{CA}}. \quad (2.6.11)$$

Характеристичните съпротивления Z_{C1} и Z_{C2} могат да бъдат изразени чрез входните съпротивления при празен ход и късо съединение Z_{10} и Z_{1K}, съответно Z_{20} и Z_{2K}. И действително, като се имат предвид изразите $Z_{10} = \frac{A}{C}$; $Z_{1K} = \frac{B}{D}$; $Z_{20} = \frac{D}{C}$ и $Z_{2K} = \frac{B}{A}$, се записва:

$$Z_{C1} = \sqrt{Z_{10}.Z_{1K}} \text{ и } Z_{C2} = \sqrt{Z_{20}.Z_{2K}} \quad (2.6.13)$$

За симетричен четириполюсник $(A = D)$ за характеристичните съпротивления се получава:

$$Z_{C1} = Z_{C2} = Z_C = \sqrt{B/C} = Z_П. \quad (2.6.14)$$

От последния израз може да се заключи, че за симетричен четириполюсник характеристичното и повторното съпротивление съвпадат помежду си.

В) Константа на предаване(разпространение) на пасивни четириполюсници

Константата на предаване g дава възможност за сравняване на входните и изходните величини (напрежения и токове) на пасивен четириполюсник при съгласуван режим. В този случай тя се определя от израза:

$$g = \frac{1}{2}\ln\frac{\dot{U}_1\dot{I}_1}{\dot{U}_2\dot{I}_2} = \alpha + j\beta. \quad (2.6.15)$$

Величината $\alpha = \frac{1}{2}\ln\frac{U_1 I_1}{U_2 I_2}$ се нарича коефициент на затихване, а величината $\beta = \frac{1}{4}(\Psi_{u1} - \Psi_{u2}) + \frac{1}{4}(\Psi_{i1} - \Psi_{i2})$ - коефициент на фазата (U_1, U_2, I_1 и I_2 са съответно ефективните стойности на входните и изходни напрежения и токове, а ψ_{u1}, ψ_{u2}, ψ_{i1} и ψ_{i2} - техните начални фази).

Константата на предаване g може да бъде изразена чрез А-параметрите на четириполюсника. Като се има предвид равенството $Z_{T2} = Z_{C2} = \sqrt{\frac{DB}{CA}}$, се записва:

$$\frac{\dot{U}_1}{\dot{U}_2} = \frac{A\dot{U}_2 + B\frac{\dot{U}_2}{Z_{T2}}}{\dot{U}_2} = A + \frac{B}{Z_{T2}} = A + \frac{B}{Z_{C2}} = A + \sqrt{\frac{ABC}{D}}; \quad (2.6.16)$$

$$\frac{\dot{I}_1}{\dot{I}_2}=\frac{C\dot{Z}_{T2}\dot{I}_2+D\dot{I}_2}{\dot{I}_2}=CZ_{T2}+D=CZ_{C2}+D=D+\sqrt{\frac{BCD}{A}}\,. \qquad (2.6.17)$$

От изрази (2.6.16) и (2.6.17) може да се получи:

$$\frac{\dot{U}_1}{\dot{U}_2}.\frac{\dot{I}_1}{\dot{I}_2}=\left(A+\sqrt{\frac{ABC}{D}}\right)\left(D+\sqrt{\frac{BCD}{A}}\right)=\left(\sqrt{AD}+\sqrt{BC}\right)^2, \qquad (2.6.18)$$

откъдето се достига до формулата:

$$g=\ln\left(\sqrt{AD}+\sqrt{BC}\right). \qquad (2.6.19)$$

За симетричен четириполюсник $(A=D)$ се получава:

$$g=\ln\left(A+\sqrt{BC}\right). \qquad (2.6.20)$$

От израз (2.6.19) може да се установи, че:

$$e^g=\sqrt{AD}+\sqrt{BC}\ \text{ и }\ e^{-g}=\sqrt{AD}-\sqrt{BC}\,, \qquad (2.6.21)$$

откъдето може да се запише:

$$chg=\sqrt{AD}\ \text{ и }\ shg=\sqrt{BC}\,. \qquad (2.6.22)$$

Като се имат предвид изрази (2.6.19) и че $\frac{Z_{C1}}{Z_{C2}}=\frac{A}{D}$ и $Z_{C1}Z_{C2}=B/C$, то A-параметрите могат да бъдат изразени чрез характеристичните параметри, т.е.:

$$\left|\begin{array}{l} A=\sqrt{\frac{Z_{C1}}{Z_{C2}}}chg\,;\quad B=\sqrt{Z_{C1}Z_{C2}}\,.shg\,; \\ C=\frac{shg}{\sqrt{Z_{C1}Z_{C2}}}\ \text{ и } D=\sqrt{\frac{Z_{C2}}{Z_{C1}}}\,.chg. \end{array}\right. \qquad (2.6.23)$$

Константата на предаване g може да бъде изразена чрез входните и изходните съпротивления на празен ход и късо съединение Z_{10} и Z_{1K} и съответно Z_{20} и Z_{2K}. За целта се записва:

$$thg=\frac{shg}{chg}=\frac{\sqrt{BC}}{\sqrt{AD}}=\sqrt{\frac{BC}{AD}}=\sqrt{\frac{Z_{1K}}{Z_{10}}}=\sqrt{\frac{Z_{2k}}{Z_{20}}}\,. \qquad (2.6.24)$$

Като се имат предвид изрази (2.6.23) системата уравнения на пасивен четириполюсник с A-параметри може да бъде записана чрез характеристичните параметри във вида:

$$\left|\begin{array}{l} \dot{U}_1=\left(\sqrt{\frac{Z_{C1}}{Z_{C2}}}\,chg\right)\dot{U}_2+\left(\sqrt{Z_{C1}Z_{C2}}\,shg\right)\dot{I}_2\,; \\ \dot{I}_1=\frac{shg}{\sqrt{Z_{C1}Z_{C2}}}\dot{U}_2+\left(\sqrt{\frac{z_{C2}}{Z_{C1}}}chg\right)\dot{I}_2\,. \end{array}\right. \qquad (2.6.25)$$

Системата (2.6.25) може да бъде представена и по следния начин:

$$\left|\begin{array}{l} \dot{U}_1=\sqrt{\frac{Z_{C1}}{Z_{C2}}}\left[\left(chg\right)\dot{U}_2+\left(Z_{C2}.shg\right)\dot{I}_2\right]\,; \\ \dot{I}_1=\sqrt{\frac{z_{C2}}{Z_{C1}}}\left[\frac{shg}{Z_{C2}}\dot{U}_2+\left(chg\right)\dot{I}_2\right]\,. \end{array}\right. \qquad (2.6.26)$$

Тук могат да могат да бъдат разгледани следните частни случаи:

1. Натоварването на четириполюсника е съгласувано, т.е.: $Z_{T2}=Z_{C2}$.

В този случай като се имат предвид равенствата: $Z_{C2}\dot{I}_2 = \dot{U}_2$ и $\dot{I}_2 = \dot{U}_2 / Z_{C2}$ система (2.6.26) добива вида:

$$\begin{cases} \dot{U}_1 = \sqrt{\dfrac{Z_{C1}}{Z_{C2}}}.e^{g}\,\dot{U}_2 ; \\ \dot{I}_1 = \sqrt{\dfrac{z_{C2}}{Z_{C1}}}.e^{g}\,\dot{I}_2 . \end{cases} \qquad (2.6.27)$$

Ако се умножат двете уравнения на последната система, се получава:

$$e^{2g} = \frac{\dot{U}_1\dot{I}_1}{\dot{U}_2\dot{I}_2} \text{ , т.е.: } g = \frac{1}{2}\ln\frac{\dot{U}_1\dot{I}_1}{\dot{U}_2\dot{I}_2} . \qquad (2.6.28)$$

Така се достига до формула (2.6.15). Тази формула важи само при съгласувано натоварване на четириполюсника. Ето защо тя не трябва да се използва за дефиниране на константата на предаване g. Това следва да се прави чрез формула (2.6.19)

2. Четириполюсникът е симетричен, т.е.: $A = D$.

В този случай като се има предвид равенството: $Z_{C1} = Z_{C2} = Z_C$, то системата (2.6.25) добива вида:

$$\begin{cases} \dot{U}_1 = \dot{U}_2\,\mathrm{ch}g + Z_C\,\dot{I}_2\,\mathrm{sh}g ; \\ \dot{I}_1 = \dfrac{\mathrm{sh}g}{Z_C}\dot{U}_2 + \dot{I}_2\,\mathrm{ch}g . \end{cases} \qquad (2.6.29)$$

Ако симетричният четириполюсник е натоварен съгласувано, т.е.: $Z_T = Z_C$, то може да се запише:

$$e^{g} = e^{\alpha}e^{j\beta} = \frac{\dot{U}_1}{\dot{U}_2} = \frac{\dot{I}_1}{\dot{I}_2}, \qquad (2.6.30)$$

откъдето за коефициентите α и β се установява:

$$\alpha = \ln\frac{U_1}{U_2} = \ln\frac{I_1}{I_2}; \qquad (2.6.31)$$

$$\beta = \psi_{u_1} - \psi_{u_2} = \psi_{i_1} - \psi_{i_2} . \qquad (2.6.32)$$

От израз (2.6.31) може да се види, че величината α показва как затихва (как се изменя) амплитудата на напрежението или тока при преминаване на сигнала през съгласувано натоварен симетричен четириполюсник. Ето защо тя е наречена коефициент на затихване.

От израз (2.6.32) може да се установи, че величината β показва как се изменя началната фаза на изходното напрежение или на изходния ток вследствие влиянието на четириполюсника. Ето защо тя носи названието коефициент на фазата.

От изрази (2.6.30) … (2.6.32) може да се установи, че константата на предаване g и съставките ѝ α и β са безразмерни величини. За величината α са въведени две единици – непер (Np) и бел (B), а величината β се измерва в rad.

При съгласувано натоварен симетричен четириполюсник коефициентът α в непери се определя въз основа на формула (2.6.31) така:

$$\alpha[\mathrm{Np}] = \ln\frac{U_1}{U_2} = \ln\frac{I_1}{I_2} = \frac{1}{2}\ln\frac{S_1}{S_2}, \qquad (2.6.31)$$

където $S_1 = U_1 I_1$ и $S_2 = U_2 I_2$ са пълните мощности на входа и съответно на изхода на четириполюсника.

При съгласувано натоварен симетричен четириполюсник за определяне на коефициента на затихване α в единиците бел се използуват зависимостите:

$$\alpha[\mathrm{B}] = \lg\frac{S_1}{S_2} = 2\lg\frac{U_1}{U_2} = 2\lg\frac{I_1}{I_2}. \qquad (2.6.34)$$

Връзките между единиците бел и непер са: $1\mathrm{B} \approx 1{,}151\mathrm{Np}$ и $1\mathrm{Np} \approx 0{,}869\mathrm{B}$.

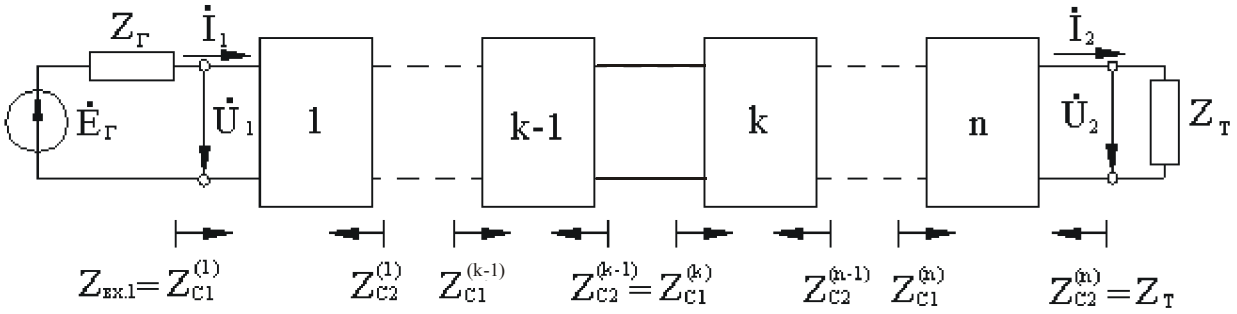
Освен единицата бел се използува десет пъти по-малката единица, наречена децибел [dB], която се определя от зависимостите:

$$\alpha[\mathrm{dB}] = 20\lg\frac{U_1}{U_2} = 20\lg\frac{I_1}{I_2} = 10\lg\frac{S_1}{S_2}. \qquad (2.6.35)$$

2.7. Верижни схеми

В редица случаи консуматорите не се включват директно към източниците на енергия, а се използуват междинни устройства, които най-често са четириполюсници. При това се използува един или няколко четириполюсника, свързани каскадно, т.е. входните клеми на даден четириполюсник се свързват към изходните клеми на предходния. Целта, която се поставя с използването на такива междинни устройства е различна. Например, при филтрите тази цел е увеличаване на коефициента на затихване, моделиране в лабораторни условия на предавателна линия и др.

Каскадното свързване на няколко четириполюсника се нарича верижна схема. В случай на еднакви четириполюсници верижната схема е еднородна. Отделните четириполюсници, от които е съставена верижната схема, се наричат звена.



Фиг. 2.7.1

На фиг.2.7.1 е показана верижна схема, съставена от n четириполюсника (звена). Цялата верижна схема може да бъде разгледана като четириполюсник, параметрите на който могат да бъдат определени, ако са известни параметрите на отделните звена. В случай, че звената са симетрични четириполюсници, то и цялата верижно съединение ще представлява симетричен четириполюсник.

Разглеждат се два вида верижни съединения:

1. Несъгласувано съединение.

В този случай се използуват A – параметрите на отделните звена и се определя $\underline{A}$ матрицата на цялото съединение, т.е.: $\underline{A} = \prod_{i=1}^{n} \underline{A_i}$.

2. Съгласувано съединение.

За да бъде верижното съединение съгласувано е необходимо да бъдат изпълнени следните три условия:

$$Z_{вх1}^{(1)} = Z_{C1}^{(1)} = Z_r \ ; \tag{2.7.1}$$

$$Z_{вх2}^{(к-1)} = Z_{C2}^{(к-1)} = Z_{вх1}^{(к)} = Z_{C1}^{(к)} \ ; \tag{2.7.2}$$

$$Z_{вх2}^{(n)} = Z_{C2}^{(n)} = Z_T \ . \tag{2.7.3}$$

Първото условие означава, че първото звено е съгласувано с източника на енергия, второто условие – съгласуване между отделните звена и третото условие – съгласуване на n-то звено с товара.

Ако горните условия са изпълнени, то верижното съединение е характеристично съгласувано и е целесъобразно да се използуват характеристични параметри. Верижното съединение ще има характеристични съпротивления Z_{C1} и Z_{C2}, за които се записва:

$$Z_{C1} = Z_{C1}^{(1)} \text{ и } Z_{C2} = Z_{C2}^{(n)} . \tag{2.7.4}$$

За определяне на константата на предаване g_0 на верижното съединение се изхожда от израза:

$$g_0 = \frac{1}{2}.\ln\frac{\dot{U}_1.\dot{I}_1}{\dot{U}_2.\dot{I}_2} . \tag{2.7.5}$$

Като се имат предвид равенствата:

$$\left|\begin{array}{l} \dot{U}_1 = \dot{U}_1^{(1)} \ ; \ \dot{U}_2 = \dot{U}_1^{(2)} \ ; \ ....; \ \dot{U}_2 = \dot{U}_1^{(к-1)} \ ; \ ....; \ \dot{U}_2 = \dot{U}_2^{(n)} ; \\ \dot{I}_1 = \dot{I}_1^{(1)} \ ; \ \dot{I}_2 = \dot{I}_1^{(2)} \ ; \ ....; \ \dot{I}_2 = \dot{I}_1^{(к)} \ ; \ ....; \ \dot{I}_2 = \dot{I}_2^{(n)} . \end{array}\right. \tag{2.7.6}$$

за константата g_0 може да се запише:

$$g_0 = \frac{1}{2}.\ln\left[\frac{\dot{U}_1.\dot{I}_1}{\dot{U}_2^{(1)}.\dot{I}_2^{(1)}}.\frac{\dot{U}_1^{(2)}.\dot{I}_1^{(2)}}{\dot{U}_2^{(2)}.\dot{I}_2^{(2)}}...\frac{\dot{U}_1^{(к)}.\dot{I}_1^{(к)}}{\dot{U}_2^{(к)}.\dot{I}_2^{(к)}}...\frac{\dot{U}_1^{(n)}.\dot{I}_1^{(n)}}{\dot{U}_2.\dot{I}_2}\right] =$$

$$= \frac{1}{2}.\ln\frac{\dot{U}_1.\dot{I}_1}{\dot{U}_2^{(1)}.\dot{I}_2^{(1)}} + \frac{1}{2}.\ln\frac{\dot{U}_1^{(2)}.\dot{I}_1^{(2)}}{\dot{U}_2^{(2)}.\dot{I}_2^{(2)}} + ... + \frac{1}{2}.\ln\frac{\dot{U}_1^{(к)}.\dot{I}_1^{(к)}}{\dot{U}_2^{(к)}.\dot{I}_2^{(к)}} + ... + \frac{1}{2}.\ln\frac{\dot{U}_1^{(n)}.\dot{I}_1^{(n)}}{\dot{U}_2.\dot{I}_2} = \tag{2.7.7}$$

$$= g_1 + g_2 + ... + g_к + ... + g_n = \sum_{i=1}^{n} g_i \ .$$

Ако отделните четириполюсници са еднакви, т.е.: $g_1 = g_2 = ... = g_к = ... = g_n = g$, то $g_0 = n.g$.

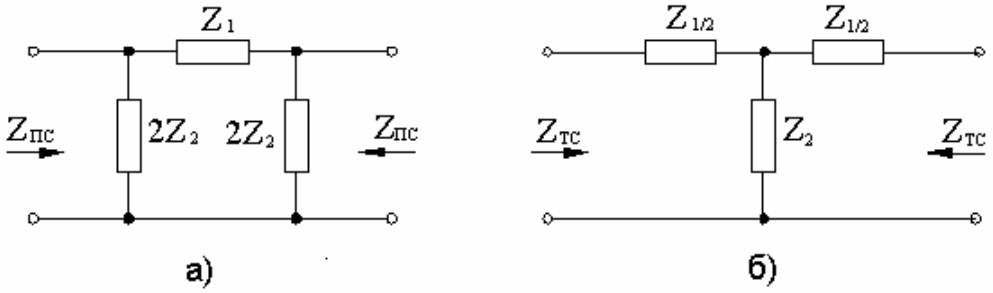
В случай, че четириполюсниците са симетрични, то за характеристичното съпротивление на верижното съпротивление се записва: $Z_C = Z_{вх.} = Z_Г = Z_T$. В този случай уравненията на съединението имат следния вид:

$$\left|\begin{array}{l} \dot{U}_1 = \dot{U}_2 \operatorname{ch} ng + \dot{I}_2 .Z_C \operatorname{sh} ng ; \\ \dot{I}_1 = \dot{U}_2 \frac{\operatorname{sh} ng}{Z_C} + \dot{I}_2 .Z_C \operatorname{ch} ng . \end{array}\right. \tag{2.7.8}$$

2.8. Характеристични параметри на еквивалентните схеми на пасивни четириполюсници

Еквивалентните схеми на пасивни четириполюсници са разгледани в 2.3. Във връзка с по-нататъшното изложение (анализа на електрически филтри) тук ще бъдат получени зависимости за характеристичните параметри на Т – и П – образните еквивалентни схеми на симетрични четириполюсници. Тези схеми са показани на фиг.2.8.1.

За характеристичните параметри на П – образната схема се записва:



Фиг. 2.8.1

$$Z_{ПС} = \sqrt{Z_{П0}.Z_{ПК}} = \sqrt{\frac{2.Z_2.(Z_1 + 2.Z_2)}{Z_1 + 4.Z_2}.\frac{2.Z_2.Z_1}{Z_1 + 2.Z_2}} = \sqrt{\frac{Z_1.Z_2}{1 + Z_1/4.Z_2}}; \qquad (2.8.1)$$

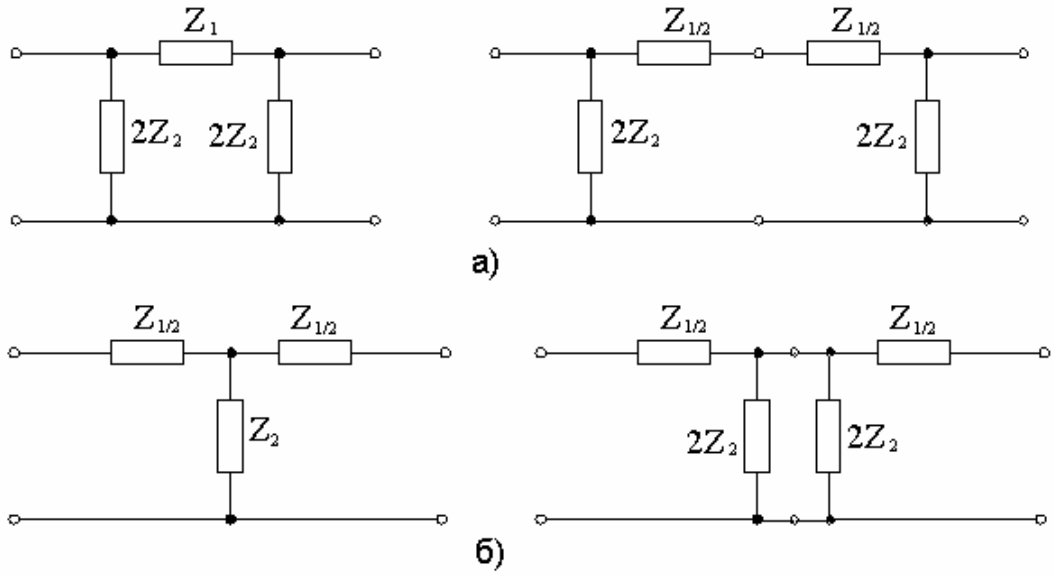
$$\text{thg} = \sqrt{\frac{Z_{ПК}}{Z_{П0}}} = \sqrt{\frac{2.Z_2.Z_1}{Z_1 + 2.Z_2}.\frac{Z_1 + 4.Z_2}{2.Z_2(Z_1 + 2.Z_2)}} = \frac{\sqrt{\left(\frac{Z_1}{2}\right)^2 + Z_1.Z_2}}{\frac{Z_1}{2} + Z_2}. \qquad (2.8.2)$$

Съответните изрази за характеристичните параметри на Т – образната схема са:

$$Z_{ТС} = \sqrt{Z_{Т0}.Z_{ТК}} = \sqrt{\left(\frac{Z_1}{2} + Z_2\right).\left(\frac{Z_1}{2} + \frac{\frac{Z_1}{2}.Z_2}{\frac{Z_1}{2} + Z_2}\right)} = \sqrt{Z_1.Z_2\left(1 + \frac{Z_1}{4.Z_2}\right)}; \qquad (2.8.3)$$

$$\text{thg} = \sqrt{\frac{Z_{ТК}}{Z_{Т0}}} = \sqrt{\frac{\frac{Z_1}{2} + \frac{\frac{Z_1}{2}.Z_2}{\frac{Z_1}{2} + Z_2}}{\frac{Z_1}{2} + Z_2}} = \frac{\sqrt{\left(\frac{Z_1}{2}\right)^2 + Z_1.Z_2}}{\frac{Z_1}{2} + Z_2}. \qquad (2.8.4)$$

На фиг.2.8.2 е показано, че П – и Т – образните схеми могат да бъдат



Фиг. 2.8.2

представени като каскадно съединение на две Г – образни схеми. Прието е П – и Т – образните схеми да се наричат звена, а Г – образните схеми – полузвена.

Ако П – или Т – образната схема е съгласувана, то и съответните Г – образни схеми ще бъдат съгласувани.

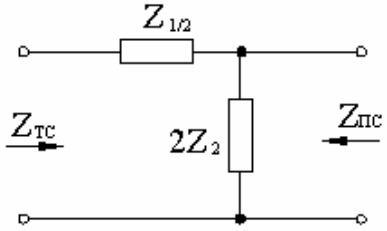
На фиг.2.8.3 е показана Г – образната схема. Тя е несиметрична и има П – вход и Т – вход.

За характеристичните параметри на Г – образната схема се записва:

$$Z_{ПС} = \sqrt{Z_{П0}.Z_{ПК}} = \sqrt{2.Z_2.\frac{2.Z_2.\frac{Z_1}{2}}{2.Z_2+\frac{Z_1}{2}}} = \sqrt{\frac{Z_1.Z_2}{1+\frac{Z_1}{4.Z_2}}}\ ; \qquad (2.8.5)$$

$$Z_{ТС} = \sqrt{Z_{Т0}.Z_{ТК}} = \sqrt{\left(\frac{Z_1}{2}+2.Z_2\right).\frac{Z_1}{2}} = \sqrt{Z_1.Z_2\left(1+\frac{Z_1}{4.Z_2}\right)}; \qquad (2.8.6)$$

$$\text{thg} = \sqrt{\frac{Z_{ПК}}{Z_{П0}}} = \sqrt{\frac{Z_{ТК}}{Z_{Т0}}} = \sqrt{\frac{\frac{Z_1}{2}}{\frac{Z_1}{2}+2.Z_2}} = \sqrt{\frac{\left(\frac{Z_1}{2}\right)^2}{Z_1.Z_2+\left(\frac{Z_1}{2}\right)^2}}\ . \qquad (2.8.7)$$



Фиг. 2.8.3

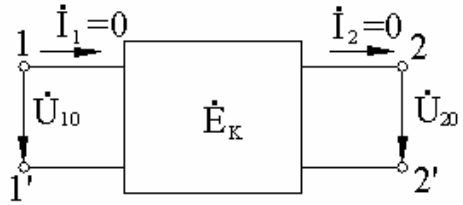
От изрази (2.8.5) и (2.8.6) може да се установи, че Г – образните схеми могат да бъдат използувани за съгласуване на П – и Т – образните схеми помежду им. Освен това Г – образните схеми могат да бъдат използувани за съгласуване на източника с товара.

2.9. Активни четириполюсници

Както бе разгледано в 2.1., активните четириполюсници съдържат във вътрешната си структура некомпенсирани енергийни източници. Това означава, че ако активният четириполюсник е изключен от външните вериги, то на изводите му ще се появи напрежение, което се дължи на наличието на енергийни източници в четириполюсника.

Приема се, че ЕДН на източниците не зависят от токовете, преминаващи през тях. Въз основа на принципа на наслагването активният четириполюсник може да бъде преобразуван в пасивен с два допълнителни източника на ЕДН по един във входната и изходната му верига.

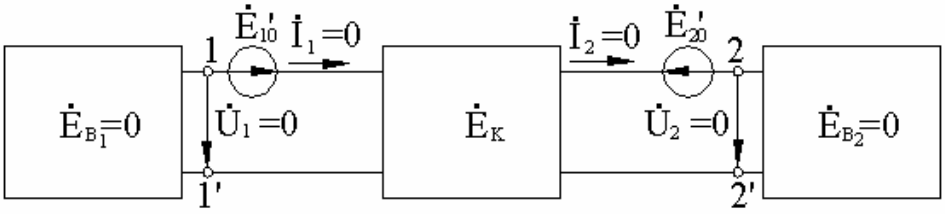
Приема се, че активният четириполюсник съдържа к източника на ЕДН $\dot{E}_к$. В случай, че четириполюсникът е изключен от външните вериги, то под действието на тези източници на първичните му клеми 1 – 1′ ще се установи напрежение $\dot{U}_{10}$, а на вторичните му клеми 2 – 2′ - напрежение $\dot{U}_{20}$. Тъй като външните вериги са изключени, то входният и изходният токове са равни на нула, т.е.: $\dot{I}_1 = 0$ и $\dot{I}_2 = 0$ (фиг.2.9.1).



Фиг. 2.9.1

Същият резултат по отношение на токовете

$\dot{I}_1$ и $\dot{I}_2$ може да бъде получен, ако се дадат накъсо източниците на ЕДН във външните вериги като тези вериги заедно със съпротивленията на източниците им се запазят и във входната и изходната вериги на четириполюсника се включат по



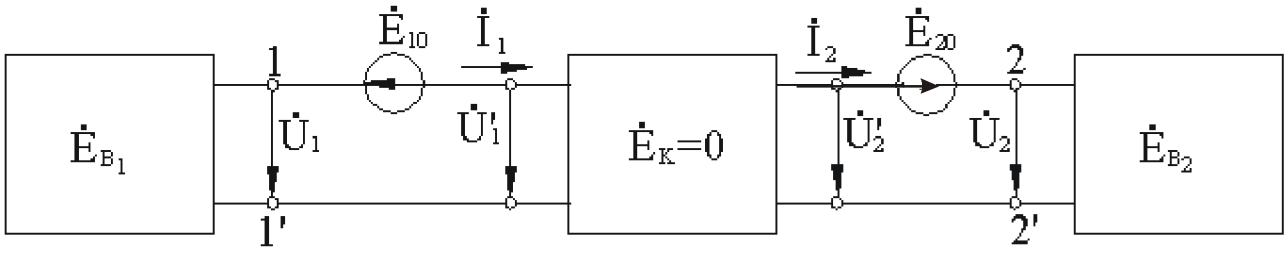
Фиг. 2.9.2

един допълнителен източник на ЕДН $\dot{E}'_{10}$ и $\dot{E}'_{20}$, като $\dot{E}'_{10}=-\dot{U}_{10}$ и $\dot{E}'_{20}=-\dot{U}_{20}$ (фиг.2.9.2).

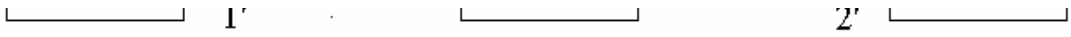
Приема се, че източниците на ЕДН $\dot{E}_K$ вътре в активния четириполюсник са дадени накъсо, като са запазени техните вътрешни съпротивления, а във външните вериги действуват източниците на ЕДН. Освен това във входната и изходната вериги на четириполюсника са включени по един допълнителен източник на ЕДН $\dot{E}_{10}$ и $\dot{E}_{20}$, като $\dot{E}_{10}=-\dot{E}'_{10}=\dot{U}_{10}$ и $\dot{E}_{20}=-\dot{E}'_{20}=\dot{U}_{20}$ (фиг. 2.9.3).

Ако се насложат режимите за веригите, изобразени на фиг.2.9.2 и фиг.2.9.3, ще се получи действителният режим, при който действуват всички източници на ЕДН както във външните вериги, така и вътре в четириполюсника (фиг.2.9.4).

Всъщност веригите от фиг.2.9.2 и фиг.2.9.3, могат да бъдат разглеждани като получени от веригата от фиг.2.9.5, към която е приложен принципът на наслагването. Тази верига се различава от действителната верига по това, че във входната и изходната вериги на активния четириполюсник са включени по два допълнителни източника на ЕДН, равни по големина и действуващи в



Фиг. 2.9.3



Фиг. 2.9.5

противоположни посоки, т.е.: $\dot{E}_{10}=-\dot{E}'_{10}$ и $\dot{E}_{20}=-\dot{E}'_{20}$. Включването на тези допълнителни източници на ЕДН не води до изменение на токовете и напреженията в действителната верига.

От веригата на фиг.2.9.3 може да се заключи, че активен четириполюсник, ЕДН на източниците на който не зависят от токовете, преминаващи през тях, може да бъде преобразуван в пасивен четириполюсник като във входната и изходната му вериги се включат допълнителни източници на ЕДН. Пасивният четириполюсник се получава от активния като се дадат накъсо източниците му на ЕДН и се запазят

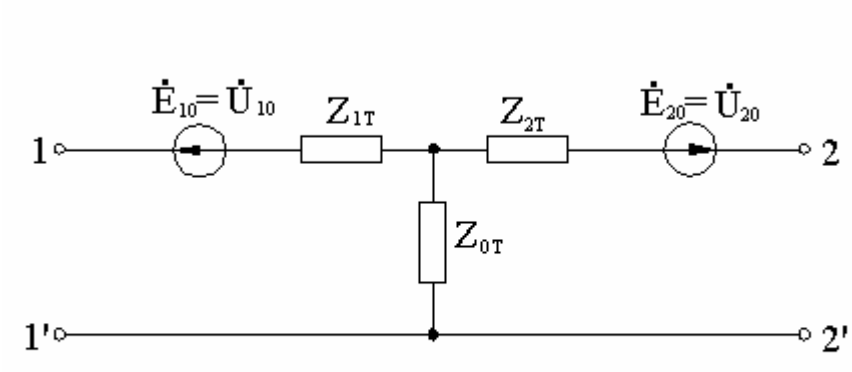
вътрешните им съпротивления, а източниците на ток се прекъснат и се запазят вътрешните им проводимости. Допълнителните източници имат ЕДН, равни на напреженията на празен ход на активния четириполюсник, т.е. на напреженията на едновременно отворените му първични и вторични клеми.

Приема се, че Z – параметрите на пасивния четириполюсник от фиг.2.9.3 са известни. Тогава системата му уравнения ще бъде от вида:

$$\begin{vmatrix} \dot{U}'_1 = Z_{11}.\dot{I}_1 + Z_{12}.\dot{I}_2 = \dot{U}_1 - \dot{E}_{10}\,; \\ \dot{U}'_2 = Z_{21}.\dot{I}_1 + Z_{22}.\dot{I}_2 = \dot{U}_2 - \dot{E}_{20}\,. \end{vmatrix} \qquad (2.9.1)$$

От тази система за напреженията $\dot{U}_1$ и $\dot{U}_2$ (вж. фиг.2.9.3) се получава:

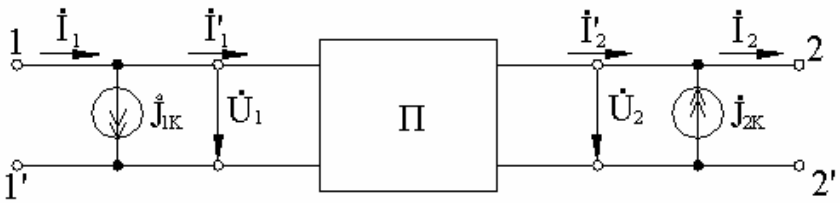
$$\begin{vmatrix} \dot{U}_1 = Z_{11}.\dot{I}_1 + Z_{12}.\dot{I}_2 + \dot{E}_{10}\,; \\ \dot{U}_2 = Z_{21}.\dot{I}_1 + Z_{22}.\dot{I}_2 + \dot{E}_{20}\,. \end{vmatrix} \qquad (2.9.2)$$



Фиг. 2.9.6

Пасивният четириполюсник от фиг.2.9.3 е удобно да бъде представен чрез T – образна еквивалентна схема. Така се достига до еквивалентната схема на активния четириполюсник, която е показана на фиг.2.9.6.

Може да се докаже, че активният четириполюсник може да бъде заменен с пасивен четириполюсник и два източника на ток $\dot{J}_{1K}$ и $\dot{J}_{2K}$ (фиг.2.9.7). Токовете на тези източници са равни на токовете $\dot{I}_{1K}$ и $\dot{I}_{2K}$ на първичните и вторичните клеми при едновременното им късо съединение, т.е.: $\dot{J}_{1K} = \dot{I}_{1K}$ и $\dot{J}_{2K} = \dot{I}_{2K}$.



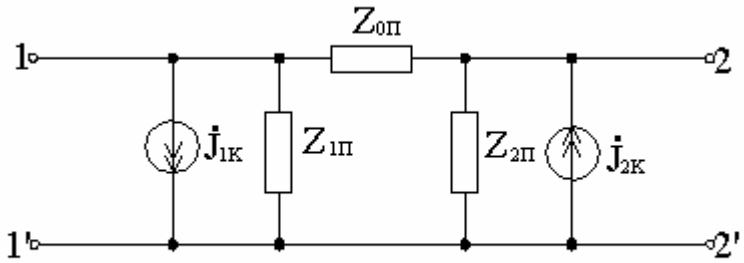
Фиг. 2.9.7

Приема се, че Y – параметрите на пасивния четириполюсник от фиг.2.9.7 са известни. Тогава системата му уравнения ще бъде от вида:

$$\begin{vmatrix} \dot{I}'_1 = Y_{11}.\dot{U}_1 + Y_{12}.\dot{U}_2 = \dot{I}_1 - \dot{J}_{1K}\,; \\ \dot{I}'_2 = Y_{21}.\dot{U}_1 + Y_{22}.\dot{U}_2 = \dot{I}_2 - \dot{J}_{2K}\,. \end{vmatrix} \qquad (2.9.3)$$

От тази система за токовете $\dot{I}_1$ и $\dot{I}_2$ на активния четириполюсник се получава:

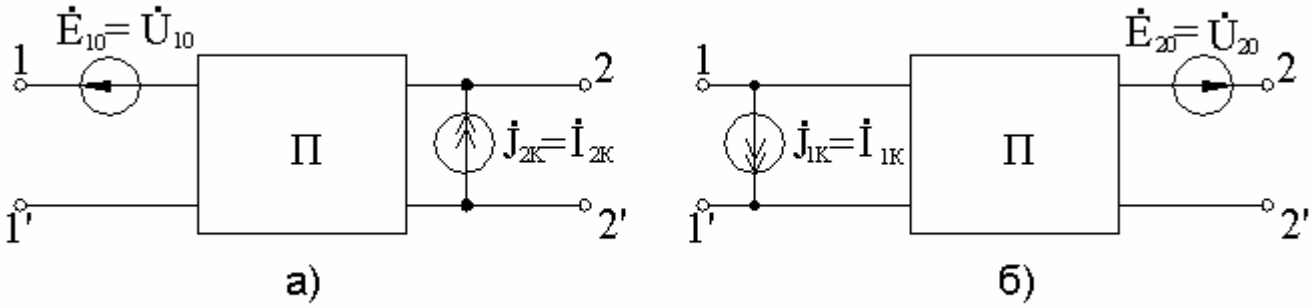
$$\begin{vmatrix} \dot{I}_1 = Y_{11}.\dot{U}_1 + Y_{12}.\dot{U}_2 + \dot{J}_{1K}\ ; \\ \dot{I}_2 = Y_{21}.\dot{U}_1 + Y_{22}.\dot{U}_2 + \dot{J}_{2K}\ . \end{vmatrix} \qquad (2.9.4)$$



Фиг. 2.9.8

Пасивният четириполюсник от фиг.2.9.7 е удобно да бъде представен чрез Π – образна еквивалентна схема. Така се достига до еквивалентната схема на активния четириполюсник, която е показана на фиг.2.9.8.

Съществуват еквивалентни схеми на активен четириполюсник, които се получават въз основа на хибридните системи уравнения, т.е. чрез H – и G – параметри. При използуване на системата уравнения с H – параметри активният четириполюсник се заменя с пасивен и два разнородни източника на енергия $\dot{E}_{10}$ и $\dot{J}_{2K}$, а при използуване на системата уравнения с G – параметри той се заменя с пасивен четириполюсник и два разнородни източника на енергия $\dot{J}_{1K}$ и $\dot{E}_{20}$. Тези схеми са показани на фиг.2.9.9.



Фиг. 2.9.9

III. ЕЛЕКТРИЧЕСКИ ФИЛТРИ

Встъпителни бележки

В раздела се дават основни понятия и класификации на електрическите филтри, а също така и общите теоретични положения за реактивните електрически филтри. Разглеждат се реактивните нискочестотни филтри тип к и тип m. В раздела е отделено място и за реактивните високочестотни, лентови и заграждащи филтри тип к.

3.1. Електрически филтри – основни понятия и класификации. Реактивни електрически филтри – общи теоретични положения

А) Електрически филтри – основни понятия и класификации

Електрическите филтри са такива устройства, които имат ярко изразена избирателност за отделни честоти или лента от честоти. Филтърът трябва да пропуска сигнали без изкривяване, т.е. без промяна на амплитудата им само в определен честотен диапазон, наречен лента на пропускане, а сигналите, чиито честоти са извън този диапазон, не трябва да бъдат пропускани (лента на задържане).

Електрическите филтри намират широко приложение в радиоелектрониката, съобщителната техника, телемеханиката и др. Например, в радиоприемника с помощта на филтър се отделя сигналът на даден радиопредавател, а на останалите радиопредаватели не се пропускат.

Най-разпространени са следните две класификации на електрическите филтри:

I . Класификация

Тази класификация се прави в зависимост от лентата на пропускане и според нея електрическите филтри се делят на следните типове:

1. Нискочестотни - лента на пропускане от $\omega = 0$ до $\omega = \omega_c$;

2. Високочестотни – лента на пропускане от $\omega = \omega_c$ до $\omega = \infty$;

3. Лентови – лента на пропускане от $\omega = \omega_{c1}$ до $\omega = \omega_{c2}$;

4. Заграждащи – лента на пропускане от $\omega = 0$ до $\omega = \omega_{c1}$ и от $\omega = \omega_{c2}$ до $\omega = \infty$, т.е. този тип филтри не пропускат сигналите в честотния диапазон от $\omega = \omega_{c1}$ до $\omega = \omega_{c2}$.

II. Класификация

Тази класификация на електрическите филтри се прави в зависимост от вида на елементите, от които са съставени, и според нея те се делят на следните типове:

1. Реактивни – съставени са от бобини и кондензатори , т.е. LC филтри;

2. Безиндукционни – съставени са от резистори и кондензатори , т.е. RC филтри;

3. Пиезоелектрически – при тях се използуват кварцови пластини .

В по-нататъшното изложение ще бъдат разглеждани само реактивни филтри.

Б) Реактивни електрически филтри – общи теоретични положения

Реактивните електрически филтри се реализират не от един, а от няколко четириполюсника, които са свързани в характеристично съгласувана верижна схема. Така се получава желаната честотна предавателна функция на филтъра. За верижната схема коефициентът на затихване α се представя като сума от коефициентите на затихване на отделните й звена. Същевременно при

характеристично съгласуване на верижната схема (между звената ѝ и със съпротивленията на консуматора и източника на енергия) се получава най-прост израз за константата ѝ на предаване g.

За лентата на пропускане филтърът трябва да осигурява преминаване на сигналите при минимално изкривяване. За целта в идеалния случай коефициентът на затихване α трябва да е равен на нула, т.е.: $\alpha = 0$.

За определяне лентата на пропускане на реактивните филтри и по-точно на граничните им честоти могат да бъдат използувани два метода, които ще бъдат разгледани последователно в по-нататъшното изложение.

1. Метод на честотните характеристики на съпротивленията на празен ход и късо съединение Z_{10} и Z_{1K}

За обосноваване на този метод се изхожда от израза за константата на предаване g. В случай на симетричен четириполюсник и характеристично съгласуване за константата g се записва :

$$g = \alpha + j\beta = \ln\frac{\dot{U}_{вх}}{\dot{U}_{изх}} = \ln\frac{U_{вх}}{U_{изх}} + j(\psi_{u_{вх}} - \psi_{u_{изх}}). \qquad (3.1.1)$$

Ако коефициентът на затихване α е равен на нула,т.е.: $\alpha = 0$, то $U_{изх} = U_{вх}$ и за thg се получава:

$$thg = th(\alpha + j\beta) = thj\beta = jtg\beta. \qquad (3.1.2)$$

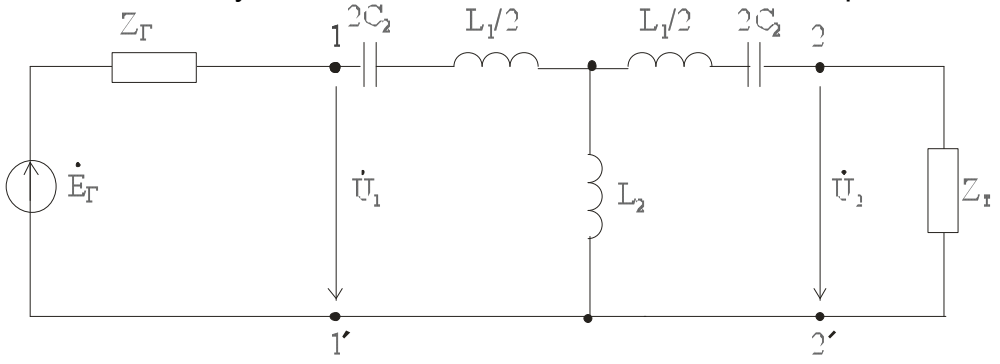
От друга страна thg се определя чрез съпротивленията на празен ход и късо съединение Z_{10} и Z_{1K} по формулата (вж. 2.6):

$$thg = \sqrt{\frac{Z_{1K}}{Z_{10}}} = th(\alpha + j\beta) = jtg\beta. \qquad (3.1.3)$$

От последния израз може да се установи, че за лентата на пропускане на реактивния филтър отношението от съпротивленията му Z_{10} и Z_{1K} трябва да бъде отрицателна величина. Като се има предвид, че съпротивленията Z_{10} и Z_{1K} са чисто реактивни, то горното означава, че за лентата на пропускане те трябва да имат различен характер. И така, ако честотните характеристики на съпротивленията Z_{10} и Z_{1K} са известни, то може да се определи лентата на пропускане и граничните честоти на филтъра.

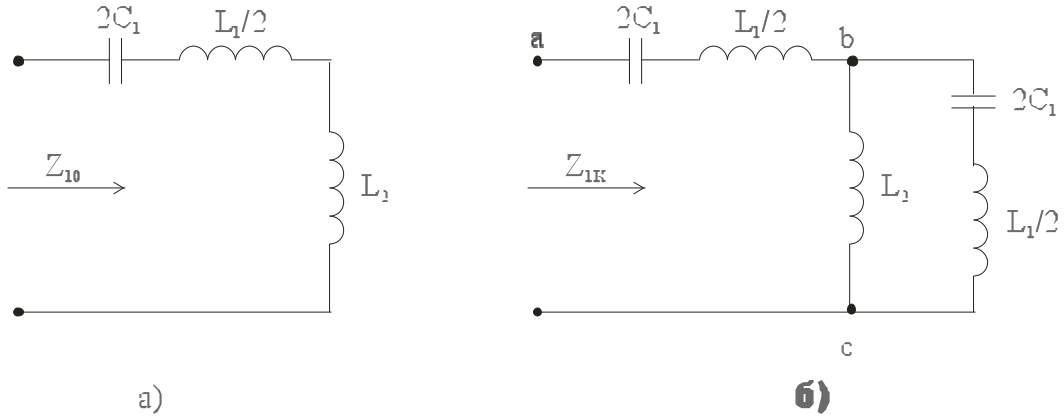
Пример:

За илюстрация на изложения по-горе метод се разглежда реактивният филтър, чиято електрическа схема е показана на фиг.3.1.1. За да бъде филтърът характеристично съгласуван е необходимо да бъдат изпълнени равенствата: $Z_{C1} = Z_Г$



Фиг.3.1.1

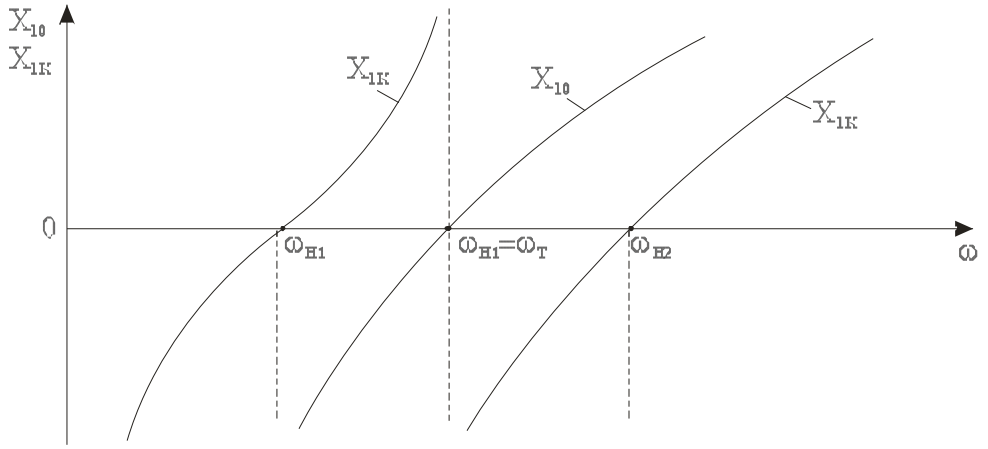
и $Z_{C2} = Z_T$. От друга страна тъй като схемата е на симетричен филтър, то е в сила и равенството: $Z_{C1} = Z_{C2} = Z_C$.



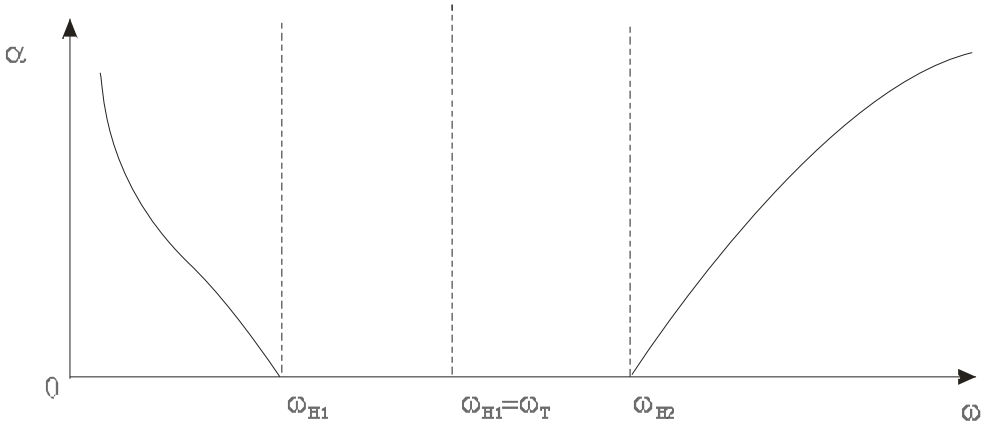
Фиг.3.1.2

Схемите за определяне на съпротивленията на празен ход и късо съединение $Z_{10} = jX_{10}$ и $Z_{1K} = jX_{1K}$ са представени на фиг.3.1.2, а съответните честотни характеристики на съпротивленията X_{10} и X_{1K} – на фиг.3.1.3. Тези честотни характеристики се получават като се изхожда от изразите за съпротивленията Z_{10} и Z_{1K}.

За веригата от фиг.3.1.2а може да се установи, че е възможен напрежителен резонанс. За определяне на резонансната й честота $\omega_н$ се записва израз за съпротивлението й:



Фиг3.1.3



Фиг3.1.4

$Z_{10} = j(\omega L_1/2 - 1/\omega 2C_1 + \omega L_2) = jX_{10}.$

От условието за напрежителен резонанс $X_{10} = 0$ за честотата $\omega_н$ се получава:

$$\omega_н = 1/\sqrt{(L_{1/2} + L_2)2C_1}\ .$$

За веригата от фиг.3.1.2б може да се установи, че са възможни два напрежителни резонанса по отношение на входа й и един токов резонанс по отношение на двата паралелни клона. И действително, при ниски честоти капацитивните съпротивления значително превишават индуктивните. В частност резултантното съпротивление на последователно съединените елементи $2C_1$ и $L_1/2$ има капацитивен характер и е значително. Съответно капацитивната им проводимост е малка. Последното означава, че резултантната проводимост на паралелните клонове L_2 и $L_1/2$, $2C_1$ има индуктивен характер и е значителна. Съответно индуктивното им съпротивление е малко и като капацитивното съпротивление на кондензатора $2C_1$ на клона ab преобладава и резултантното съпротивление на веригата има капацитивен характер.

При увеличаване на честотата, капацитивните съпротивления намаляват, а индуктивните нарастват, като при честота $\omega = \omega_{н1}$ капацитивното съпротивление на кондензатора $2C_1$ на клона ab се изравнява с индуктивното съпротивление на останалата част на веригата и при тази честота възниква напрежителен резонанс по отношение на входа й.

При по-нататъшното увеличаване на честотата, индуктивната проводимост на клона L_2 намалява, а капацитивната на паралелния му клон $L_1/2$, $2C_1$ нараства. При честота $\omega = \omega_T$ двете проводимости се изравняват и във веригата възниква токов резонанс по отношение на двата й паралелни клона.

При честоти по-големи от ω_T, резултантната проводимост на двата паралелни клона има капацитивен характер, като при честоти близки до ω_T тя е малка, съответно капацитивното им съпротивление е значително и резултатното съпротивление на веригата има капацитивен характер.

При по-нататъшно увеличаване на честотата, индуктивното съпротивление на клона ab нараства, а капацитивното съпротивление на останалата част на веригата намалява. При честота $\omega = \omega_{H2}$ двете съпротивления се изравняват. При тази честота във веригата възниква напрежителен резонанс по отношение на входа й. При честоти по-големи от ω_{H2}, резултантното й съпротивление има индуктивен характер.

За определяне на честотите ω_{H1} и ω_{H2} на напрежителен резонанс се записва израз за съпротивлението:

$$Z_{1K} = j(\omega L_{1/2} - 1/\omega 2C_1) + \frac{j(\omega L_1/2 - 1/\omega 2C_1)j\omega L_2}{j(\omega L_1/2 + 1/\omega 2C_1 + \omega L_2)} =$$

$$= j\frac{\omega^2(L_1L_2 + L_1^2/4) - (L_1/2 + L_2)/C_1 + 1/\omega^2 4C_1^2}{\omega(L_1/2 + L_2) - 1/\omega 2C_1} = jX_{1K}.$$

От условието за напрежителен резонанс $X_{1K} = 0$ се получава:

$$\omega^2(L_1L_2 + L_1^2/4) - (L_1/2 + L_2)/C_1 + 1/\omega^2 4C_1^2 = 0.$$

Оттук за честотите ω_{H1} и ω_{H2} на напрежителния резонанс се достига до биквадратно уравнение:

$$\omega^4(L_1L_2 + L_1^2/4) - \omega^2(L_1/2 + L_2)/C_1 + 1/4C_1^2 = 0.$$

Полага се $\omega^2 = p$ и се получава квадратно уравнение:

$p^2 - p(L_1/2 + L_2)/C_1(L_1L_2 + L_1^2/4) + 1/4C_1^2(L_1L_2 + L_1^2/4) = 0.$

След намиране на корените му p_1 и p_2, за честотите ω_{H1} и ω_{H2} се получава: $\omega_{H1} = \sqrt{p_1}$ и $\omega_{H2} = \sqrt{p_2}$.

За определяне на честотата на токовия резонанс се изхожда от израза за комплексната проводимост Y_{bc} на двата паралелни клона: $Y_{bc} = \frac{1}{j\omega L_2} + \frac{1}{\left(\frac{1}{j\omega 2C_1} + \frac{j\omega L_1}{2}\right)}$.

От условието за токов резонанс $B_{bc} = 0$ се записва: $\omega L_1/2 + \omega L2 - 1/\omega 2C_1 = 0$, откъдето за честотата ω_T се получава:

$\omega_T = 1/\sqrt{(L_1/2 + L_2)2C_1}$.

Ако последният израз се сравни с израза за резонансната честота ω_P на веригата от фиг.3.1.2 може да се констатира, че двете честоти ω_T и ω_H са равни, което е отразено на фиг.3.1.3. От кривите на тази фигура може да се види, че съпротивленията X_{10} и X_{1K} за честотния диапазон $\omega = \omega_{H1} \ldots \omega_{H2}$ имат различен характер, което означава, че този честотен диапазон определя лентата на пропускане на филтъра, т.е. типът му е лентов. За илюстрация на фиг.3.1.4 е показана честотната характеристика на коефициент на затихване α.

2. Метод на честотните характеристики на съпротивленията Z_1 и $4Z_2$

За обосноваване на този метод се изхожда от формулата за константата на предаване g, изразяваща я като chg, т.е.: $chg = \sqrt{AD}$. За симетричен четириполюсник $A = D$ и $chg = A$. За Π - и T - образните еквивалентни схеми на симетрични пасивни четириполюсници се записва (вж. 2.8):

$Z_{1\Pi} = Z_{2\Pi} = 2Z_2$ и $Z_{0\Pi} = Z_1$; (3.1.4)

$Z_{1T} = Z_{2T} = Z_1/2$ и $Z_{0T} = Z_2$.

Като се имат предвид горните равенства и формулите за параметъра A на Π - и T - образните еквивалентни схеми на пасивни четириполюсници (вж. 2.3) се установява, че:

$chg = A = 1 + Z_1/2\,Z_2$. (3.1.5)

Тъй като съпротивленията Z_1 и Z_2 са чисто реактивни, т.е.: $Z_1 = \pm jX_1$ и $Z_2 = \pm jX_2$, се записва:

$chg = ch(\alpha + j\beta) = ch\alpha\cos\beta + jsh\alpha\sin\beta = 1 + Z_1/2Z_2 = 1 \pm X_1/2X_2$. (3.1.6)

От последния израз може да се установи, че за реактивните филтри величината chg е реално число. Оттук следват равенствата:

$ch\alpha\cos\beta = 1 \pm X_1/2X_2$; (3.1.7)

$sh\alpha\sin\beta = 0$. (3.1.8)

Тези равенства се анализират за два случая:

I случай – лента на пропускане

В този случай коефициентът на затихване α е равен на нула, т.е.: $\alpha = 0$ и съответно $sh\alpha = 0$ и $ch\alpha = 1$. Тогава от равенство (3.1.7) се записва:

$\cos\beta = 1 + X_1/2X_2$ или $\cos\beta = 1 - X_1/2X_2$. (3.1.9)

Като се има предвид, че стойностите на функцията $\cos\beta$ са в интервала $[-1 \dots 1]$, то е вярно второто равенство, т.е.: $\cos\beta = 1 - X_1/2X_2$. Оттук следва неравенството:

$1 \geq 1 - X_1/2X_2 \geq -1,$ (3.1.10)

което може да се запише във вида:

$0 \geq -X_1/2X_2 \geq -2,$ (3.1.11)

и още така:

$0 \geq -X_1/4X_2 \geq -1.$ (3.1.12)

Като се има предвид, че комплексните съпротивления Z_1 и Z_2 са чисто реактивни, т.е.: $Z_1 = \pm jX_1$ и $Z_2 = \pm jX_2$, то неравенството (3.1.12) може да бъде записано по отношение на тези две съпротивления във вида:

$0 \geq -Z_1/4Z_2 \geq -1.$ (3.1.13)

От неравенства (3.1.12) и (3.1.13) може да се заключи, че за лентите на пропускане съпротивленията Z_1 и Z_2 имат различен характер и че съпротивлението Z_1 по модул не превишава $4Z_2$, т.е.: $|Z_1| \leq |4Z_2|$ или другояче записано $X_1 < 4X_2$.

Граничните честоти се определят въз основа на неравенства (3.1.12) и (3.1.13) от следните уравнения:

$-X_1/4X_2 = 0$ или $Z_1/4Z_2 = 0;$ (3.1.14)

$-X_1/4X_2 = 1$, т.е.: $X_1 = -4X_2$ или $Z_1 = -4Z_2$. (3.1.15)

Условие (3.1.14) се изпълнява ако $X_1 = 0$ или $X_2 = \infty$, т.е.: $Z_1 = 0$ или $Z_2 = \pm j\infty$.

За лентата на пропускане коефициентът на фазата β се изменя, т.е.: $\beta = var$ и може да бъде определен въз основа на неравенство (3.1.10) от следния израз:

$\cos\beta = 1 - X_1/2X_2.$ (3.1.16)

Като се има предвид формулата: $\cos\beta = 1 - 2\sin^2(\beta/2)$, може да се запише:

$$\sin(\beta/2) = \pm\sqrt{\frac{X_1}{4X_2}} = \pm\sqrt{\left|\frac{Z_1}{4Z_2}\right|}, \quad (3.1.17)$$

откъдето за коефициента β се получава:

$$\beta = \pm 2\arcsin\sqrt{\frac{X_1}{4X_2}} = \pm 2\arcsin\sqrt{\left|\frac{Z_1}{4Z_2}\right|}. \quad (3.1.18)$$

II случай – лента на задържане

В този случай коефициентът на затихване α е различен от нула, т.е.: $\alpha \neq 0$ и съответно $sh\alpha \neq 0$. Оттук следва, че за да бъде изпълнено равенство (3.1.8), е необходимо $\sin\beta = 0$. Това условие се изпълнява ако:

А) коефициентът на фазата $\beta = 0$, т.е.: $\cos\beta = 1$, което е в сила при еднакъв характер на съпротивленията Z_1 и Z_2. Като се има предвид това, от равенство (3.1.7) може да се запише:

$ch\alpha = 1 + X_1/2X_2,$ (3.1.19)

откъдето въз основа на формулата $ch\alpha - 1 = 2sh^2(\alpha/2)$ се получава:

$$sh(\alpha/2) = \sqrt{\frac{X_1}{4X_2}} = \sqrt{\left|\frac{Z_1}{4Z_2}\right|}. \qquad (3.1.20)$$

От последната формула за коефициента на затихване α може да се запише:

$$\alpha. = 2arsh\sqrt{\frac{X_1}{4X_2}} = 2arsh\sqrt{\left|\frac{Z_1}{4Z_2}\right|}. \qquad (3.1.21)$$

б) коефициентът на фазата $\beta = \pm\pi$, т.е.: $\cos\beta = -1$, което е в сила при различен характер на съпротивленията Z_1 и Z_2. За разлика от лентата на пропускане тук е в сила неравенството: $|Z_1| \geq |4Z_2|$.

Тук следва да се отбележи още, че условието $\beta = \pm\pi$, т.е.: $\cos\beta = -1$ не подхожда при еднакъв характер на съпротивленията Z_1 и Z_2, тъй като ch от реални аргументи е винаги положителна величина и по модул по-голяма от единица, т.е.: $ch\alpha > 0$.

Въз основа на разгледаното по-горе, от равенство (3.1.7) може да се запише:

$$-ch\alpha = 1 - X_1/2X_2, \qquad (3.1.22)$$

Като се има предвид формулата: $ch\alpha + 1 = 2ch^2(\alpha/2)$ се получава:

$$ch(\alpha/2) = \sqrt{\frac{X_1}{4X_2}} = \sqrt{\left|\frac{Z_1}{4Z_2}\right|}, \qquad (3.1.23)$$

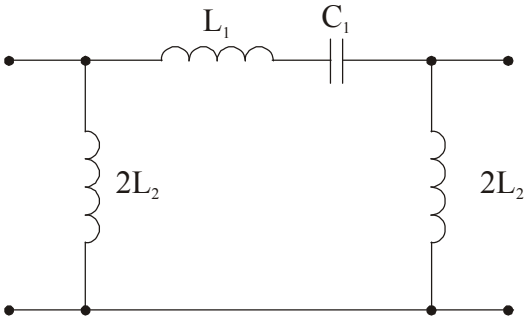
откъдето за коефициента на затихване може да се запише:

$$\alpha. = 2arch\sqrt{\frac{X_1}{4X_2}} = 2arch\sqrt{\left|\frac{Z_1}{4Z_2}\right|}. \qquad (3.1.24)$$

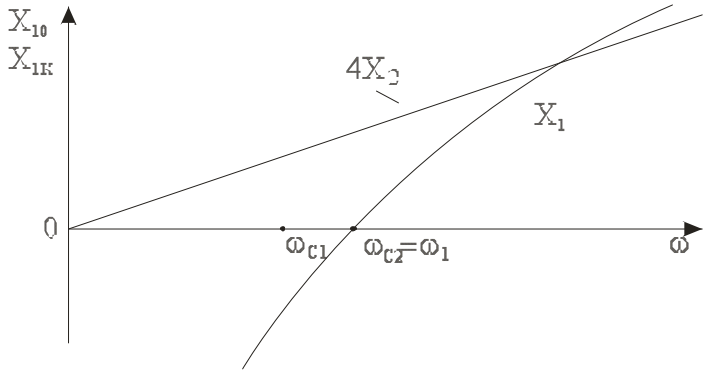
За илюстрация на изложения по-горе метод се разглеждат два примера:

Пример 1

За реактивния филтър, чиято електрическа схема е показана на фиг.3.1.5 се



Фиг.3.1.5



ФигЗ.1.6

търсят граничните честоти, ако са известни параметрите на елементите му. За целта се записват изразите за съпротивленията Z_1 и $4Z_2$:

$$Z_1 = j\omega L_2 + 1/j\omega C_1 = L_1(\omega_1^2 - \omega_2)/j\omega \text{ и } 4Z_2 = 4j\omega L_2,$$

където $\omega_1 = 1/\sqrt{L_1C_1}$.

За определяне на граничните честоти се изхожда от равенство (3.1.14), т.е.: $0 \geq -Z_1/4Z_2 \geq -1$. От условието: $Z_1 = -4Z_2$ се записва:

$$L_1(\omega_1^2 - \omega_2)j\omega = -4j\omega L_2,$$

откъдето за граничната честота ω_{C1} се получава:

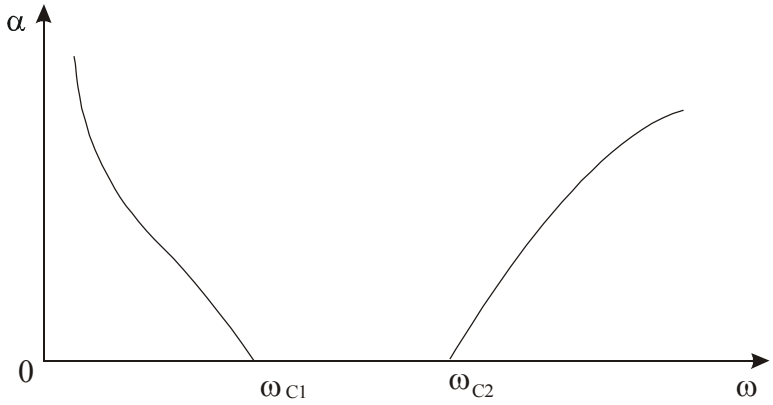
$$\omega_{C1} = 1/\sqrt{C_1(L_1 + 4L_2)}\ .$$

От условието: $Z_1/4Z_2 = 0$ се записва: $Z_1 = 0$, откъдето за граничната честота ω_{C2} се намира: $\omega_{C2} = \omega_1$.

Видът на честотните характеристики на съпротивленията X_1 и $4X_2$ е показан на фиг.3.1.6. От кривите на фигурата може да се види, че за честотния диапазон $\omega = \omega_{C1} \ldots \omega_{C2}$ е изпълнено неравенство (3.1.14). Този диапазон определя лентата на пропускане на филтъра, като типът му е лентов.

Коефициентът на затихване α се определя по формулите:

$$\left.\begin{matrix} \mathrm{ch}\dfrac{\alpha}{2} \\ \mathrm{sh}\dfrac{\alpha}{2} \end{matrix}\right\} = \sqrt{\left|\frac{Z_1}{4Z_2}\right|} = \sqrt{\left|\frac{L_1}{4L_2}\left[1-\left(\frac{\omega}{\omega_2}\right)^2\right]\right|}\ .$$

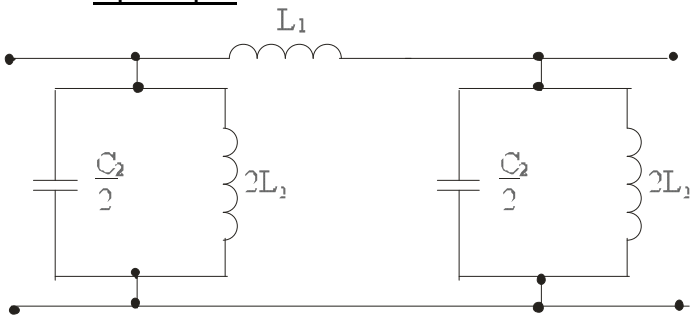


Фиг3.1.7

Пресмятането на коефициента α се извършва чрез ch за диапазона $\omega = 0 \ldots \omega_{C2}$ (за този диапазон съпротивленията X_1 и X_2 имат различен характер), а чрез sh – за диапазона $\omega = \omega_{C2} \ldots \infty$ (за този диапазон съпротивленията X_1 и X_2 имат еднакъв характер).

Видът на честотната характеристика на коефициента α е показан на фиг.3.1.7.

Пример 2



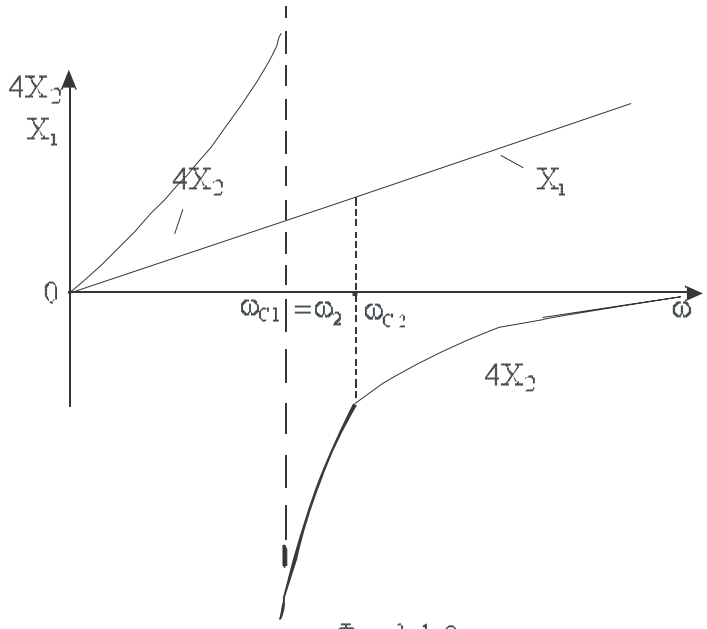
Фиг.3.1.8

За реактивния филтър, чиято електрическа схема е показана на фиг.3.1.8 се търсят граничните честоти, ако са известни параметрите на елементите му. За целта се записват изразите за съпротивленията Z_1 и $4Z_2$. Изразът за съпротивлението Z_1 е $Z_1 = j\omega L_1$. За получаване на израза за съпротивлението $4Z_2$ се записва:

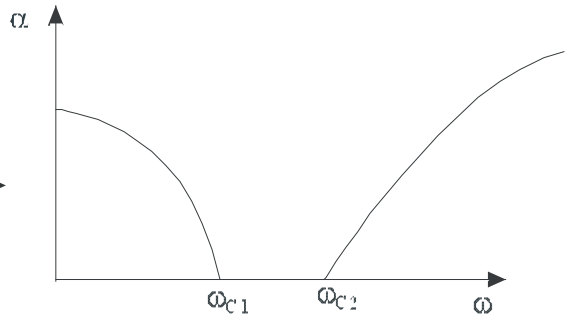
$$2Z_2 = \frac{2j\omega L_2/(j\omega C_2/2)}{2j\omega L_2 + 1/(j\omega C_2/2)} = \frac{2j\omega}{C_2(\omega_2^2 - \omega^2)},$$

където $\omega_2 = 1/\sqrt{L_2C_2}$.

Оттук се получава: $4Z_2 = \dfrac{4j\omega}{C_2(\omega_2^2-\omega^2)}$.



Фиг3.1.9



Фиг.3.1.10

За определяне на граничните условия се изхожда от неравенство (3.1.14), т.е.:

$-1 \le Z_1/4Z_2 \le 0$.

От условието: $Z_1/4Z_2 = 0$ се записва: $Z_2 = \infty$, откъдето за граничната честота ω_{C1} се намира: $\omega_{C1} = \omega_2$.

От условието: $Z_1 = -4Z_2$ се записва: $j\omega L_1 = 4j\omega/C_2(\omega_2^2 - \omega^2)$, откъдето за граничната честота се получава: $\omega_{C2} = \sqrt{(L_1 + 4L_2)/L_1L_2C_2}$.

Видът на честотните характеристики на съпротивленията X_1 и $4X_2$ е показан на фиг.3.1.9. От кривите на фигурата може да се види, че за честотния диапазон $\omega = \omega_{C1} \ldots \omega_{C2}$ е изпълнено неравенство (3.1.14). Този диапазон определя лентата на пропускане на филтъра, като типът му е лентов.

Коефициентът на затихване α се определя по формулите:

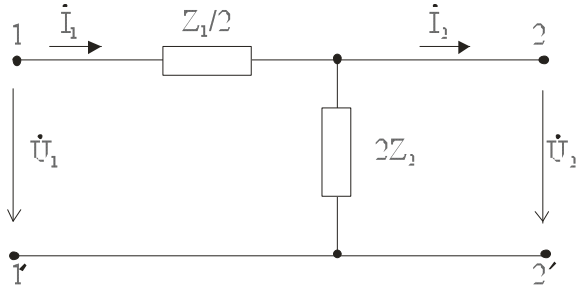
$$\left.\begin{matrix} \mathrm{ch}\dfrac{\alpha}{2} \\ \mathrm{sh}\dfrac{\alpha}{2} \end{matrix}\right\} = \sqrt{\left|\frac{Z_1}{4Z_2}\right|} = \sqrt{\left|\frac{L_1}{4L_2}\left[1-\left(\frac{\omega}{\omega_2}\right)^2\right]\right|}.$$

Пресмятането на коефициента α се извършва чрез $\mathrm{ch}\alpha$ за диапазона $\omega = \omega_{C2} \ldots \infty$ (за този диапазон съпротивленията X_1 и X_2 имат различен характер), а чрез $\mathrm{ch}\alpha$ за диапазона $\omega = 0 \ldots \omega_{C1}$ (за този диапазон съпротивленията X_1 и X_2 имат еднакъв характер). Видът на честотната характеристика на коефициента α е показан на фиг.3.1.10.

3.2. Нискочестотни реактивни електрически филтри тип к

Както бе разгледано в 2.8, във формулите за характеристичните параметри на еквивалентните схеми на симетричните четириполюсници участвува произведението Z_1Z_2. Ако се приеме, че това произведение е постоянна реална

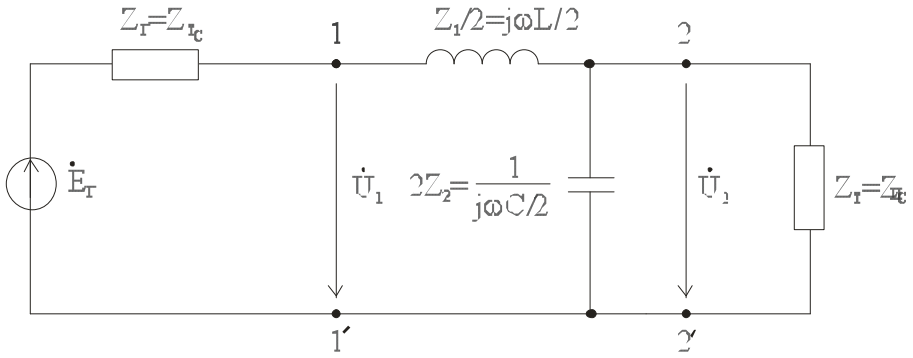
величина, независеща от честотата, то значително може да бъде опростено пресмятането на филтъра. Реактивни филтри, за които е изпълнено това условие, се наричат филтри тип к.



Фиг.3.2.1

На фиг.3.2.1 е показана Г - образната еквивалентна схема на пасивен четириполюсник (така нареченото полузвено). Ако съпротивлението Z_1 е индуктивно, при увеличаване на честотата, то ще нараства, което при зададено входно напрежение $\dot{U}_1$ не води до намаляване на тока $\dot{I}_2$ през консуматора. От друга страна, ако съпротивлението Z_2 е капацитивно, при увеличаване на честотата то ще намалява, което при зададено входно напрежение $\dot{U}_1$ ще води до намаляване на изходното напрежение $\dot{U}_2$.

Разгледаният по-горе филтър се нарича нискочестотен. Схемата му е показана на фиг.3.2.2.



Фиг.3.2.2

От тази схема за произведението Z_1Z_2 може да се запише:

$$Z_1Z_2 = \frac{Z_1}{2}2Z_2 = j\omega\frac{L}{2}\frac{1}{j\omega\frac{C}{2}} = \frac{L}{C} = R_0^2 = к, \qquad (3.2.1)$$

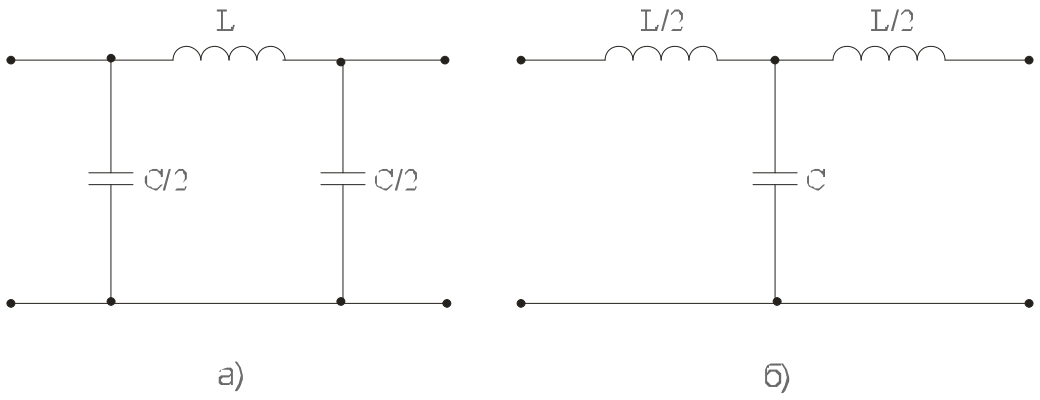
където $R_0 = \sqrt{L/C}$ се нарича номинално характеристично съпротивление.

За характеристичните съпротивления на схемата от фиг.3.2.2 от страна на П - и Т - входовете й се получава:

$$Z_{ПС} = \sqrt{\frac{Z_1Z_2}{1+Z_1/4Z_2}} = \frac{R_0}{\sqrt{1-\omega^2LC/4}}; \qquad (3.2.2)$$

$$Z_{ТС} = \sqrt{Z_1Z_2(1+Z_1/4Z_2)} = R_0\sqrt{1-\omega^2LC/4}\,. \qquad (3.2.3)$$

На фиг.3.2.3 са показани П - и Т - образните схеми на нискочестотния реактивен



Фиг.3.2.3

филтър тип к. За константата на предаване g на тези схеми може да се запише:

$$\text{th}g_{\Pi} = \text{th}g_{T} = \text{th}g = \frac{\sqrt{(Z_1/2)^2 + Z_1Z_2}}{\frac{Z_1}{2} + Z_2} = \frac{\sqrt{R_0^2 - \omega^2L^2/4}}{j\omega L/2 + 1/j\omega C}. \qquad (3.2.4)$$

От последния израз може да се установи, че величината th ще бъде имагинерно число (коефициентът на затихване α ще бъде равен на нула, т.е.: $\alpha = 0$), ако е изпълнено неравенството:

$$R_0^2 - \omega_2L^2/4 > 0. \qquad (3.2.5)$$

Това неравенство е в сила за честотния диапазон $\omega = 0 \ldots \omega_C = \frac{2R_0}{L} = 2/\sqrt{LC}$, който представлява лентата на пропускане на филтъра. Граничната честота ω_C се нарича честота на срязване.

За константата на предаване g_Γ на Γ - образната схема на нискочестотния филтър (фиг.3.2.2) се записва:

$$\text{th}\,g_\Gamma = \sqrt{\frac{(Z_1/2)^2}{Z_1Z_2 + \frac{Z_1^2}{4}}} = \sqrt{\frac{-\omega^2L^2/4}{R_0^2 - \omega^2L^2/4}}. \qquad (3.2.6)$$

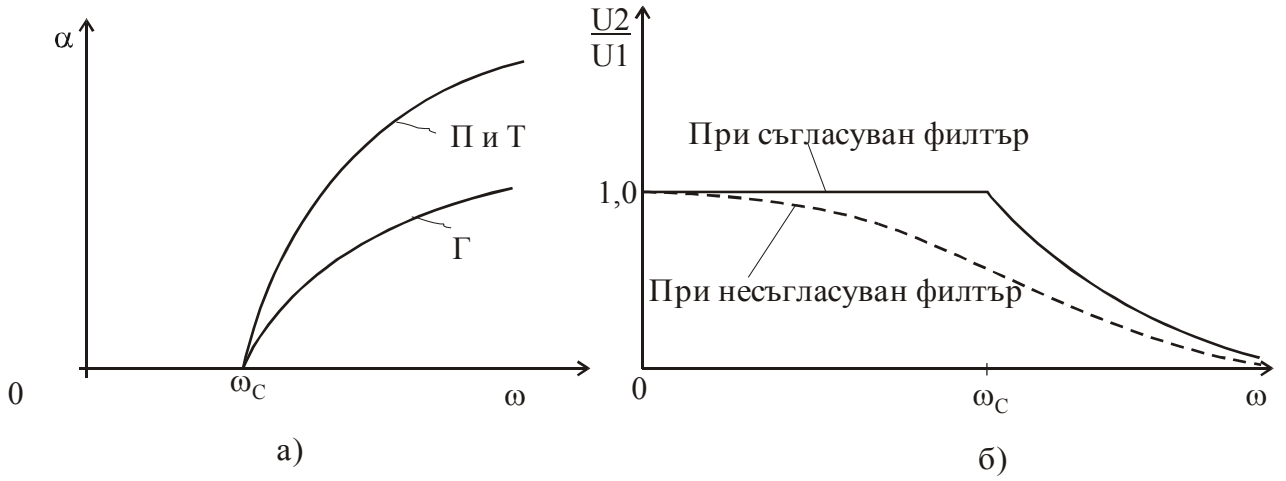
От този израз може да се установи, че за честотния диапазон $\omega = 0 \ldots \omega_C$ величината th е също чисто имагинерна. Освен това от Γ - образната схема на филтъра може да се види, че честотата на срязване $\omega_C = 2/\sqrt{LC}$ е резонансната й честота.

Характеристичните параметри на нискочестотния филтър тип к чрез честотата ω_C могат да бъдат записани така:

$$Z_{\Pi C} = \frac{R_0}{\sqrt{1 - \frac{\omega^2}{\omega_C^2}}}; \quad Z_{TC} = R_0\sqrt{1 - \frac{\omega^2}{\omega_C^2}} \quad \text{и} \quad \text{th}\,g_\Gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\omega^2}{\omega_C^2}}}. \qquad (3.2.7)$$

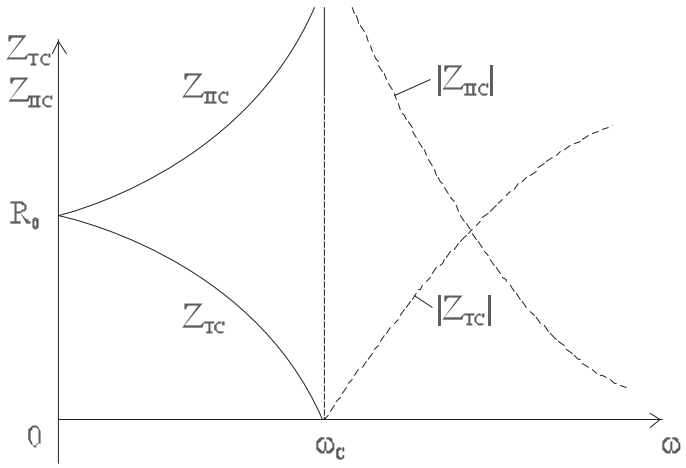
Отношението ω/ω_C се означава с Ω, т.е.: $\Omega = \omega/\omega_C$ и се нарича нормирана честота.

Честотните характеристики на коефициента на затихване α и на отношението на изходното напрежение U_2 към входното напрежение U_1, т.е.: U_2/U_1 са представени



Фиг.3.2.4

на фиг.3.2.4. Коефициентът на затихване α при П - и Т - образните схеми на филтъра е два пъти по-голям в сравнение с Г - образната схема. В случай на несъгласуван филтър затихването на сигнала нараства, като възниква затихване в лентата на пропускане. Това е отразено на фиг.3.4.4б за отношението U_2/U_1 и е показано с пунктирана линия.



Фиг.3.2.5

Честотните характеристики на характеристичните съпротивления $Z_{ПС}$ и $Z_{ТС}$ са показани на фиг.3.2.5. За лентата на пропускане, т.е за честотния диапазон $\omega = 0 \ldots \omega_C$, те са активни съпротивления, като съпротивлението $Z_{ПС}$ се изменя в диапазона $R_0 \ldots \infty$, а съпротивлението $Z_{ТС}$ – в диапазона $R_0 \ldots 0$. За лентата на задържане, т.е. за честотния диапазон $\omega = \omega_C \ldots \infty$ съпротивленията $Z_{ПС}$ и $Z_{ТС}$ са реактивни.

Обстоятелството, че характеристичните съпротивления $Z_{ПС}$ и $Z_{ТС}$ за лентата на пропускане се изменят в широки граници създава трудности при съгласуването на филтъра. Например, за да се постигне характеристично съгласуване в схемата от фиг.3.2.2 е необходимо съпротивлението на генератора $Z_Г$ да бъде равно на съпротивлението $Z_{ТС}$, а съпротивлението на товара $Z_Т$ – на съпротивлението $Z_{ПС}$. Следователно, съпротивленията $Z_Г$ и $Z_Т$ трябва да се изменят по същите криви, както съпротивленията $Z_{ПС}$ и $Z_{ТС}$. На практика обаче, съпротивленията $Z_Г$ и $Z_Т$ са най-често постоянни и те се съгласуват със съпротивленията $Z_{ТС}$ и $Z_{ПС}$ само при ниски честоти, най-често при честота ω, равна на нула. И действително, от изразите за съпротивленията $Z_{ПС}$ и $Z_{ТС}$ (виж. (3.2.2) и (3.2.3)) може да се установи, че при честота $\omega \to 0$ съпротивленията $Z_{ПС} \to R_0$ и $Z_{ТС} \to R_0$. Ето защо, най-често се приема: $Z_Г = Z_Т = R_0 = \sqrt{L/C}$. При зададена честота на срязване $\omega_C = 2R_0/L = 2/\sqrt{LC}$ се получават следните формули за параметрите L и C на филтъра, които се използуват при проектирането му:

$$L = 2R_0/\omega_C \text{ и } C = 2/R_0\omega_C. \qquad (3.2.8)$$

Броят на звената се избира според желания коефициент на затихване α.

3.3. Нискочестотни реактивни електрически филтри тип m

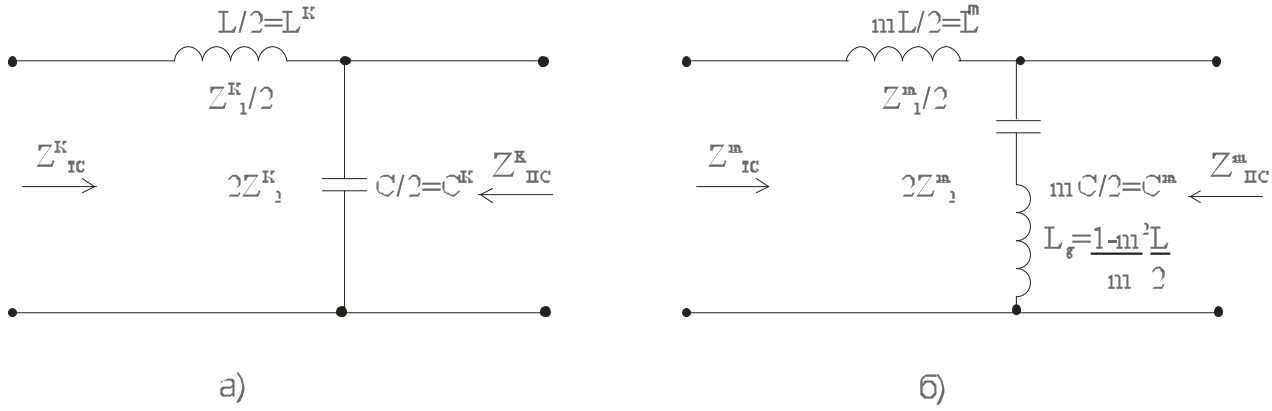
От разгледаното в 3.2 може да се заключи, че филтрите тип к имат два съществени недостатъка:

1. Характеристичните им съпротивления $Z_{ПС}$ и $Z_{ТС}$ в лентата на пропускане се изменят в широки граници. Например, съпротивлението $Z_{ПС}$ се изменя в диапазона $R_0 \ldots \infty$, а съпротивлението $Z_{ТС}$ – в диапазона $R_0 \ldots 0$. Това създава значителни трудности във връзка със съгласуването на филтъра. Например, ако съгласуването е осъществено при честота $\omega = 0$, то в лентата на пропускане при честота $\omega > 0$ се получава затихване, т.е. коефициентът $\alpha \neq 0$.

2. В лентата на задържане коефициентът на затихване α нараства бавно при увеличаване на честотата. За получаване на по-голяма стръмност на нарастването му се изисква използуването на голям брой звена.

Тези недостатъци са избегнати при филтрите тип m, които се получават от филтрите тип к чрез изменение на съпротивленията им Z_1 и Z_2. Прието е филтърът тип к да се нарича прототип, а филтърът тип m – производен.

Г - образните схеми на прототипа и на последователно производния филтър тип m са показани на фиг.3.3.1. В напречното рамо на филтъра тип m се осъществява напрежителен резонанс при честота $\omega > \omega_C$. При тази честота съпротивлението му $2Z_2^m$ става равно на нула, поради което изходното напрежение U_2 се оказва равно на нула, а коефициентът на затихване α добива безкрайно голяма стойност, т.е.: $\alpha = \infty$.



Фиг.3.3.1

Параметърът m е положителна величина, като стойността й е в диапазона 0 ... 1 и се пресмята по формулата:

$$m = \sqrt{1-\frac{\omega_C^2}{\omega_\infty^2}}\,, \qquad (3.3.1)$$

където: ω_C е честотата на срязване на прототипа;

ω_∞ - честотата на безкрайното затихване на филтъра тип m.

За честотите ω_C и ω_∞ се записва:

$$\omega_C = \frac{2R_0^K}{L} = \frac{2}{L}\sqrt{\frac{L^K}{C^K}} = \frac{2}{L}\sqrt{\frac{L}{C}} = \frac{2}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{L}{2}\frac{C}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{L^K C^K}}; \qquad (3.3.2)$$

$$\omega_\infty = \frac{1}{\sqrt{LgC^m}} = \frac{1}{\sqrt{m\frac{C}{2}\frac{1-m^2}{m}\frac{L}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{L^K C^K}\sqrt{1-m^2}} = \frac{\omega_C}{\sqrt{1-m^2}}. \qquad (3.3.3)$$

За характеристичните съпротивления Z_{TC}^K на прототипа и Z_{TC}^m на филтъра тип m се получават следните формули:

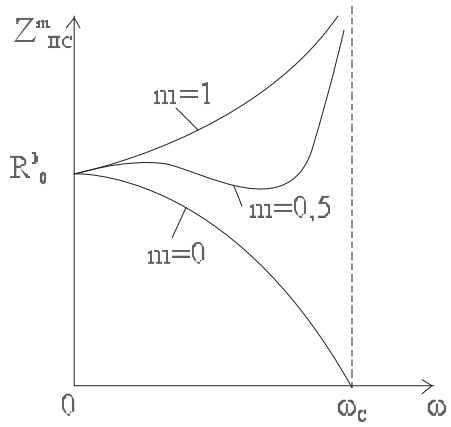
$$Z_{TC}^K = \sqrt{Z_{10}^K Z_{1k}^K} = \sqrt{\left(j\omega L^K + 1/j\omega C^K\right) j\omega L^K} = \sqrt{\frac{L^K}{C^K} - \omega^2 L^{K^2}} =$$

$$= R_0^K \sqrt{1-\omega^2 L^K C^K} = R_0^K \sqrt{1-\frac{\omega^2}{\omega_C^2}}; \qquad (3.3.4)$$

$$Z_{TC}^m = \sqrt{Z_{10}^m Z_{1k}^m} = \sqrt{(j\omega L^K + j\omega\frac{1-m^2}{m}L^K + \frac{1}{j\omega mC^K}) j\omega mL^K} =$$

$$= \sqrt{(j\omega\frac{L^K}{m} + \frac{1}{j\omega mC^K}) j\omega mL^K} = \sqrt{\frac{L^K}{C^K} - \omega^2 (L^K)^2} = R_0^K \sqrt{1-\omega^2 L^K C^K} =$$

$$= R_0^K \sqrt{1-\frac{\omega^2}{\omega_C^2}}. \qquad (3.3.5)$$



Фиг.3.3.2

От последните формули може да се установи, че характеристичното съпротивление Z_{TC}^m на последователно производния филтър тип m е равно на характеристичното съпротивление Z_{TC}^K на прототипа. Това обстоятелство се използува за съгласуване между филтрите тип к и m.

За характеристичните съпротивления $Z_{ПС}^K$ на прототипа и $Z_{ПС}^m$ на филтъра тип m се получават следните формули:

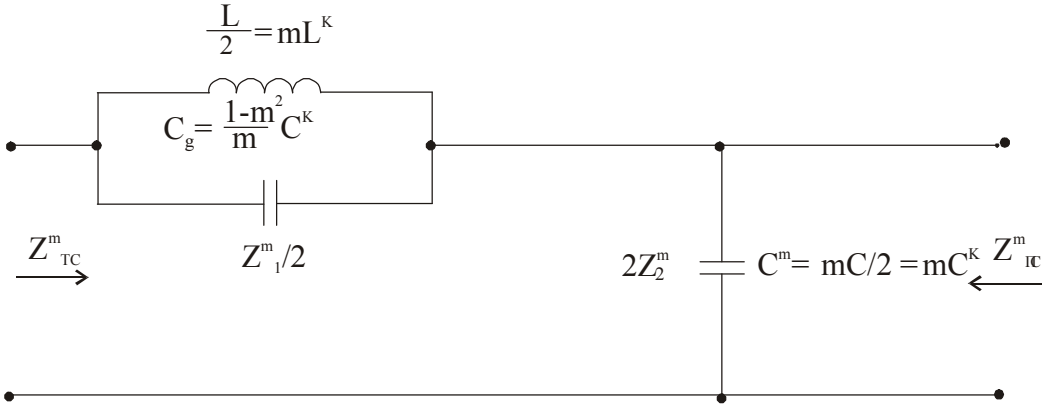
$$Z_{ПС}^K = \sqrt{Z_{20}^K Z_{2K}^K} = \sqrt{\frac{1}{j\omega C^K}\frac{j\omega L^K \frac{1}{j\omega C^K}}{j\omega L^K + \frac{1}{j\omega C^K}}} = \sqrt{\frac{\frac{L^K}{C^K}}{1-\omega^2 L^K C^K}} = \frac{R_0^K}{\sqrt{1-\frac{\omega^2}{\omega_C^2}}}; \qquad (3.3.6)$$

$$Z_{ПС}^m = \sqrt{Z_{20}^m Z_{2K}^m} = \sqrt{(j\omega\frac{1-m^2}{m}L^K + \frac{1}{j\omega mC^K})\frac{(j\omega\frac{1-m^2}{m}L^K + \frac{1}{j\omega mC^K}) j\omega mL^K}{j\omega\frac{1-m^2}{m}L^K + \frac{1}{j\omega mC^K} + j\omega mL^K}} =$$

$$= \sqrt{\frac{1}{j\omega mC^K}[1 - \omega^2(1-m^2)L^K C^K]\frac{\frac{L^K}{C^K} - \omega^2(1-m^2)L^{K2}}{j\omega\frac{L^K}{m} + \frac{1}{j\omega mC^K}}} = \sqrt{[1-\omega^2 L^K C^K(1-m^{2})]\frac{\frac{L^K}{C^K} - \omega^2 L^{K2}(1-m^2)}{1-\omega^2 L^K C^K}} =$$

$$= \sqrt{\frac{R_0^{K2}[1-\omega^2 L^K C^K(1-m^2)]^2}{1-\omega^2 L^K C^K}} == \frac{R_0^K}{\sqrt{1-\omega^2 L^K C^K}}[1-\omega^2 L^K C^K(1-m^2)] = Z_{ПС}^K[1-\frac{\omega^2}{\omega_C^2}(1-m^2)]. \quad (3.3.7)$$

На фиг.3.3.2 са показани честотните характеристики на характеристичното съпротивление $Z_{ПС}^m$ за честотния диапазон $\omega = 0 \ldots \omega_c$ за различни стойности на параметъра m. От сравняването на кривите от фиг.3.3.2 с тези от фиг.3.2.5 може да се установи, че при $m = 1$ кривата на съпротивлението $Z_{ПС}^m$ е същата, както на съпротивлението $Z_{ПС}^K$, а при $m = 0$ кривата на съпротивлението $Z_{ПС}^m$ е същата, както на съпротивлението Z_{TC}^K.



Фиг.3.3.3

В случая най-голям интерес представлява кривата на характеристичното съпротивление $Z_{ПС}^m$ при стойност на параметъра $m = 0{,}5$. От фиг.3.3.2 може да се види, че за сравнително широк честотен диапазон от лентата на пропускане съпротивлението $Z_{ПС}^m$ малко се отличава от номиналното характеристично съпротивление R_0^K на прототипа. Това обстоятелство се използува за съгласуване на филтъра тип m с източника или товара.

Освен последователно производни филтри тип m са разработени и паралелно производни филтри тип m. На фиг.3.3.3 е показана Γ - образната схема на паралелно производен нискочестотен филтър тип m. В надлъжното рамо на филтъра тип m се осъществява токов резонанс при честота $\omega_\infty > \omega_C$. При тази честота съпротивлението му $Z_1^m/2$ става безкрайно голямо, поради което токът $\dot{I}_2$ през консуматора се оказва равен на нула, а коефициентът на затихване α добива безкрайно голяма стойност, т.е.: $\alpha = \infty$.

За честота ω_∞ се получава аналогичен на (3.3.3) израз, т.е.:

$$\omega_\infty = \frac{1}{\sqrt{L^m C_g}} = \frac{1}{\sqrt{mL^K\frac{1-m^2}{m}C^k}} = \frac{1}{\sqrt{L^K C^K}\sqrt{1-m^2}} = \frac{\omega_C}{\sqrt{1-m^2}}.$$

Както при последователно производния филтър тип m, така и тук се сравняват характеристичните съпротивления $Z^m_{ПС}$ и $Z^m_{ТС}$ с тези на прототипа.

За характеристичното съпротивление $Z^m_{ПС}$ на паралелно производния филтър тип m се записва:

$$Z^m_{ПС} = \sqrt{Z^m_{20} Z^m_{2K}} = \sqrt{\frac{1}{j\omega m C^K} \frac{j\omega L^K \dfrac{1}{j\omega \dfrac{1}{m} C^K}}{j\omega m L^K + \dfrac{1}{j\omega \dfrac{1}{m} C^K}}} = \sqrt{\frac{\dfrac{L^K}{C^K}}{1 - \omega^2 L^K C^K}} = \frac{R^K_0}{\sqrt{1 - \dfrac{\omega^2}{\omega^2_C}}} . \qquad (3.3.8)$$

От сравняването на формули (3.3.6) и (3.3.8) се установява, че характеристичното съпротивление $Z^m_{ПС}$ на паралелно производния филтър тип m съвпада с характеристичното съпротивление $Z^K_{ПС}$ на прототипа.

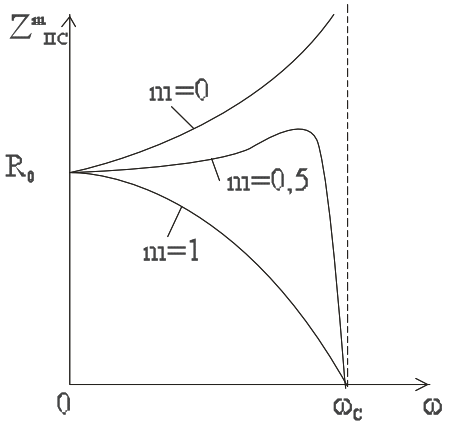
За характеристичното съпротивление $Z^m_{ТС}$ на паралелно производния филтър тип m се получава:

$$Z^m_{ТС} = \sqrt{Z^m_{10} Z^m_{1K}} = \sqrt{\left(\left(\frac{j\omega m L^K \dfrac{1}{j\omega \dfrac{1-m^2}{m} C^K}}{j\omega m L^K + \dfrac{1}{j\omega \dfrac{1-m^2}{m} C^K}} + \frac{1}{j\omega m C^K} \right) \frac{j\omega m L^K \dfrac{1}{j\omega \dfrac{1-m^2}{m} C^K}}{j\omega m L^K + \dfrac{1}{j\omega \dfrac{1-m^2}{m} C^K}} \right)} =$$

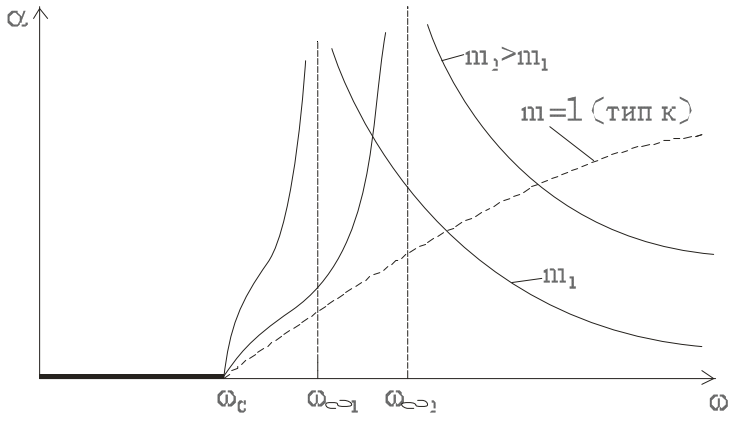
$$= \sqrt{\left(\frac{j\omega m L^K}{1 - \omega^2 L^K C^K (1-m^2)} + \frac{1}{j\omega m C^K} \right) \frac{j\omega m L^K}{1 - \omega^2 L^K C^K (1-m^2)}} =$$

$$= \sqrt{\frac{L^K}{C^K} \frac{-\omega^2 m^2 L^K C^K + 1 - \omega^2 L^K C^K + \omega^2 m^2 L^K C^K}{[1 - \omega^2 L^K C^K (1-m^2)]}} = \frac{R^K_0 \sqrt{1 - \omega^2 L^K C^K}}{1 - \omega^2 L^K C^K (1-m^2)} =$$

$$= Z^K_{ТС} / [1 - \omega^2 L^K C^K (1-m^2)] = Z^K_{ТС} / [1 - \frac{\omega^2}{\omega^2_C}(1-m^2)] . \qquad (3.3.9)$$



Фиг. 3.3.4



Фиг. 3.3.5

На фиг.3.3.4 са показани честотните характеристики на характеристичното съпротивление $Z^m_{ТС}$ за честотния диапазон $\omega = 0 \ldots \omega_C$ за различни стойности на

параметъра m. От сравняването на кривите от фиг.3.3.4 с тези от фиг.3.2.5 може да се установи,че при $m = 1$ кривата на съпротивлението Z_{TC}^{m} е същата, както на съпротивлението Z_{TC}^{κ}, а при $m = 0$ кривата на съпротивлението Z_{TC}^{m} е същата, както на съпротивлението $Z_{ПС}^{\kappa}$.

И тук най-голям интерес представлява кривата на характеристичното съпротивление Z_{TC}^{m} при стойност на параметъра $m = 0{,}5$. От фиг.3.3.4 може да се види че, за сравнително широк честотен диапазон от лентата на пропускане съпротивлението Z_{TC}^{m} малко се отличава от номиналното характеристично съпротивление R_0^k на прототипа. И тук може да се направи аналогичното заключение, както при последователно производния филтър тип m, че горното обстоятелство може да бъде използувано за съгласуване на филтъра тип m с източника или товара.

На фиг.3.3.5 са показани честотните характеристики на коефициента на затихване α на филтъра тип m за две различни стойности на параметъра m. За сравнение на същата фигура е показана с пунктирана линия честотната характеристика на коефициента α на прототипа $(m = 1)$.

От кривите на фиг.3.3.5 може да се види че, при стойност на параметъра $m = m_1$, т.е. когато честотата $\omega_{\infty 1}$ е по-близка до честотата на срязване ω_C се получава по-голяма стръмност на нарастване на коефициента на затихване α за честотния интервал $\omega = \omega_C \ldots \omega_{\infty 1}$. Когато честотата ω стане по-голяма от честотата на безкрайното затихване $\omega_{\infty(1,2)}$, то коефициентът на затихване α намалява, което е нежелателно. Ето защо филтрите се реализират чрез стъпално свързване на звена тип m със звена тип к. По този начин се постига както необходимата стойност на коефициента на затихване α в лентата на задържане, така и голяма стръмност на нарастване на коефициента α около честотата на срязване ω_C. Равенството на характеристичните съпротивления $Z_{ПС}$ или Z_{TC} между двата типа звена позволява да се осъществи съгласуване между звената при съставяне на многозвенни филтри.

Пресмятането на многозвенните филтри може да бъде извършено по следния начин:

1. Задават се честотата на срязване ω_C и съпротивлението на товара Z_T като се приема $Z_T = R_0^K$.

2. Определят се параметрите L^K и C^K на Г - образния прототип по формулите:

$$L^K = L/2 = R_0^K/\omega_C \text{ и } C^K = C/2 = 1/R_0^K\omega_C. \qquad (3.3.10)$$

3. Определя се коефициентът на затихване α по формулата за thg, т.е.:

$$\text{thg} = \sqrt{\frac{\omega^2 L^{K2}}{\omega^2 L^{K2} - R_0^{K2}}} = \sqrt{1/(1-\frac{\omega_C^2}{\omega^2})}. \qquad (3.3.11)$$

4. Според желаната стойност на коефициента на затихване α за високи честоти се определя броят на звената тип к.

5. Според желаната стръмност на нарастване на коефициента α се определя честотата ω_∞, а оттам параметрите на звеното тип m, които се пресмятат съгласно формулите дадени на схемите от фиг.3.3.1б и фиг.3.3.3. За параметрите на Г - образната схема на последователно производния филтър тип m се записва:

$$L^m = m\frac{L}{2} = mL^K;\ C^m = m\frac{C}{2} = mC^K \text{ и } L_g = \frac{1-m^2}{m}\frac{L}{2} = \frac{1-m^2}{m}L^K, \qquad (3.3.12)$$

а за параметрите на Γ - образната схема на паралелно производния филтър тип m съответно:

$$L^m = m\frac{L}{2} = mL^K;\ C_g = \frac{1-m^2}{m}\frac{C}{2} = \frac{1-m^2}{m}C^K \text{ и } C^m = m\frac{C}{2} = mC^K. \qquad (3.3.13)$$

Ако е необходимо да се осигури съгласуване между звената, то пресмятането на филтъра се усложнява. Ето защо на практика често се използуват номограми, което дава възможност за сравнително лесно проектиране на филтър с необходимите характеристики.

3.4. Високочестотни, лентови и заграждащи реактивни филтри тип к

А) Високочестотни реактивни филтри тип к

Нискочестотните филтри могат да бъдат използувани като база при пресмятането на високочестотните филтри. За целта се прилага методът на преобразуване на честотите. Същността му се състои в следното: Ако е зададена някаква функция $F_1(p)$ на комплексната честота p, то може да бъде получена друга функция на комплексната честота s, ако се използува връзката $p = p(s)$ между тези честоти.

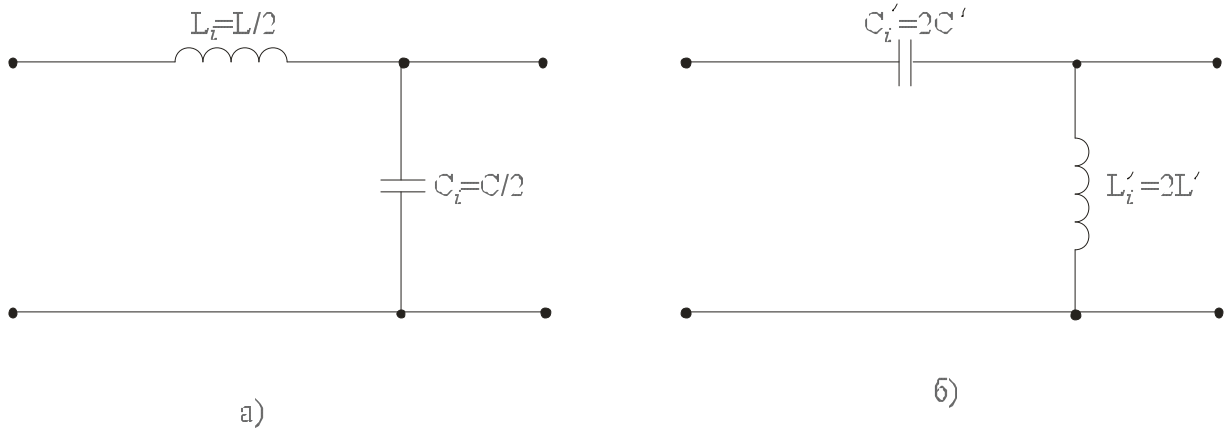
Приема се, че изследваната функция $F_1(p)$ е операторно съпротивление $Z_1(p)$. Например за някакъв клон i на дадена сложна електрическа верига операторното му съпротивление $Z_i(p)$ в общия случай има вида: $Z_i(p) = R_i + pL_i + 1/pC_i$. Тъй като тук се разглеждат реактивни филтри, то резистори отсъствуват, т.е.: $R_i = 0$.

Нека преобразуването $p = p(s)$ е от вида $p(s) = a/s$ ($a = const$). Ако това преобразуване се приложи към операторното съпротивление $Z_i(p) = pL_i + 1/pC_i$, се получава операторно съпротивление $Z_i(s)$ от вида:

$$Z_i(s) = \frac{a}{s}L_i + \frac{s}{aC_i} = \frac{1}{sC_i'} + sL_i', \qquad (3.4.2)$$

където $C_i' = 1/aL_i$ и $L_i' = 1/aC_i$.

Разгледаното по-горе показва, че чрез преобразуването $p(s) = a/s$ може да се получи нова верига със съпротивление на клоновете $Z_i(s)$, ако в изходната верига



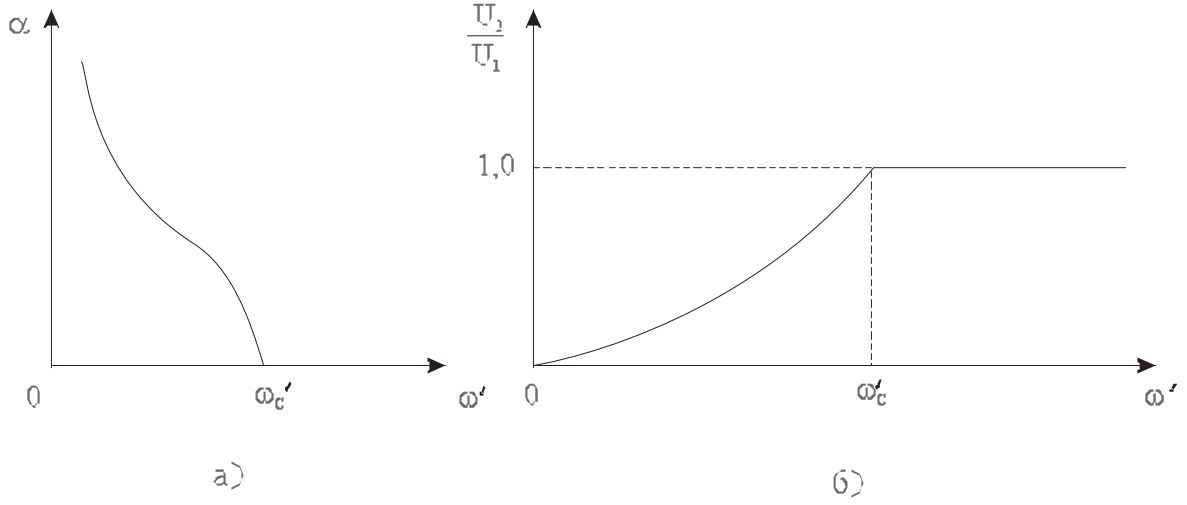
Фиг.3.4.1

със съпротивление на клоновете $Z_i(p)$ всички бобини с индуктивности L_i се заменят с

кондензатори с капацитети C_i , а всички кондензатори с капацитет C_i – с бобини с индуктивности L_i.

Ако преобразуването p = a/s се приложи към Г - образната схема на нискочестотния филтър тип к (фиг.3.4.1а), се получава схемата, показана на фиг.3.4.1б.

Честотните характеристики на коефициента на затихване α и на отношението U_2/U_1 за последната схема са представени на фиг.3.4.2. От кривите на фигурата може да се установи, че лентата на пропускане на филтъра от фиг.3.4.1б е в диапазона $\omega' = \omega_c' \ldots \infty$, т.е. на тази фигура е показана Г - образната схема на високочестотен филтър. Ако честотите на срязване за двата филтъра се изберат еднакви, т.е.: $\omega_c' = \omega_c$, то параметрите на високочестотния филтър се определят чрез параметрите на нискочестотния филтър от равенствата: $C_I' = C_i$ и $L_I' = L_i$.



Фиг.3.4.2

За характеристичните параметри на високочестотния филтър се записват изразите:

$$Z_{TC} = \sqrt{Z_{10}Z_{1K}} = \sqrt{(\frac{1}{j\omega' C_i'} + j\omega L_i')\frac{1}{j\omega' C_i'}} = \sqrt{\frac{L_i'}{C_i'}(1 - \frac{1}{\omega'^2 L_i'})} = R_0\sqrt{1 - \frac{\omega_C'^2}{\omega'^2}}\ ; \qquad (3.4.2)$$

$$Z_{ПС} = \sqrt{Z_{20}Z_{2K}} = \sqrt{j\omega' L_i' \frac{\frac{1}{j\omega' C_i'}}{j\omega' L_i' + \frac{1}{j\omega' C_i'}}} = \sqrt{\frac{L_i'/C_i'}{1-\omega'^2 L_i' C_i'}} = R_0/\sqrt{1-\frac{\omega_C'^2}{\omega'^2}}\ ; \qquad (3.4.3)$$

$$thg = \sqrt{\frac{Z_{1K}}{Z_{10}}} = \sqrt{\frac{\frac{1}{j\omega' C_i'}}{\frac{1}{j\omega' C_i'} + j\omega' L_i'}} = \sqrt{\frac{1}{1 - \omega'^2 L_i' C_i'}} = 1/\sqrt{1 - \frac{\omega'^2}{\omega_C'^2}}\ , \qquad (3.4.4)$$

където: $R_0 = \sqrt{\frac{L_i'}{C_i'}} = \sqrt{\frac{L'}{C'}}$ е номиналното характеристично съпротивление;

$\omega_C' = 1/\sqrt{L_i' C_i'} = 1/2\sqrt{L' C'}$ - честотата на срязване.

П - и Т - образните схеми на високочестотния филтър са представени на фиг.3.4.3.

При зададени номинално характеристично съпротивление $R_0 = \sqrt{L'/C'}$ и честота на срязване $\omega' = 1/2\sqrt{L'C'}$ параметрите L' и C' на високочестотния филтър се определят по формулите:

$$L' = R_0/2\omega'_C \quad \text{и} \quad C' = 1/2R_0\omega'_C \ . \tag{3.4.5}$$

Б) Лентови реактивни филтри тип к

Лентовите филтри могат да бъдат получени от нискочестотните филтри също чрез използуване на метода на преобразуване на честотите. За целта преобразованието $p = p(s)$ е от вида :

$$p(s) = bs + a/s. \tag{3.4.6}$$

В този случай операторното съпротивление $Z_i(p)$ се заменя с операторното съпротивление $Z_i(s)$ по следния начин:

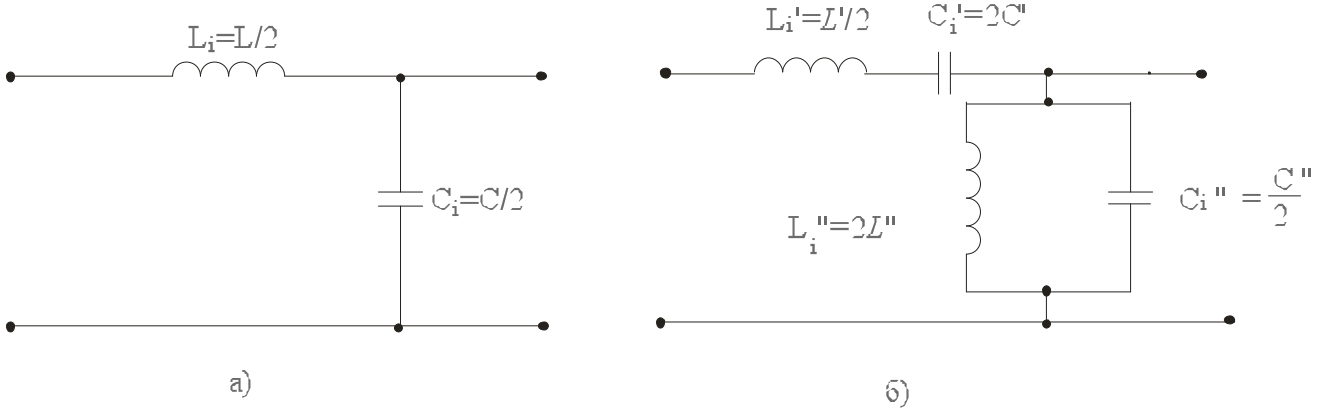
$$Z_i(p) = pL_i + \frac{1}{pL_i} = (bs + \frac{a}{s})L_i + \frac{1}{(bs + \frac{a}{s})C_i} = bL_i s + \frac{1}{\frac{1}{aL_i}s} + \frac{1}{bC_i s + \frac{aC_i}{s}} =$$

$$= L'_i s + \frac{1}{C'_i s} + \frac{1}{C''_i s + \frac{1}{L''_i s}} \quad , \tag{3.4.7}$$

където: $L'_i = bL_i$; $C'_i = \frac{1}{aL_i}$; $C''_i = bC_i$ и $L''_i = \frac{1}{aC_i}$.

Полученият по-горе резултат показва, че чрез преобразованието от вида (3.4.6) бобините с индуктивности L_i се заменят с последователно съединени бобини с индуктивности L'_i и кондензатори с капацитети C'_i, а кондензаторите с капацитети C_i – с паралелно съединени кондензатори с капацитети C''_i и бобини с индуктивности L''_i.

Ако преобразованието $p = p(s)$ от вида (3.4.6) се приложи към Г - образната схема на нискочестотен филтър тип к (фиг.3.4.4а), се получава схемата показана на фиг.3.4.4б.



Фиг.3.4.4

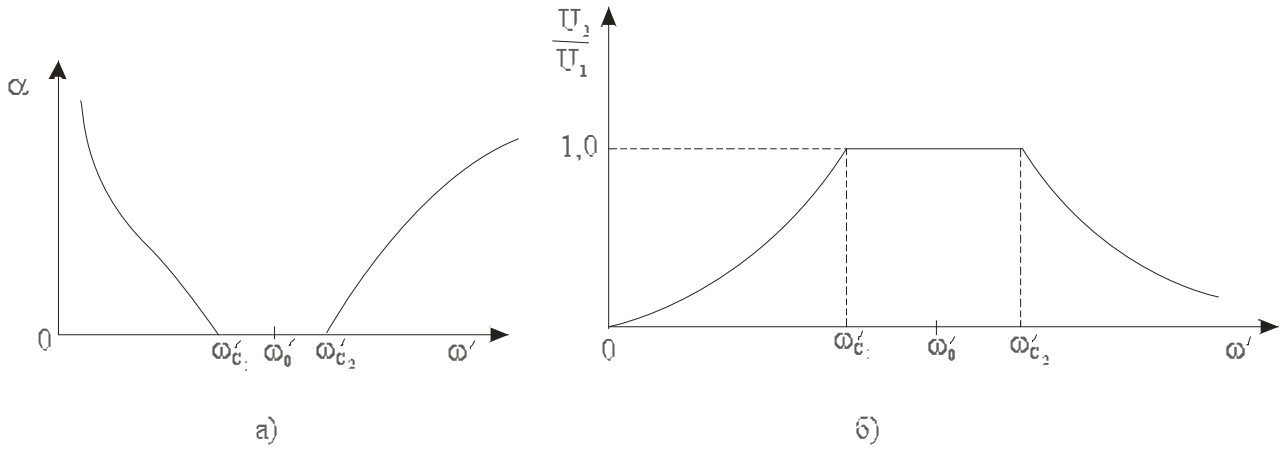
Честотните характеристики на коефициента на затихване α и на отношението U_2/U_1 за последната схема (фиг.3.4.4б) са представени на фиг.3.4.5. От кривите на

фигурата може да се установи, че лентата на пропускане на филтъра от фиг.3.4.4б е в диапазона $\omega' = \omega'_{C1} \ldots \omega'_{C2}$, на тази фигура е показана Г - образната схема на лентов филтър.

За изясняване на изложения по-горе резултат се разглежда как се изменя лентата на пропускане на нискочестотния филтър при прилагане на честотното преобразование от вида (3.4.6). Въз основа на това преобразование могат да бъдат установени съответствията:

при $s = 0$, $p = \infty$ и $U_2/U_1 = 0$;

при $s = \infty$, $p = \infty$ и $U_2/U_1 = 0$; (3.4.8)



Фиг.3.4.5

при $s^2 = -a/b$, $p = 0$ и $U_2/U_1 = 1$.

Приемайки комплексните честоти p и s за чисто имагинерни величини, т.е.: $p = j\omega$ и $s = j\omega'$ може да се установи, че честотата на срязване ω_c на нискочестотния филтър съответствуват две честоти на срязване ω'_{C1} и ω'_{C2} на лентовия филтър. Тези честоти се определят от уравнението:

$$j\omega_C = j\omega' b + \frac{a}{j\omega'}, \text{ или } \omega_C = \omega' b - \frac{a}{\omega'} . \quad (3.4.9)$$

Корените на горното уравнение са:

$$\omega'_{C1,C2} = \frac{\omega_C}{2b} \pm \sqrt{\frac{\omega_C^2}{4b^2} + \frac{a}{b}} . \quad (3.4.10)$$

За честотите ω'_{C1} и ω'_{C2} могат да бъдат записани равенствата:

$$\omega'_{C2} - \omega'_{C1} = \omega_C/b \quad \text{и} \quad \omega'_{C1} \cdot \omega'_{C2} = a/b = \omega_0'^2, \quad (3.4.11)$$

където $\omega'_0 = \sqrt{a/b}$ е честотата на лентовия филтър, съответствуваща на случая $p = 0$, т.е.: $s^2 = - a/b$.

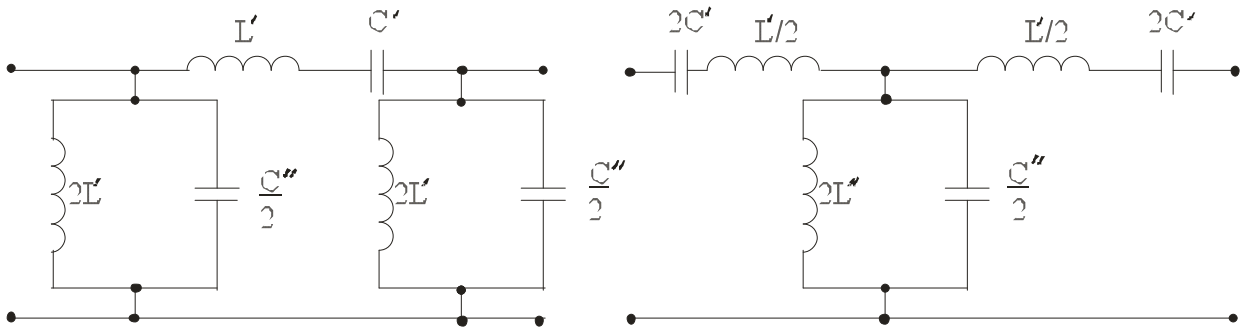
Ако е зададена лентата на пропускане на лентовия филтър, то въз основа на получените формули могат да бъдат определени коефициентите a и b, а оттам параметрите на елементите на схемата му. По този начин се изхожда от резултатите от предварителното пресмятане на нискочестотния филтър тип к със зададени честота на срязване ω_C и известно номинално характеристично съпротивление R_0.

Пресмятането на лентовия филтър може да бъде опростено, ако лентата на пропускане на двата филтъра - лентовия и нискочестотния се изберат с еднаква ширина, т.е.: ω'_{C2} - ω'_{C1} = ω_C. В този случай за коефициентите a и b се получава: $a = \omega'_{C1}\omega'_{C2}$ и $b = 1$.

П - и Т - образните схеми на лентовия филтър тип к са показани на фиг.3.4.6.

Ако е изпълнено условието $L'C' = L''C''$ за честотата ω'_0 и за номиналното характеристично съпротивление R_0 се записва:

$$\omega'_0 = 1/\sqrt{L'C'} = 1/\sqrt{L''C''} \text{ и } R_0 = \sqrt{\frac{L'}{C''}} = \sqrt{\frac{L''}{C'}} \quad . \tag{3.4.12}$$



Фиг.3.4.6

В този случай при зададени честоти ω'_{C1} и ω'_{C2} и съпротивление R_0 пресмятането на параметрите на елементите на лентовия филтър тип к се извършва по формулите:

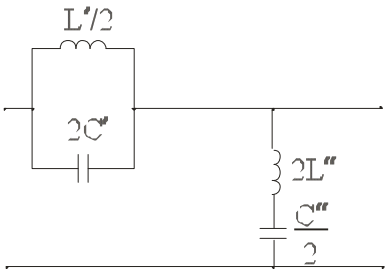
$$L' = \frac{2R_0}{\omega'_{C2} - \omega'_{C1}} \; ; \qquad C' = \frac{\omega'_{C2} - \omega'_{C1}}{2R_0\omega'_{C1}\omega'_{C2}} \; ;$$

$$L'' = \frac{R_0(\omega'_{C2} - \omega'_{C1})}{2\omega'_{C1}\omega'_{C2}} \; ; \; C'' = \frac{2}{R_0(\omega'_{C2} - \omega'_{C1})} \, . \tag{3.4.13}$$

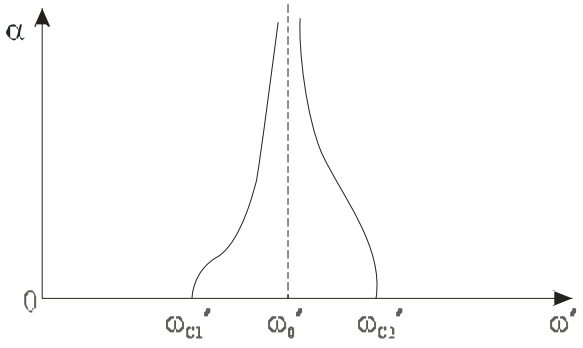
Методът на преобразуване на честотите може да бъде приложен и по отношение на нискочестотните филтри тип m. По този начин могат да бъдат получени високочестотни и лентови филтри m.

В) <u>Заграждащи реактивни филтри тип к</u>

Заграждащите филтри също могат да бъдат получени чрез метода на



Фиг.3.4.7



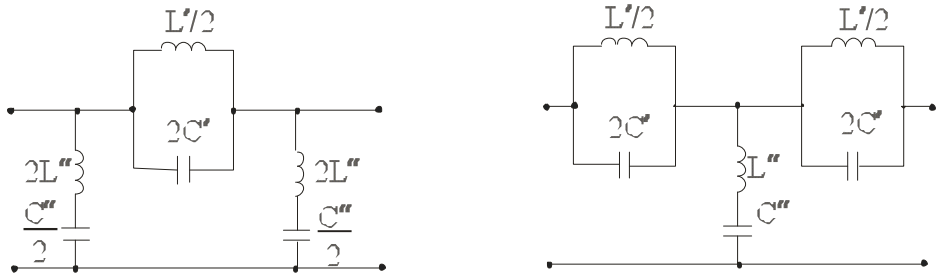
Фиг.3.4.8

преобразуване на честотите. За целта преобразованието от вида (3.4.6), т.е. $p(s) = bs + a/s$ се прилага се прилага към високочестотните филтри.

Γ - образната схема на заграждащия филтър тип к е показана на фиг.3.4.7, а честотната характеристика на коефициента на затихване α - на фиг.3.4.8.

Π - и T - образните схеми на заграждащия филтър тип к са дадени на фиг.3.4.9.

Ако е изпълнено условието $L'C' = L''C''$ за честотата $\omega_0' = \sqrt{\omega_{C1}'\omega_{C2}'}$ и номиналното характеристично съпротивление R_0 аналогично, както при лентовия филтър се записва:



Фиг.3.4.9

$$\omega_0' = \frac{1}{\sqrt{L'C'}} = \frac{1}{\sqrt{L''C''}} \text{ и } R_{0.} = \sqrt{\frac{L'}{C''}} = \sqrt{\frac{L''}{C'}}. \qquad (3.4.14)$$

В този случай при зададени честоти ω_{C1}' и ω_{C2}' и съпротивление R_0 параметрите на елементите на заграждащия филтър тип к се определят по формулите:

$$L' = \frac{2R_0(\omega_{C2}' - \omega_{C1}')}{\omega_{C1}'\omega_{C2}'} \; ; \; C' = \frac{1}{2R_0(\omega_{C2}' - \omega_{C1}')};$$

$$L'' = \frac{R_0}{2(\omega_{C2}' - \omega_{C1}')} \text{ и } C'' = \frac{2(\omega_{C2}' - \omega_{C1}')}{\omega_{C1}'\omega_{C2}'}.$$

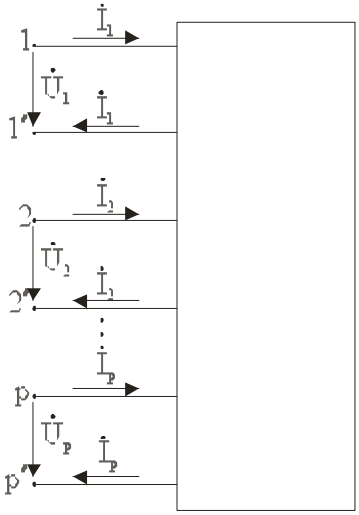
IV. МНОГОПОЛЮСНИЦИ

Встъпителни бележки

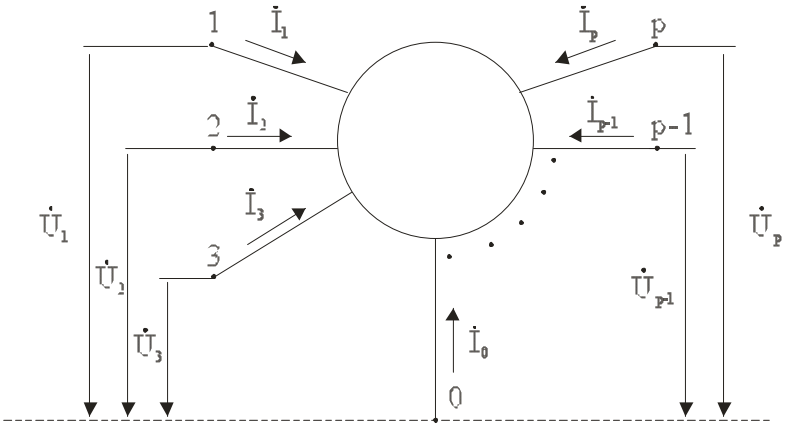
В раздела се дават основни понятия и Z - и Y - системите уравнения на многополюсници. Разглеждат се въпроси, свързани с натоварен активен многополюсник и се прави обобщение на теоремите на Тевенен и Нортон.

4.1. Многополюсници – общи положения

Под многополюсник се разбира електрическа верига или част от нея, разглеждана по отношение на N изводи (полюси). При групиране на изводите на в p на брой двойки се говори за $2p$ - полюсник (фиг.4.1.1).



Фиг.4.1.1



Фиг.4.1.2

Всяка двойка изводи представлява вход или изход в зависимост от това, дали е включен източник на енергия или консуматор. Токовете в съответните съединителни проводници имат еднакви големини и противоположни посоки, т.е.: $\dot{I}_S = -\dot{I}_S'$ за $s = 1, 2, \ldots p$. Това ограничение позволява да се обобщи изследването на четириполюсници и за случая на многополюсници.

При разглеждането на многополюсник може да се приеме, че всички полюси с индекс “прим” са обединени в един общ базов полюс с номер 0. Така се получава $p+1$ полюсник. При това положение дадено напрежение $\dot{U}_S$ се определя по отношение на базовия полюс, като се полага $\dot{U}_S = \dot{U}_{S0}$.

При външно захранване източникът на ЕДН или ток с номер s се включва към съответния полюс s и базовия полюс 0. Токът $\dot{I}_0$ в съединителния проводник от базовия полюс не е независим, тъй като съгласно първия закон на Кирхоф се получава:

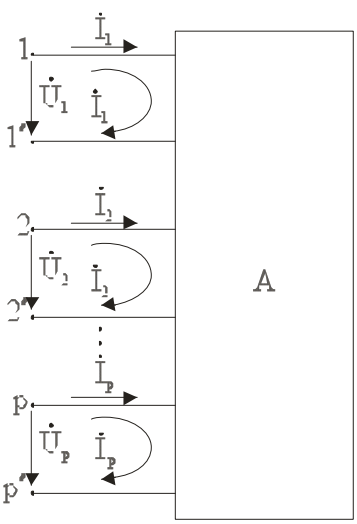
$$\dot{I}_0 = -\sum_{S=1}^{p} \dot{I}_S .$$

Изследването на многополюсника може да бъде осъществено и при условие, че не p+1-вият полюс, а някаква външна точка се приема за базова и спрямо нея се определят потенциалите на всички полюси.

Един многополюсник е активен, когато той обхваща във вътрешната си структура независими енергийни източници, чието действие не се компенсира взаимно.

Теорията на активните многополюсници се използуват при съставянето на уравненията на състоянието на електрически вериги, както и при анализа на постоянни режими в нелинейни електрически вериги.

4.2. Z - и Y - системи уравнения на многополюсник



Фиг.4.2.1

За обосноваване на Z - системата на активен 2p - полюсник (фиг.4.2.1) се използува методът с контурни токове. Първите p независими контура се избират така, че съответните входове да участвуват само в един контур. Контурните токове се означават с индекс “прим”. Въз основа на направения избор се полага: $\dot{I}'_S = \dot{I}_S$ за s = 1, 2, …, p.

С $\dot{E}_{rr}$ за $r \le p$ се означава алгебричната сума на ЕДН на източниците, участвуващи в контура r, т.е. вътрешните източници.

Като се има предвид изложеното по-горе по метода на контурните токове се записва следната система уравнения:

$$
\begin{aligned}
&Z'_{11}\dot{I}_1 + \ldots + Z'_{1p}\dot{I}_P + Z'_{1p+1}\dot{I}'_{p+1} + \ldots + Z'_{1к}\dot{I}'_к = \dot{U}_1 + \dot{E}_{11};\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&Z'_{p1}\dot{I}_1 + \ldots + Z'_{pp}\dot{I}_P + Z'_{p\,p+1}\dot{I}'_{p+1} + \ldots + Z'_{pк}\dot{I}'_к = \dot{U}_p + \dot{E}_{pp};\\
&Z'_{p+11}\dot{I}_1 + \ldots + Z'_{p+1p}\dot{I}'_p + Z'_{p+1\,p+1}\dot{I}'_{p+1} + \ldots + Z'_{p+1к}\dot{I}'_к = \dot{E}'_{p+1};\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&Z'_{к1}\dot{I}_1 + \ldots + Z'_{кp}\dot{I}_p + Z'_{к\,p+1}\dot{I}'_{p+1} + \ldots + Z'_{кк}\dot{I}'_к = \dot{E}'_{кк}.
\end{aligned}
\qquad (4.2.1)
$$

Въвеждат се следните вектори:

$$
\begin{aligned}
&\underline{\dot{I}}_{ВХ} = [\dot{I}_1\ \dot{I}_2 \ldots \dot{I}_p]_t;\ \underline{\dot{I}}_{В} = [\dot{I}'_{P+1}\ \dot{I}'_{P+2} \ldots \dot{I}'_к]_t;\\
&\underline{\dot{U}}_{ВХ} = [\dot{U}_1\ \dot{U}_2 \ldots \dot{U}_P]_t;\ \underline{\dot{E}}_1 = [\dot{E}_{11}\ \dot{E}_{22} \ldots \dot{E}_{PP}]_t;\\
&\underline{\dot{E}}_2 = [\dot{E}'_{P+1}\ \dot{E}'_{P+2} \ldots \dot{E}'_к]_t.
\end{aligned}
\qquad (4.2.2)
$$

Матрицата $\underline{Z}'$ на комплексните контурни съпротивления се представя по следния начин:

$$\underline{Z}' = \begin{bmatrix} \underline{Z}_{11} & \vdots & \underline{Z}_{12} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \underline{Z}_{21} & \vdots & \underline{Z}_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{11}' & \cdots & Z_{1p}' & \vdots & Z_{1\ p+1}' & \cdots & Z_{1к}' \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ Z_{p1}' & \cdots & Z_{pp}' & \vdots & Z_{p\ p+1}' & \cdots & Z_{pк}' \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ Z_{p+11}' & \cdots & Z_{p+1p}' & \vdots & Z_{p+1\ p+1}' & \cdots & Z_{p+1\ к}' \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ Z_{к1}' & \cdots & Z_{кp}' & \vdots & Z_{к\ p+1}' & \cdots & Z_{кк}' \end{bmatrix}. \qquad (4.2.3)$$

Като се имат предвид горните означения система (4.2.1) в матричен вид се записва така:

$$\begin{bmatrix} \underline{Z}_{11} & \vdots & \underline{Z}_{12} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \underline{Z}_{21} & \vdots & \underline{Z}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\underline{I}}_{вх} \\ \cdots \\ \dot{\underline{I}}_{в}' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\underline{U}}_{вх} & + & \dot{\underline{E}}_1 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ & \dot{\underline{E}}_2' & \end{bmatrix}. \qquad (4.2.4)$$

След извършване на матричните умножения се получава:

$$\begin{vmatrix} \underline{Z}_{11}\dot{\underline{I}}_{вх} + \underline{Z}_{12}\dot{\underline{I}}_{в}' = \dot{\underline{U}}_{вх} + \dot{\underline{E}}_1; \\ \underline{Z}_{21}\dot{\underline{I}}_{вх} + \underline{Z}_{22}\dot{\underline{I}}_{в}' = \dot{\underline{E}}_2'. \end{vmatrix} \qquad (4.2.5)$$

От второто уравнение на последната система се определя векторът на вътрешните контурни токове $\dot{\underline{I}}_{в}'$:

$$\dot{\underline{I}}_{в}' = \underline{Z}_{22}^{-1}\dot{\underline{E}}_2' - \underline{Z}_{22}^{-1}\underline{Z}_{21}\dot{\underline{I}}_{вх}. \qquad (4.2.6)$$

Полученият израз за $\dot{\underline{I}}_{в}'$ се замества в първото уравнение на същата система и се получава:

$$(\underline{Z}_{11} - \underline{Z}_{12}\underline{Z}_{22}^{-1}\underline{Z}_{21})\dot{\underline{I}}_{вх} = \dot{\underline{U}}_{вх} + \dot{\underline{E}}_1 - \underline{Z}_{12}\underline{Z}_{22}^{-1}\dot{\underline{E}}_2'. \qquad (4.2.7)$$

Правят се полаганията:

$$\underline{Z} = \underline{Z}_{11} - \underline{Z}_{12}\underline{Z}_{22}^{-1}\underline{Z}_{21}; \qquad (4.2.8)$$

$$\dot{\underline{U}}_{вх0} = -\dot{\underline{E}}_1 + \underline{Z}_{12}\underline{Z}_{22}^{-1}\dot{\underline{E}}_2', \qquad (4.2.9)$$

където $\underline{Z}$ е квадратната матрица на Z - параметрите на активния многополюсник;

$\dot{\underline{U}}_{вх0}$ - векторът на входните напрежения при едновременно прекъсване на всички входове, т.е. при $\dot{\underline{I}}_{вх} = \underline{0}$.

Тогава Z - системата уравнения на активния многополюсник се представя в следната матрична форма:

$$\dot{\underline{U}}_{вх} = \underline{Z}\dot{\underline{I}}_{вх} + \dot{\underline{U}}_{вх0} \ . \qquad (4.2.10)$$

За преминаване към Y - системата уравнения на активния многополюсник се правят полаганията:

$$\underline{Y} = \underline{Z}^{-1} = (\underline{Z}_{11} - \underline{Z}_{12}\underline{Z}_{22}^{-1}\underline{Z}_{21})^{-1}; \qquad (4.2.12)$$

$\dot{\underline{I}}_{вхК} = (\underline{Z}_{11} - \underline{Z}_{12}\underline{Z}_{22}^{-1}\underline{Z}_{21})^{-1}(\dot{\underline{E}}_1 - \underline{Z}_{12}\underline{Z}_{22}^{-1}\dot{\underline{E}}_2^{/}) = -\underline{Z}^{-1}\dot{\underline{U}}_{вх0}$, при което се намира:

$$\dot{\underline{I}}_{вх} = \underline{Y}.\dot{\underline{U}}_{вх} + \dot{\underline{I}}_{вхК} . \qquad (4.2.13)$$

В последното матрично уравнение с $\underline{Y}$ е означена квадратната матрица на Y - параметрите на многополюсника, а с $\dot{\underline{I}}_{вхК}$ - векторът на входните токове при едновременно късо съединение на всички входове, т.е. при $\dot{\underline{U}}_{вх} = \underline{0}$.

В случай на пасивен многополюсник се записва:

$\dot{\underline{U}}_{вх0} = \underline{0}$ и $\dot{\underline{I}}_{вхК} = \underline{0}$.

В този случай матричните уравнения (4.2.10) и (4.2.13) добиват съответно вида:

$\dot{\underline{U}}_{вх} = \underline{Z}\dot{\underline{I}}_{вх}$ и $\dot{\underline{I}}_{вх} = \underline{Y}\dot{\underline{U}}_{вх}$. (4.2.14)

Получените по-горе резултати са обобщение на съответните системи уравнения за активни или пасивни четириполюсници.

Тук трябва да се отбележи, че Z - и Y - системите уравнения на $p+1$ полюсник имат същата форма, както съответните системи на $2p$ - полюсник.

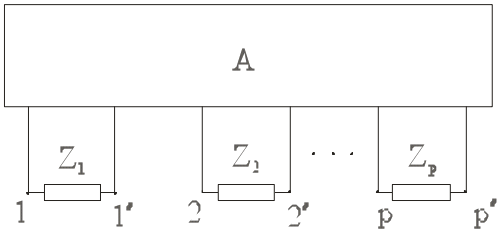
4.3. Натоварен активен многополюсник

Разглежда се активен $2p$ - полюсник, към изходите на който са включени товари със съпротивления $Z_1, Z_2, ..., Z_p$ (фиг.4.3.1). В такъв случай в системата уравнения на многополюсника: $\dot{\underline{U}}_{вх} = \underline{Z}\dot{\underline{I}}_{вх} + \dot{\underline{U}}_{вх0}$ (вж. формула (4.2.10)) се полага:

$$\dot{\underline{U}}_{вх} = -\underline{Z}_T\dot{\underline{I}}_{вх} , \qquad (4.3.1.)$$

където $\underline{Z}_T = \mathrm{diag}\,[Z_1, Z_2, ..., Z_P]$ е диагоналната матрица на товарните съпротивления.

Отрицателният знак в израз (4.3.1) отчита еднаквите посоки на тока и напрежението в товара (вж. фиг.4.1.1).



Фиг.4.3.1

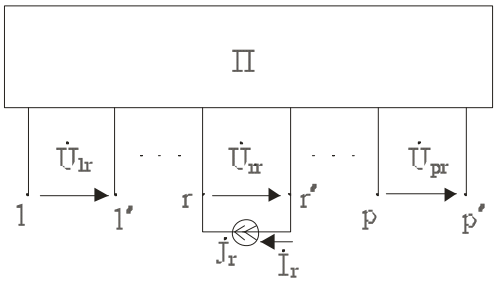
От формули (4.2.10) и (4.3.1) се записва:

$$-\underline{Z}_T\dot{\underline{I}}_{вх} = \underline{Z}\dot{\underline{I}}_{вх} + \dot{\underline{U}}_{вх0} \ . \qquad (4.3.2)$$

От последния израз се получава:

$$\underline{\dot{I}}_{вх} = -(\underline{Z}_T + \underline{Z})^{-1}.\underline{\dot{U}}_{вх0}. \qquad (4.3.3)$$

Формула (4.3.3) представлява обобщение на теоремата на Тевенен за активен многополюсник.



Фиг.4.3.2

Както бе споменато в 4.2, векторът $\underline{\dot{U}}_{вх0}$ се определя като се намерят изходните напрежения $\dot{U}_{10}, \dot{U}_{20}, ..., \dot{U}_{P0}$ на активния многополюсник при едновременно прекъсване на всичките му изходи. Елементите на квадратната матрица $\underline{Z}$ съвпадат със Z - параметрите на многополюсника. Те могат да се изчислят или да се измерят при условие, че към една двойка изводи, например r и r', се включи идеален източник на ток $\dot{J}_r = \dot{I}_r$, а всички останали изходи на съответния пасивен многополюсник се прекъснат (фиг.4.3.2).

Търсят се напреженията $\dot{U}_{lr}$ на отделните изходи на многополюсника под влиянието на единствения енергиен източник $\dot{J}_r$. Тогава за елементите Z_{lr} на матрицата $\underline{Z}$ се получава:

$$Z_{lr} = \dot{U}_{lr}/\dot{I}_r \text{ за } l = 1, 2, ..., p.$$

За да се определят елементите на останалите колони на матрицата $\underline{Z}$ тази процедура се повтаря p пъти, като всеки път идеалният източник на ток се включва към друг изход, т.е. индексът r се мени от 1 до p.

Матричното уравнение (4.3.3) позволява да се изчислят част от токовете на сложна електрическа верига. За целта тя се представя като натоварен активен многополюсник.

Аналогични резултати могат да се получат и въз основа на Y - системата уравнения: $\underline{\dot{I}}_{вх} = \underline{Y}.\underline{\dot{U}}_{вх} + \underline{\dot{I}}_{вхК}$ (вж. формула (4.2.13)).

За целта се полага:

$$\underline{\dot{I}}_{вх} = -\underline{Y}_T \underline{\dot{U}}_{вх} \ , \qquad (4.3.4)$$

където $\underline{Y}_T = \text{diag}[Y_1, Y_2, ..., Y_p]$ е диагоналната матрица на товарните проводимости.

От формули (4.2.13) и (4.3.4) се записва:

$$-\underline{Y}_T \underline{\dot{U}}_{вх} = \underline{Y}\underline{\dot{U}}_{вх} + \underline{\dot{I}}_{вхК} \ . \qquad (4.3.5)$$

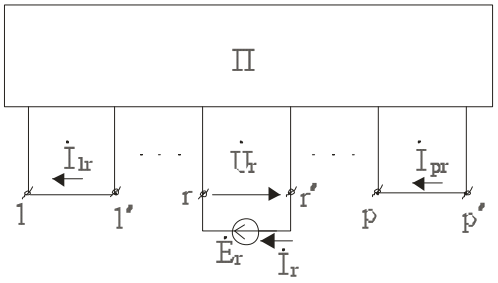
От последния израз се получава:

$$\underline{\dot{U}}_{вх} = -(\underline{Y}_T + \underline{Y})^{-1} \underline{\dot{I}}_{вхК}. \qquad (4.3.6)$$

Формула (4.3.6) представлява обобщение на теоремата на Нортон за активен многополюсник.

Както бе споменато 4.2, векторът $\dot{I}_{вхк}$ се определя като се намерят изходните токове $\dot{I}_{1K}, \dot{I}_{2K}, ..., \dot{I}_{PK}$ на активния многополюсник при едновременно късо съединение на всичките му изходи.

Аналитичното или опитното определяне на Y - параметрите на многополюсника се извършва, като към една двойка изводи, например r и r', се включи идеален източник на ЕДН $\dot{E}_r = \dot{U}_r$. Всички останали изводи на пасивния многополюсник, получен от активния многополюсник чрез отстраняване на действието на вътрешните му независими енергийни източници, се дават накъсо (фиг.4.3.3).



Фиг.4.3.3

За елементите на матрицата $\underline{Y}$ се записва:

$Y_{lr} = \dot{I}_{lr} / \dot{U}_r$ за $l = 1, 2, \ldots, p$, където $\dot{I}_{lr}$ са токовете в различните изходи на многополюсника под действието на единствения енергиен източник $\dot{E}_r$.

За определяне на елементите на останалите колони на матрицата Y горната процедура се осъществява p пъти. При това идеалният източник на ЕДН всеки път се включва към друг изход, т.е. индексът r се изменя от 1 до p.

Ако многополюсникът удовлетворява принципа на взаимността, съответните взаимни параметри са равни, т.е.:

$Z_{lr} = Z_{rl}$ и $Y_{lr} = Y_{rl}$.

Тогава общият брой N_p на търсените елементи на матриците $\underline{Z}$ и $\underline{Y}$ е: $N_p = (p^2 - p)/2 + p = p(1 + p)/2$.

Матричното уравнение (4.3.6) позволява да се намерят част от напреженията в отделните клонове на сложна електрическа верига, представена като подходящ активен многополюсник.

V. ЕЛЕКТРИЧЕСКИ ВЕРИГИ С РАЗПРЕДЕЛЕНИ ПАРАМЕТРИ

Встъпителни бележки

В раздела се дават основни понятия и класификации на електрически вериги с разпределени параметри. Разглеждат се установени синусоидални режими в еднородна двупроводна линия и в линия без загуби. В раздела се разглеждат също и преходни процеси в неизкривяваща линия, както и процесите на пречупване и отражение на вълните в мястото на свързване на две линии и от края на линията в зависимост от товара й.

5.1. Електрически вериги с разпределени параметри – основни понятия и класификации. Опростена теория

А) Електрически вериги с разпределени параметри – основни понятия

Електрическите вериги, в които електрическото поле, магнитното поле и загубите на енергия за необратими процеси са разпределени равномерно или неравномерно по протежение на всичките участъци на веригата, се наричат вериги с разпределени параметри. При тях токът и напрежението зависят не само от времето, но и от пространствената координата.

Дали дадена верига ще се разглежда като верига със съсредоточени или като верига с разпределени параметри зависи както от дължината на участъците й, така и от честотата на разпространяващите се по нея сигнали. Ако се приеме, че електромагнитното поле се разпространява със скорост, равна на скоростта на светлината в пустота $c = 3{,}10^8$ m/s и дължината на участък от линията е например $l = 30$ m, то при сигнал с честота $f = 50$ Hz, дължината на разпространяващите се електромагнитни вълни по линията ще бъде $\lambda = c/f = 3.10^8/50 = 6.10^6$ m. В този случай няма да се забелязва вълнообразното разпределение на тока i и напрежението u по линията и може да се приеме, че напрежението и токът в началото на линията и в нейния край са съответно равни. Такава линия (електрическа верига) се разглежда като верига със съсредоточени параметри. Но ако разпространяващият се по линията сигнал е с честота $f = 10^{10}$ Hz, то тогава дължината на вълната λ ще бъде $\lambda = 3.10^8/10^{10} = 3.10^{-2}$ m. В този случай по линията ще се разположат $30/(3.10^{-2}) = 1000$ вълни, т.е. вълнообразното разпределение на напрежението и тока по линията не може да не бъде забелязано. Тогава тази линия се разглежда като верига с разпределени параметри. Оттук следва и другото определение за електрическите вериги с разпределени параметри, т.е. това са такива вериги, при които интервалът от време, за който електромагнитната вълна се разпространява по линията е съизмерим с интервала от време, през който се получава значително изменение на тока и напрежението й.

Към електрическите вериги с разпределени параметри се отнасят дългите линии за предаване на електрическа енергия, линиите за телефонна и телеграфна връзка, намотките на електрическите машини и трансформаторите, линиите за телеконтрол и телеуправление, антените на радиопредавателите и радиоприемниците и др.

Най-голямо значение сред веригите с разпределени параметри имат предавателните линии.

Б) Класификация на предавателните линии

Те се наричат още дълги линии.

I класификация – Тя е във връзка с предназначението на линиите и според което те се разделят на две групи: линии за предаване на енергия и линии за предаване на

информация.

1. Линии за предаване на електрическа енергия (електропроводи)

Те свързват източниците на електрическа енергия (електрически станции и подстанции) с потребителите (консуматорите) на тази енергия (градове, заводи, жилищни домове и др.).

При проектирането, монтажа и експлоатацията на тези линии има стремеж преди всичко електрическата енергия да се предава с възможно най-малки загуби, т.е. с висок к.п.д. По тези линии електрическата енергия се предава посредством синусоидален ток с промишлена честота (50 Hz или 60 Hz) или чрез постоянен ток.

2. Линии за предаване на информация

Към тях се отнасят телеграфните и телефонните линии, линиите за телеконтрол, телеуправление и телесигнализация. При тези линии предаването на информацията става чрез електрически сигнали с разнообразна форма. Те трябва да са изработени така, че да не внасят изкривявания и смущения в предаваните по тях сигнали.

II класификация - Тя е във връзка с конструкцията на линиите, според която те се разделят на въздушни и кабелни.

1. Въздушните линии са проводници без изолация, които са окачени посредством изолатори на метални или циментови стълбове.

2. Кабелните линии са изолирани проводници, които се поставят под водата или под земята. Те често имат метална екранировка.

III класификация – Според тази класификация линиите се разделят на еднородни и неоднородни.

При еднородните линии електрическото и магнитното полета, както и загубите на енергия за необходимите процеси, са разпределени равномерно по протежение на всички участъци на линията. При неоднородните линии това разпределение е неравномерно.

В) Опростена теория

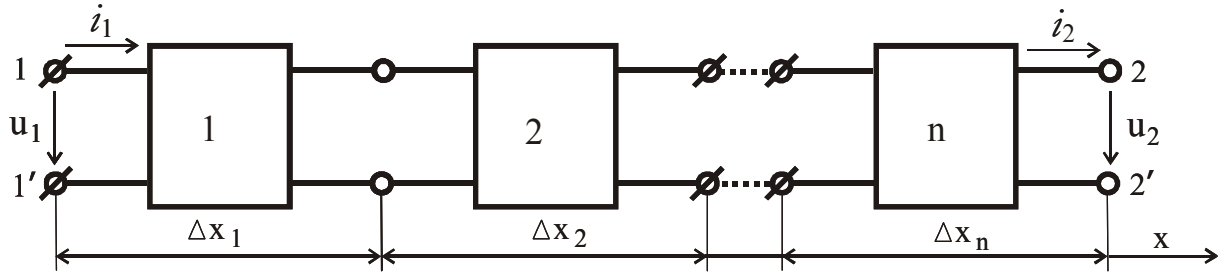
Тъй като електрическото поле и магнитното поле са разпределени, както около проводниците, така и вътре в тях, то при изследването на процесите в линиите би трябвало да бъде използувана теорията на електромагнитното поле (ЕМП). Предаването на електрическа енергия или сигнали би следвало да се разглежда като разпространение на електромагнитни вълни с различни стойности на интензитетите на електрическото и магнитното полета в различни точки на напречното сечение на линиите, отчитайки при това крайната скорост на движението на вълните по линиите. От гледна точка на теорията на ЕМП предавателната линия трябва да се разглежда като една насочваща система, която осигурява предаването на енергията на електромагнитните вълни (ЕМВ) в дадена посока. Основният поток от енергия се предава по посока на линията между проводниците, а само една незначителна част от тази енергия прониква в тях. Тя обикновено се преобразува в топлина в проводниците и в неидеалната им изолация. Да се изследват процесите в линиите с помощта на теорията на ЕМП с много сложна задача. Ето защо тази теория не винаги се използува.

По-често се прибягва към така наречената опростена теория. Тя се основава на използуването на понятията напрежение, ток, съпротивление, индуктивност, капацитет.

Използуването на тази теория е възможно, когато се спазва условието разстоянието между проводниците да е много по-малко от дължината на електромагнитните колебания между проводниците. В този случай прилагането й е с достатъчна точност за проектирането и експлоатацията на линиите.

5.2. Диференциални уравнения на еднородна линия

Непрекъснатият характер на ЕМП по линиите налага от своя страна елементите, които отразяват неговите прояви (бобини и кондензатори), както и необратимото преобразуване на електромагнитната енергия (резисторни елементи) също да се отразяват в модела на линията чрез еквивалентно непрекъснато разпределение на параметрите съпротивление R , индуктивност L и капацитет C.



фиг. 5.2.1

Ако линията е нееднородна, то тя може да се разбие на еднородни участъци. Токовете и напреженията по линията (веригата с разпределени параметри) са функция на времето и пространствената координата x, която се отчита по протежение на линията. Всяка една дълга линия може да се разбие на безкраен брой елементи с безкрайно малка дължина, които са свързани помежду си каскадно (фиг.5.2.1).

В техническите устройства случаите на еднородни линии са предимно такива, при които елементите (1, 2, …, n) имат еднаква вътрешна топологична структура, но параметрите им се изменят по определен закон в направлението x.

В общия случай структурата и параметрите на един произволен елемент от еднородна линия, който се намира на разстояние x от началото й и има дължина dx ($n \to \infty$), са показани на фиг.5.2.1. Всеки елемент (елементарен участък) с дължина dx има индуктивност $L_0.dx$, съпротивление $R_0.dx$, капацитет $C_0.dx$ и активна проводимост $G_0.dx$. Тук L_0, R_0, C_0, G_0 са параметрите на еднородната линия за единица дължина и се наричат първични параметри на линията.

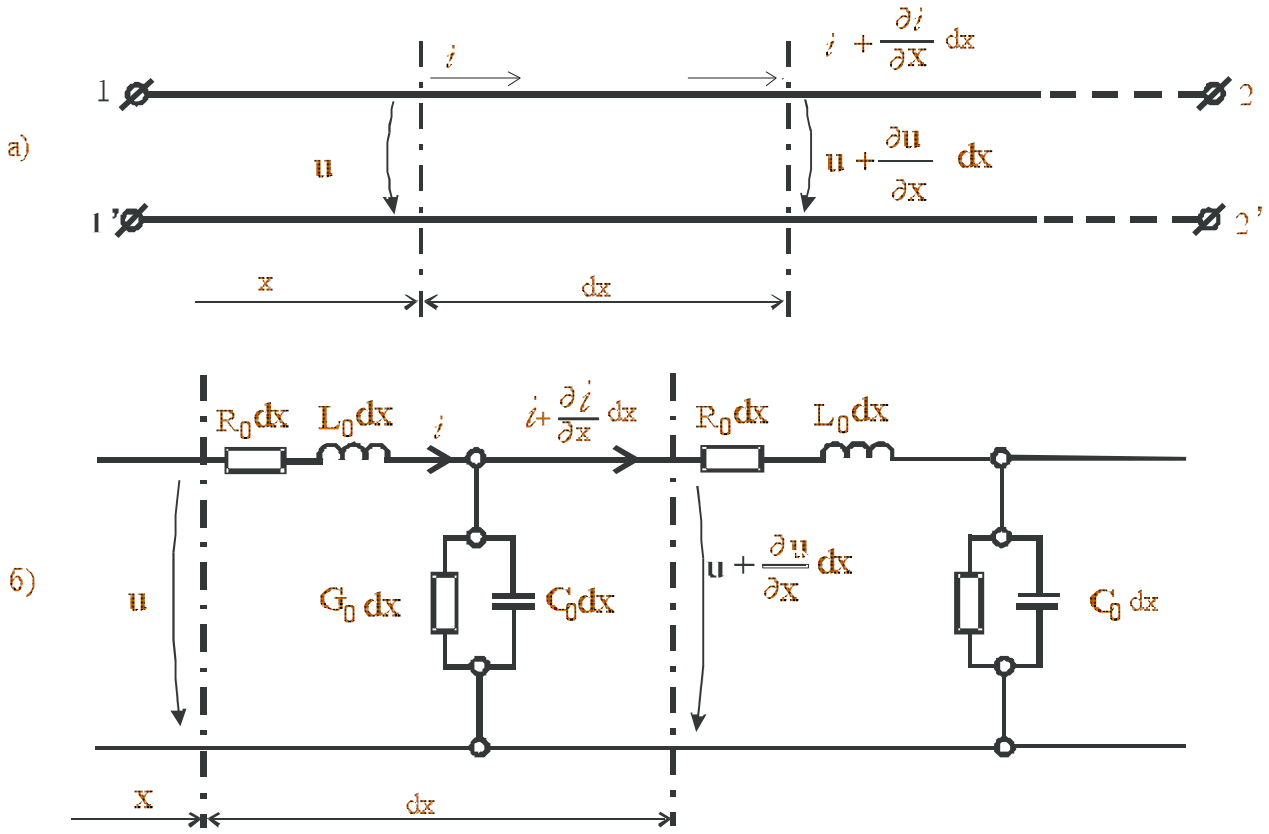
Напрежението и токът в началото на участъка с дължина dx са u и i, а в края му - $u + \frac{\partial u}{\partial x}dx$ и $i + \frac{\partial i}{\partial x}dx$.

За всеки елементарен участък са валидни основните закони за електрическите вериги. Това дава възможност да се съставят необходимите и достатъчни уравнения за анализ на процесите в еднородната линия при използуване на интегралните величини ток и напрежение.

Така съответно по втория и първия закони на Кирхоф за веригата от фиг.5.2.2б се съставя системата уравнения:

$$\begin{cases} u = u + \frac{\partial u}{\partial x}dx + R_0 dx.i + L_0 dx\frac{\partial i}{\partial x}; \\ i = i + \frac{\partial i}{\partial x}dx + G_0 dx\left(u + \frac{\partial u}{\partial x}dx\right) + C_0 dx\left(u + \frac{\partial u}{\partial x}dx\right). \end{cases} \qquad (5.2.1)$$

След пренебрегване на безкрайно малките величини от втори ред [$(dx)^2$] и след елементарни преобразувания се достига до системата уравнения:



фиг. 5.2.2

$$\begin{cases} -\dfrac{\partial u}{\partial x} = R_0 i + L_0 \dfrac{\partial i}{\partial t}; \\ -\dfrac{\partial i}{\partial x} = G_0 u + C_0 \dfrac{\partial u}{\partial t}. \end{cases} \qquad (5.2.2)$$

Тези уравнения се наричат телеграфни уравнения на еднородна линия, тъй като са били приложени за първи път при изследването на телеграфните линии.

Очевидно е, че уравненията на система (5.2.2) са линейни диференциални уравнения с постоянни коефициенти. Решението й при отчитане на началните и гранични условия дава търсените зависимости $u = u(x,t)$ и $i = i(x,t)$.

В общия случай за n - проводна линия, разположена във въздуха над повърхността на земята, за всеки от проводниците е необходимо в първото уравнение на система (5.2.2) да се отчетат още напреженията на взаимоиндукцията от токовете в останалите проводници, а във второто й уравнение –токовете на проводимост и разместване между разглеждания проводник и всички останали проводници. Така се получава следната система от $2n$ уравнения:

$$\begin{cases} -\dfrac{\partial u_к}{\partial x} = R_{0к} i_к + L_{0к} \dfrac{\partial i_к}{\partial t} + \sum\limits_{\substack{m=1 \\ m\neq к}}^{m=n} M_{0км} \dfrac{\partial i_m}{\partial t}; \\ -\dfrac{\partial i_к}{\partial x} = G_{0к} u_к + C_{0к} \dfrac{\partial u_к}{\partial t} + \sum\limits_{\substack{m=1 \\ m\neq к}}^{m=n} G_{0км}(u_к - u_m) + \sum\limits_{\substack{m=1 \\ m\neq к}}^{m=n} C_{0км} \dfrac{\partial(u_к - u_m)}{\partial t}, \end{cases} \qquad (5.2.3)$$

където $\kappa = 1 \ldots n$ е номерът на проводника;

$R_{0\kappa}$, $L_{0\kappa}$, $G_{0\kappa}$, $C_{0\kappa}$ – собствените параметри на $\kappa^{\text{-тия}}$ проводник с отчитане влиянието на земята;

$G_{0\kappa m}$, $M_{0\kappa m}$, $C_{0\kappa m}$ – взаимната проводимост, индуктивност и капацитет между $\kappa^{\text{-тия}}$ и $m^{\text{-тия}}$ проводник с отчитане влиянието на земята.

Разглеждането на частния случай – двупроводна линия представлява интерес не само защото той е най-простият случай, позволяващ най-нагледно да се покажат основните особености на процесите във веригите с разпределени параметри, но и поради това, че в много от случаите трифазната линия може да бъде заменена с еквивалентна на нея еднофазна двупроводна линия.

5.3. Установен синусоидален процес в еднородна двупроводна линия

Известно е че, всяка периодична функция на времето, която удовлетворява условията на Дирихле, може да бъде разложена в ред на Фурие. В общия случай този ред съдържа постоянна съставка, първи (основен) хармоник с честота f, равна на реципрочната стойност на периода T на периодичната функция и висши хармоници. Влиянието на всяка една от съставките (хармониците) може да се разглежда като влияние на отделна синусоида. Крайният резултат на входните въздействия се получава чрез наслагване на резултатите от въздействията на отделните хармоници. Ето защо е целесъобразно да се разглежда подробно установеният синусоидален процес в еднородна двупроводна линия.

Ако еднородната линия се захранва със синусоидално напрежение с честота $\omega = 2\pi f$, то токовете и напреженията във всеки един неин участък ще бъдат също синусоидални със същата честота ω. Затова за решаването на системата уравнения (5.2.2) може да бъде използуван комплексният метод. Тъй като комплексните ефективни стойности на напрежението $\dot{U}(x)$ $u(x,t)$ и на тока $\dot{I}(x)$ $i(x,t)$ са функция само на пространствената координата x, а операцията диференциране по отношение на времето при оригиналите (функциите на времето) се заменя с умножение на $j\omega$ при техните комплексни образи, то системата частни диференциални уравнения (5.2.2) се преобразува в система обикновени диференциални уравнения за $\dot{U}(x)$ и $\dot{I}(x)$ и има вида:

$$\begin{cases} -\dfrac{d\dot{U}}{dx} = R_0 \dot{I} + j\omega L_0 \dot{I} = Z_0 \dot{I}; \\ -\dfrac{d\dot{I}}{dx} = G_0 \dot{U} + j\omega C_0 \dot{U} = Y_0 \dot{U}. \end{cases} \qquad (5.3.1)$$

Диференцира се първото уравнение на система (5.3.1) по отношение на x, след което $\dfrac{d\dot{I}}{dx}$ в новополученото уравнение се заменя с неговото равно от второто уравнение на система (5.3.1), при което се получава:

$$-\frac{d^2\dot{U}}{dx^2} = (R_0 + j\omega L_0)\frac{d\dot{I}}{dx} = (R_0 + j\omega L_0)(G_0 + j\omega C_0)(-\dot{U}) \qquad (5.3.2)$$

или

$$\frac{d^2\dot{U}}{dx^2} - \gamma^2\dot{U} = 0, \qquad (5.3.3)$$

където:

$$\gamma = \sqrt{Z_0 Y_0} = \sqrt{(R_0 + j\omega L_0)(G_0 + j\omega C_0)}. \qquad (5.3.4)$$

Общото решение на уравнение (5.3.3) е от вида:

$$\dot{U} = A_1 e^{-\gamma x} + A_2 e^{\gamma x}, \qquad (5.3.5)$$

където $\dot{U} = \dot{U}(x)$ е комплексната ефективна стойност на напрежението в точка, намираща се на разстояние x от началото на линията;

-γ и γ - корените на характеристичното уравнение $p^2 - \gamma^2 = 0$ на диференциалното уравнение (5.3.3);

- A_1 и A_2 – интеграционните константи.

Уравнение (5.3.5) се диференцира по отношение на x и се получава:

$$\frac{d\dot{U}}{dx} = -\gamma A_1 e^{-\gamma x} + \gamma A_2 e^{\gamma x}. \qquad (5.3.6)$$

След като $\frac{d\dot{U}}{dx}$ от уравнение (5.3.6) се замести в уравнение (5.3.1), за комплексната ефективна стойностна тока $\dot{I} = \dot{I}(x)$ в коя да е точка, намираща се на разстояние x от началото на линията, се записва:

$$\dot{I} = \sqrt{\frac{Y_0}{Z_0}}\left(A_1 e^{-\gamma x} - A_2 e^{\gamma x}\right) \qquad (5.3.7)$$

или

$$\dot{I} = \frac{1}{Z_c}\left(A_1 e^{-\gamma x} - A_2 e^{\gamma x}\right); \qquad (5.3.8)$$

където:

$$Z_c = \sqrt{\frac{Z_0}{Y_0}} = \sqrt{\frac{R_0 + j\omega L_0}{G_0 + j\omega C_0}}. \qquad (5.3.9)$$

Величината Z_c се нарича вълново или характеристично съпротивление на линията.

Величината $\gamma = \alpha + j\beta$ (вж. уравнение (5.3.5)) – коефициент или константа на разпространение на вълната по линията.

Величините Z_c и γ определят напълно режима на движение на вълните по линията. Те зависят от първичните й параметри (R_0, L_0, G_0, C_0) и от честотата ω. Ето защо Z_c и γ се наричат вторични параметри на линията.

Ако Z_0 и Y_0 се запишат във вида: $Z_0 = z_0 e^{j\psi'}$ и $Y_0 = y_0 e^{j\psi''}$, то тогава :

$$\gamma = \sqrt{Z_0 Y_0} = \sqrt{z_0 y_0 e^{j(\psi' + \psi'')}} = \sqrt{z_0 y_0}\, e^{j\left(\frac{\psi' + \psi''}{2}\right)} = \qquad (5.3.10)$$
$$= \sqrt{z_0 y_0}\, e^{j\theta} = \sqrt{z_0 y_0}\cos\theta + j\sqrt{z_0 y_0}\sin\theta = \alpha + j\beta.$$

Като се има предвид, че $0 < \psi' < \pi/2$ и $0 < \psi'' < \pi/2$, то за $\theta = \frac{\psi' + \psi''}{2}$ ще бъде изпълнено условието: $0 < \theta < \pi/2$.

Следователно $\alpha = \cos\theta$ и $\beta = \sin\theta$ са положителни величини.

Величината γ има размерност на реципрочна стойност на мярка за дължина.

Величината $\alpha = \mathrm{Re}[\gamma]$ се нарича коефициент на затихване и се измерва в непери на единица дължина.

Величината $\beta = \mathrm{Im}[\gamma]$ се нарича коефициент на фазата и се измерва в радиани на единица дължина.

За определяне на интеграционните константи A_1 и A_2 в уравнения (5.3.5) и (5.3.8) се използуват граничните условия, например напрежението и тока в края на линията, напрежението и тока в началото на линията и т.н.

Ако с $\dot{I}_1$ и $\dot{U}_1$ се означат комплексните ефективни стойности на тока и напрежението в началото на линията, където $x = 0$ и тези стойности се заместят в уравнения (5.3.5) и (5.3.8), то се получава следната система уравнения:

$$\begin{cases} \dot{U}_1 = A_1 + A_2 ; \\ \dot{I}_1 = \dfrac{1}{Z_c}(A_1 - A_2). \end{cases} \qquad (5.3.11)$$

От горната система се намират интеграционните константи A_1 и A_2 чрез входните величини $\dot{I}_1$, $\dot{U}_1$, т.е. :

$$A_1 = \left(\dot{U}_1 + \dot{I}_1 Z_c \right)/2 ; \qquad (5.3.12)$$

$$A_2 = \left(\dot{U}_1 - \dot{I}_1 Z_c \right)/2 . \qquad (5.3.13)$$

Тогава пълните решения за $\dot{U} = \dot{U}(x)$ и $\dot{I} = \dot{I}(x)$ са:

$$\begin{cases} \dot{U}(x) = \left(\dot{U}_1 + \dot{I}_1 Z_c \right) e^{-\gamma x}/2 + \left(\dot{U}_1 - \dot{I}_1 Z_c \right) e^{\gamma x}/2 ; \\ \dot{I}(x) = \left(\dot{U}_1 + \dot{I}_1 Z_c \right) e^{-\gamma x}/2Z_c - \left(\dot{U}_1 - \dot{I}_1 Z_c \right) e^{\gamma x}/2Z_c . \end{cases} \qquad (5.3.14)$$

Като се имат предвид формулите на Ойлер за хиперболичните синуси и косинуси: $\mathrm{sh}\gamma x = \left(e^{\gamma x} - e^{-\gamma x}\right)/2$ и $\mathrm{ch}\gamma x = \left(e^{\gamma x} + e^{-\gamma x}\right)/2$ за $\dot{U}(x)$ и $\dot{I}(x)$, може да се запише:

$$\begin{cases} \dot{U}(x) = \dot{U}_1 \mathrm{ch}\gamma x - \dot{I}_1 Z_c \mathrm{sh}\gamma x ; \\ \dot{I}(x) = \dot{I}_1 \mathrm{ch}\gamma x - \dfrac{\dot{U}_1}{Z_c} \mathrm{sh}\gamma x . \end{cases} \qquad (5.3.15)$$

Ако линията има дължина l и в система уравнения (5.3.15) x се замени с l , то ще се получат комплексните ефективни стойности $\dot{U}(x = l) = \dot{U}_2$ и $\dot{I}(x = l) = \dot{I}_2$ на напрежението и тока в края на линията :

$$\begin{cases} \dot{U}_2 = \dot{U}_1 \operatorname{ch}\gamma l - \dot{I}_1 Z_c \operatorname{sh}\gamma l ; \\ \dot{I}_2 = \dot{I}_1 \operatorname{ch}\gamma l - \dfrac{\dot{U}_1}{Z_c} \operatorname{sh}\gamma l . \end{cases} \qquad (5.3.16)$$

Ако от система уравнения (5.3.16) се изразят $\dot{I}_1$ и $\dot{U}_1$, се получава:

$$\begin{cases} \dot{U}_1 = \dot{U}_2 \operatorname{ch}\gamma l + \dot{I}_2 Z_c \operatorname{sh}\gamma l ; \\ \dot{I}_1 = \dfrac{\dot{U}_2}{Z_c} \operatorname{sh}\gamma l + \dot{I}_2 \operatorname{ch}\gamma l . \end{cases} \qquad (5.3.17)$$

Последната система уравнения е на симетричен четириполюсник със следните A - параметри:

$A = D = \operatorname{ch}\gamma l$; $B = Z_c \operatorname{sh}\gamma l$; $C = \operatorname{sh}\gamma l / Z_c$.

За всеки четириполюсник е валидно равенството: $AD - BC = \operatorname{ch}^2\gamma l - \operatorname{sh}^2\gamma l = 1$.

От горните равенства може да се направи заключение, че еднородната двупроводна линия може да се разглежда като симетричен четириполюсник ($A = D$) и може да се заменя с T - или П - образна заместваща схема на четириполюсник.

5.4. Бягащи вълни

Разглежда се първото уравнение на система (5.3.15) и се въвеждат следните означения:

$$\dot{U}' = (\dot{U}_1 + \dot{I}_1 Z_c) e^{-\gamma x} / 2 = \dot{U}'_1 e^{-\gamma x} = U'_1 e^{j\psi_1} e^{-(\alpha + j\beta)x} = U'_1 e^{-\alpha x} e^{j(-\beta x + \psi_1)}; \qquad (5.4.1)$$

$$\dot{U}'' = (\dot{U}_1 - \dot{I}_1 Z_c) e^{\gamma x} / 2 = \dot{U}''_1 e^{\gamma x} = U''_1 e^{j\psi_2} e^{(\alpha + j\beta)x} = U''_1 e^{\alpha x} e^{j(\beta x + \psi_2)}, \qquad (5.4.2)$$

т.е. напрежението $\dot{U}$ в коя да е точка, намираща се на разстояние x от началото на линията, е сума от две съставки:

$$\dot{U} = \dot{U}' + \dot{U}'' . \qquad (5.4.3)$$

Ако се разгледа второто уравнение на системата (5.3.15) и се използуват означенията (5.4.1) и (5.4.2) за тока $\dot{I}$ в коя да е точка, намираща се на разстояние x от началото на линията, се получава:

$$\dot{I} = \dot{U}' / Z_c - \dot{U}'' / Z_c = \dot{I}' + \dot{I}'' , \qquad (5.4.4)$$

откъдето, като се знае, че: $Z_c = z_c e^{j\varphi_c}$, то за $\dot{I}'$ и $\dot{I}''$ се записва:

$$\dot{I}' = \dot{U}' / Z_c = U'_1 e^{-\alpha x} e^{j(\psi_1 - \beta x - \varphi_c)} / z_c ; \qquad (5.4.5)$$

$$\dot{I}'' = -\dot{U}'' / Z_c = -U''_1 e^{\alpha x} e^{j(\psi_2 + \beta x - \varphi_c)} / z_c . \qquad (5.4.6)$$

Преминава се от комплексни ефективни към моментни стойности на тока и напрежението в коя да е точка x:

$$\dot{U}(x) = \dot{U}' + \dot{U}'' \rightleftharpoons u'(x,t) + u''(x,t) ; \qquad (5.4.7)$$

$$\dot{I}(x) = \dot{I}' + \dot{I}'' \rightleftharpoons i'(x,t) + i''(x,t) , \qquad (5.4.8)$$

където съответните съставки на $u(x,t)$ и $i(x,t)$ са равни на :

$$u'(x,t) = \sqrt{2}U_1' e^{-\alpha x} \sin(\omega t - \beta x + \psi_1); \quad (5.4.9)$$

$$u''(x,t) = \sqrt{2}U_1'' e^{\alpha x} \sin(\omega t + \beta x + \psi_2); \quad (5.4.10)$$

$$i'(x,t) = \sqrt{2}U_1' e^{-\alpha x} \sin(\omega t - \beta x + \psi_1 - \varphi_c)/z_c; \quad (5.4.11)$$

$$i''(x,t) = \sqrt{2}U_1'' e^{\alpha x} \sin(\omega t + \beta x + \psi_2 - \varphi_c)/z_c. \quad (5.4.12)$$

Ако се разгледа израз (5.4.9), може да се установи, че съставката u' се изменя по синусоидален закон по отношение на времето t и разстоянието x. И действително, при $x = \text{const}$, т.е. в дадена точка от линията напрежението u' е синусоидална функция на времето. Ако $\alpha = 0$ и следователно $e^{-\alpha x} = 1$ и се положи $t = \text{const}$, т.е. в даден момент от времето t, то може да се констатира, че напрежението u' е разпределено по линията по синусоидален закон. Фазата на това синусоидално колебание на тази вълна се дава от израза: $\omega t + \psi_1 - \beta x$. Тази вълна се премества по линията и за време Δt изминава път Δx. Ако при това движение на вълната фазата й се запази постоянна, то тогава следва, че е валидно равенството:

$$\omega t + \psi_1 - \beta x = \omega(t + \Delta t) + \psi_1 - \beta(x + \Delta x). \quad (5.4.13)$$

От горното уравнение се намира:

$$v_\phi = \Delta x / \Delta t = \omega / \beta. \quad (5.4.14)$$

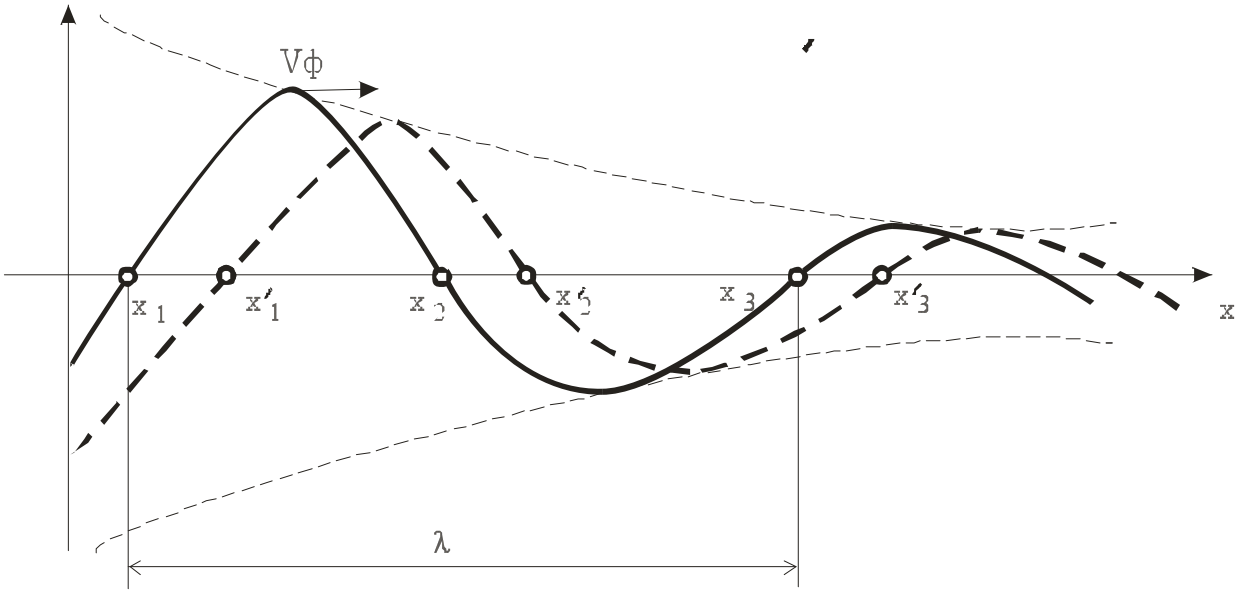
Величината v_ϕ се нарича фазова скорост на разпространение на електромагнитната вълна. При движението на вълната по линията с тази скорост, фазата й се запазва постоянна. И действително:

$$x = x_0 + v_\phi t, \quad (5.4.15)$$

при което:

$$\sin(\omega t + \psi_1 - \beta x) = \sin(\omega t + \psi_1 - \beta x_0 - \beta v_\phi t) = \sin(\psi_1 - \beta x_0) = \text{const}. \quad (5.4.16)$$

Следователно напрежението в даден момент от време в произволна точка x ще остава неизменно, ако точката се премества по линията със скорост $v_\phi = \omega / \beta$. Това преместващо се вълнообразно разпределено напрежение, се нарича бягаща вълна. При $\alpha > 0$ наличието на множител $e^{-\alpha x}$ показва, че амплитудата на вълната в посоката на предвижването й намалява по експоненциален закон и че разпределението на



фиг. 5.4.1

напрежението й по линията във всеки момент от време може да се изобрази посредством синусоида, с намаляваща по експоненциален закон амплитуда, която е показана на фиг.5.4.1. Ето защо коефициентът α се нарича коефициент на затихване.

Тъй като фазата на напрежението се изменя при изменение на x, то коефициентът β, характеризиращ това изменение, се нарича коефициент на фазата. Затова коефициентът γ, чиято реална част е α, а имагинерната му част е β, се нарича коефициент или константа на разпространение на вълната по линията.

На фиг.5.4.1. е показана вълна, която за време Δt се е преместила на разстояние $\Delta x = x_1' - x_1$. При преместването на вълната от началото към края на линията, амплитудата й се намалява по експоненциален закон от началото на линията към края й.

Чрез аналогични разсъждения върху израз (5.4.10) може да се достигне до заключението, че напрежението u'' е също бягаща вълна. Наличието на множителя $e^{\alpha x}$ в израза за u'' показва, че амплитудата на тази вълна расте от началото към края на линията по експоненциален закон. Освен това в аргумента на u'' знакът пред βx е положителен за разлика от случая при аргумента на напрежението u'. Това означава, че фазовата скорост на тази вълна е $v_\phi = -\omega/\beta$, т.е. тя се движи с отрицателна скорост спрямо вълната u', или още, че посоката на движение на вълната u'' е от края към началото на линията. Затова вълната u' се нарича права вълна, а вълната u'' - обратна.

Ако се разгледат уравнения (5.4.11) и (5.4.12), може да се установи, че i' и i'' са съответно правата и обратна вълна на тока. Освен това може да се заключи, че тези вълни имат z_c пъти по-малки амплитуди от вълните на напрежението u' и u'' и изостават от тях на ъгъл φ_c, тъй като в общия случай вълновото съпротивление $Z_c = z_c e^{j\varphi_c}$ е комплексна величина.

Тъй като Z_c представлява коефициент на пропорционалност между правите и съответно обратните вълни на напрежението и тока (вж. уравнения (5.4.5) и (5.4.6)), то Z_c е наречено вълново съпротивление.

Правата и обратната вълни освен с фазова скорост се характеризират и с дължина на вълната λ. Величината λ може да се разглежда като разстоянието между две най-близки точки на вълната, фазите на които се различават с 2π (точки x_1, x_3, x_5 и т.н.). Тя може да се дефинира и като път, който изминава вълната за време, равно на един период T на нейното изменение:

$$\lambda = v_\phi T = (\omega/\beta)T = (2\pi/\beta T)T = 2\pi/\beta . \qquad (5.4.17)$$

Оттук се получава и следната много важна зависимост при линиите:

$$\beta = 2\pi/\lambda . \qquad (5.4.18)$$

Появата на обратна вълна при линиите може да се разглежда и като отражение на правата вълна от края на линията. Затова правите и обратните вълни се наричат още падащи и отразени вълни.

Коефициент на отражение q_u от края на линията се нарича отношението на отразената вълна на напрежението от края на линията $\dot{U}_2''$ към правата вълна на напрежението $\dot{U}_2'$ в края на линията, т.е.:

$$q_u = \dot{U}_2''/\dot{U}_2' . \qquad (5.4.19)$$

Коефициент на отражение по ток q_i от края на линията се нарича отношението на съответните вълни на тока $\dot{I}_2''$ и $\dot{I}_2'$ в края на линията:

$$q_i = \dot{I}_2'' / \dot{I}_2' . \qquad (5.4.20)$$

Коефициентите q_u и q_i могат да се изразят и чрез вълновото съпротивление Z_c и чрез товарното съпротивление Z_T на линията.

Като се знае, че:

$$\dot{U}_2 = \dot{U}_2' + \dot{U}_2'' \qquad (5.4.21)$$

и

$$\dot{I}_2 = \dot{I}_2' + \dot{I}_2'' = \left(\dot{U}_2' / Z_c \right) - \left(\dot{U}_2'' / Z_c \right), \qquad (5.4.22)$$

се получава съотношението:

$$\dot{I}_2 Z_c = \dot{U}_2' - \dot{U}_2'' . \qquad (5.4.23)$$

Сумират се уравнения (5.4.21) и (5.4.23). Тогава се получава:

$$\dot{U}_2' = \left(\dot{U}_2 + \dot{I}_2 Z_c \right) / 2 . \qquad (5.4.24)$$

Чрез изваждане на уравнения (5.4.21) и (5.4.22) и след преобразуване на новополученото уравнение се получава:

$$\dot{U}_2'' = \left(\dot{U}_2 - \dot{I}_2 Z_c \right) / 2 . \qquad (5.4.25)$$

Като се знае, че $\dot{U}_2 = \dot{I}_2 Z_T$, то за коефициента q_u се намира:

$$q_u = (Z_T - Z_c)/(Z_T + Z_c) , \qquad (5.4.26)$$

а за коефициента q_i уравнението е съответно:

$$q_i = \dot{I}_2'' / \dot{I}_2' = \left(-\dot{U}_2'' / Z_c \right) / \left(\dot{U}_2' / Z_c \right) = \left(-\dot{U}_2'' / \dot{U}_2' \right) = -q_u , \qquad (5.4.27)$$

т.е.:

$$q_i = (Z_c - Z_T)/(Z_c + Z_T) . \qquad (5.4.28)$$

При режим на съгласуван товар на линията, т.е.: $Z_T = Z_c$ коефициентите q_u и q_i стават равни на нула. В този случай в линията отсъствуват отразени (обратни) вълни. Тогава във всяка точка от линията отношението на напрежението $\dot{U}(x)$ към тока $\dot{I}(x)$ е равно на вълновото съпротивление.

При режим на празен ход ($Z_T \to \infty$) коефициентите q_u и q_i са съответно:

$$q_u = \lim_{Z_T \to \infty} (Z_T - Z_c)/(Z_T + Z_c) = 1 \qquad (5.4.29)$$

и

$$q_i = -q_u = -1 . \qquad (5.4.30)$$

В този случай отразената $\dot{U}_2''$ и правата $\dot{U}_2'$ вълни на напрежението в края на линията са равни по големина и имат еднакъв знак. Затова $\dot{U}_2 = 2\dot{U}_2' = 2\dot{U}_2''$. Отразената $\dot{I}_2''$ и падащата $\dot{I}_2'$ вълни на тока са равни по големина и противоположни по знак и тогава $\dot{I}_2 = 0$.

При режим на късо съединение ($Z_T = 0$) се получават съответно: $q_u = -1$ и $q_i = +1$, т.е.: $\dot{I}_2 = 2\dot{I}_2' = 2\dot{I}_2''$, а $\dot{U}_2 = 0$.

5.5. Линия без изкривявания

Вълновото съпротивление $Z_c = \sqrt{\frac{R_0 + j\omega L_0}{G_0 + j\omega C_0}}$ и константата на разпространение $\gamma = \sqrt{(R_0 + j\omega L_0)(G_0 + j\omega C_0)}$ зависят от честотата . Затова условията за преминаване на вълните на тока и напрежението по линията за различните честоти се оказват различни. Ако входният сигнал на линията е периодична несинусоидална функция на времето, то на изхода на линията формата на кривата му ще се различава от формата й на входа, тъй като за различните хармоници условията за преминаване по линията са различни. Това ще бъде така и за всички апериодични сигнали, тъй като такива сигнали могат да се представят като непрекъснат честотен спектър с помощта на преобразуването на Фурие и за различните честоти на този спектър условията за преминаване по линията ще бъдат различни.

За линиите за връзка е особено важно създаването на условия, при които да отсъствува изкривяване на формата на предавания сигнал (ток и напрежение). Затова е необходимо вълновото съпротивление Z_c, коефициентът на затихване α и фазовата скорост $v_\phi = \omega/\beta$ да не зависят от честотата ω. Очевидно е, че в този случай коефициентът на фазата β трябва да е линейна функция на честотата ω. Такива условия се изпълняват, ако за първичните параметри на линията R_0, L_0, G_0, C_0 е в сила съотношението:

$$R_0 / L_0 = G_0 / C_0 . \qquad (5.5.1)$$

Уравнение (4.5.1) се нарича условие на Хевисайд или условие за неизкривяваща линия.

Действително, при изпълнението на условие (5.5.1) за Z_c, α и v_Φ се получават следните изрази:

$$Z_c = \sqrt{\frac{R_0 + j\omega L_0}{G_0 + j\omega C_0}} = \sqrt{\frac{L_0\left(\frac{R_0}{L_0} + j\omega\right)}{C_0\left(\frac{G_0}{C_0} + j\omega\right)}} = \sqrt{\frac{L_0}{C_0}}; \qquad (5.5.2)$$

$$\gamma = \sqrt{(R_0 + j\omega L_0)(G_0 + j\omega C_0)} = \sqrt{L_0 C_0\left(\frac{R_0}{L_0} + j\omega\right)\left(\frac{G_0}{C_0} + j\omega\right)} =$$

$$= L_0 C_0\left(\frac{R_0}{L_0} + j\omega\right) = \sqrt{R_0 G_0} + j\omega\sqrt{L_0 C_0} = \alpha + j\beta \qquad (5.5.3)$$

и следователно:

$$\alpha = \sqrt{R_0 G_0}\ ; \qquad (5.5.4)$$

$$\beta = \omega\sqrt{L_0 C_0}\ ; \qquad (5.5.5)$$

$$v_ф = \omega/\beta = 1/\sqrt{L_0 C_0}\ , \qquad (5.5.6)$$

т.е. Z_c, α и $v_ф$ действително не зависят от честотата ω.

Може да се докаже, че при изпълнение на условие (5.5.1) коефициентите на затихване α и на фазата β имат минимални стойности, т.е.:

$$\alpha_{min} = \sqrt{R_0 G_0} \text{ и } \beta_{min} = \omega\sqrt{L_0 C_0}\ .$$

Съответно при това фазовата скорост $v_ф$ има максимална стойност $v_{фмах} = 1/\sqrt{L_0 C_0}$ и е равна на скоростта на разпространение на електромагнитните вълни в диелектрика, заобикалящ проводника на линията. За въздушните линии $v_ф \approx c = 3.10^8$ m/s, а при кабелните линии $v_ф < c$.

Обикновено при линиите се получава следното неравенство:

$$R_0 / L_0 >> G_0 / C_0\ , \qquad (5.5.7)$$

тъй като проводимостта на утечката през изолацията е незначително малка. За да се достигне от (5.5.7) до (5.5.1) може да се варира с всеки един от параметрите R_0, L_0, G_0, C_0.

Увеличението на G_0 е нецелесъобразно. Намаление на R_0 или на C_0 на практика не се прави, защото би било свързано с допълнителна консумация на проводников материал и промени в конструкцията на линиите. Затова в линиите за връзка изкуствено се увеличава индуктивността L_0, като на определени равни разстояние по линията се включват бобини, а при кабелите около проводниците им се навива лента от феромагнитен материал с голяма магнитна проницаемост, така че да се получи следното равенство:

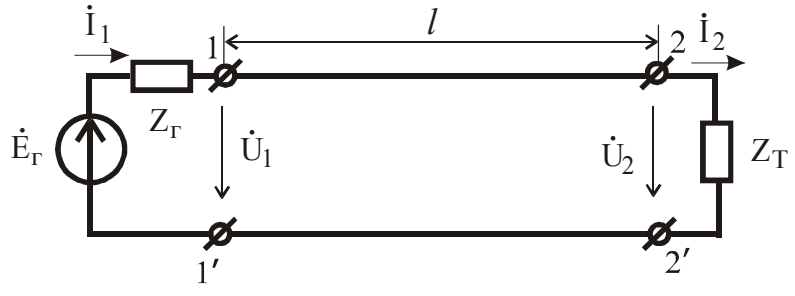
$$R_0 / (L_0 + L_1) = G_0 / C_0\ . \qquad (5.5.8)$$

Увеличаването на индуктивността L_0 чрез добавяне на бобини с индуктивност L_1 не винаги се прави, защото това довежда до намаляване на фазовата скорост:

$$V_Ф = 1/\sqrt{(L_0 + L_1) C_0}\ .$$

За осъществяване на предаване на сигнал без изкривяване освен изпълнението на условие (5.5.1) е необходимо и отсъствие на отразени вълни в край на линията. Затова е необходимо съгласуване на линията с товара ($Z_T = Z_c$). Ако $Z_T \neq Z_c$ е необходимо между линията и товара да се включи съгласуващо устройство. Освен това е необходимо и съгласуване на линията със захранващия източник.

5.6. Режими на работа на еднородна линия



фиг. 5.6.1

На фиг.5.6.1 е показана линия с дължина *l*, в края 2-2′ на която е включен товарът Z_T и където напрежението и тока са $\dot{U}_2$ и $\dot{I}_2$. На входа на линията 1-1′, където напрежението и тока са съответно $\dot{U}_1$ и $\dot{I}_1$ е включен източник на ЕДН $\dot{E}_Г$ с вътрешно съпротивление $Z_Г$.

Режимът на работа на една линия се определя от товарното й съпротивление, т.е. от напрежението $\dot{U}_2$ и тока $\dot{I}_2$ върху товара. Ето защо при изследване на режимите на работа на линията е по-удобно разпределенията на напрежението $\dot{U}(x)$ и на тока $\dot{I}(x)$ да се изразят не чрез входните й напрежение $\dot{U}_1$ и ток $\dot{I}_1$, а чрез изходните й, т.е. чрез $\dot{U}_2$ и $\dot{I}_2$.

Тъй като са зададени напрежението $\dot{U}_2$ и товарното съпротивление Z_T , то и токът в края на линията $\dot{I}_2$ може да бъде определен:

$$\dot{I}_2 = \dot{U}_2 / Z_T , \tag{5.6.1}$$

т.е. режимът в края на линията ($\dot{U}_2, \dot{I}_2$) е известен. В този случай е удобно началото на координатната система $(x = 0)$ да се пренесе в края на линията. Затова в уравнения (5.3.5) и (5.3.8) x се заменя с l - x и тогава се получава:

$$\begin{cases} \dot{U}(x) = A_1 e^{-\gamma(l-x)} + A_2 e^{\gamma(l-x)} ; \\ \dot{I}(x) = \dfrac{A_1}{Z_c} e^{-\gamma(l-x)} - \dfrac{A_2}{Z_c} e^{\gamma(l-x)} . \end{cases} \tag{5.6.2}$$

Въвеждат се означенията $A_1 e^{-\gamma l} = B_1$ и $A_2 e^{\gamma l} = B_2$ и се достига до системата уравнения:

$$\begin{cases} \dot{U}(x) = B_1 e^{\gamma x} + B_2 e^{-\gamma x} ; \\ \dot{I}(x) = \dfrac{B_1}{Z_c} e^{\gamma x} - \dfrac{B_2}{Z_c} e^{-\gamma x} , \end{cases} \tag{5.6.3}$$

където B_1 и B_2 са новите интеграционни константи.

В края на линията $(x = 0)$ са зададени граничните условия $\dot{U} = \dot{U}_2$ и $\dot{I} = \dot{I}_2$, при което от система (5.6.3) се получава : $\dot{U}_2 = B_1 + B_2$ и $\dot{I}_2 = B_1 / Z_c - B_2 / Z_c$. Оттук за интеграционните константи B_1 и B_2 се намират изразите:

$$B_1 = \left(\dot{U}_2 + \dot{I}_2 Z_c \right) / 2 ; \tag{5.6.4}$$

$$B_2 = \left(\dot{U}_2 - \dot{I}_2 Z_c \right) / 2 . \tag{5.6.5}$$

Следователно за $\dot{U}(x)$ и $\dot{I}(x)$ се получава системата уравнения:

$$\begin{cases} \dot{U}(x) = \left(\dot{U}_2 + \dot{I}_2 Z_c \right) e^{\gamma x} / 2 + \left(\dot{U}_2 - \dot{I}_2 Z_c \right) e^{-\gamma x} / 2 ; \\ \dot{I}(x) = \left(\dot{U}_2 + \dot{I}_2 Z_c \right) e^{\gamma x} / 2 Z_c - \left(\dot{U}_2 - \dot{I}_2 Z_c \right) e^{-\gamma x} / 2 Z_c \end{cases} \tag{5.6.6}$$

или в хиперболичен вид:

$$\begin{cases} \dot{U}(x) = \dot{U}_2 \,\mathrm{ch}\gamma x + \dot{I}_2 Z_c \mathrm{sh}\gamma x\,; \\ \dot{I}(x) = \dot{U}_2 \,\mathrm{sh}\gamma x / Z_c + \dot{I}_2 \,\mathrm{ch}\gamma x\,. \end{cases} \qquad (5.6.7)$$

Последните изрази позволяват да бъдат изчислени напрежението $\dot{U}(x)$ и тока $\dot{I}(x)$ в коя да е точка, намираща се на разстояние x от края на линията, при известни напрежение и ток (съпротивление) на товара. При изчисленията по система уравнения (5.6.7) могат да бъдат използувани формулите:

$$\mathrm{ch}(a + jb) = \mathrm{cha}.\cos b + j\mathrm{sha}.\sin b\,;$$
$$\mathrm{sh}(a + jb) = \mathrm{sha}.\cos b + j\mathrm{cha}.\sin b\,;$$
$$\mathrm{th}(a + jb) = (\mathrm{sh}2a + j\sin 2b)/(\mathrm{ch}2a + \cos 2b).$$

Напрежението $\dot{U}_1$ и токът $\dot{I}_1$ в началото на линията се получават от система уравнения (5.6.7) при $x = l$:

$$\begin{cases} \dot{U}_1 = \dot{U}_2 \,\mathrm{ch}\gamma l + \dot{I}_2 Z_c \mathrm{sh}\gamma l\,; \\ \dot{I}_1 = \dot{U}_2 \,\mathrm{sh}\gamma l / Z_c + \dot{I}_2 \,\mathrm{ch}\gamma l\,. \end{cases} \qquad (5.6.8)$$

От система (5.6.8) е очевидно, че при една и съща линия, т.е. при едни и същи вторични параметри на линията (Z_c, γ) и дължина на линията l режимът на захранващият генератор ще зависи от съпротивлението на товара Z_T. В случай на един и същ консуматор, режимът на генератора ще се определя от параметрите на линията и дължината й.

Много важна величина за линиите е тяхното входно съпротивление. Под входно съпротивление на една линия се разбира съпротивлението на такъв двуполюсник, който ако се включи между клемите $1\text{-}1'$ вместо линията, няма да промени режима на работа на захранващият я източник, т.е. $\dot{U}_1$ и $\dot{I}_1$ остават неизменни при тази замяна. Следователно:

$$Z_{вх} = \frac{\dot{U}_1}{\dot{I}_1} = \frac{\dot{U}_2 \,\mathrm{ch}\gamma l + \dot{I}_2 Z_c \mathrm{sh}\gamma l}{\dot{U}_2 \,\mathrm{sh}\gamma l / Z_c + \dot{I}_2 \,\mathrm{ch}\gamma l}. \qquad (5.6.9)$$

Като се знае, че $\dot{U}_2 = \dot{I}_2 Z_T$ след преобразуване на (5.6.9) за $Z_{вх}$ се намира:

$$Z_{вх} = Z_c \frac{Z_T + Z_c \mathrm{th}\gamma l}{Z_c + Z_T \mathrm{th}\gamma l}. \qquad (5.6.10)$$

Уравнение (5.6.10) показва, че входното съпротивление на линията зависи, както от нейните параметри Z_c, γ и от дължината й l, така и от товарното съпротивлението Z_T, включено в края й.

А) Режим на празен ход

Величините във всяка точка в този случай имат индекс “0”. Тъй като при празен ход $Z_T \to \infty$ и $\dot{I}_2 = 0$, то уравненията на линията добиват вида:

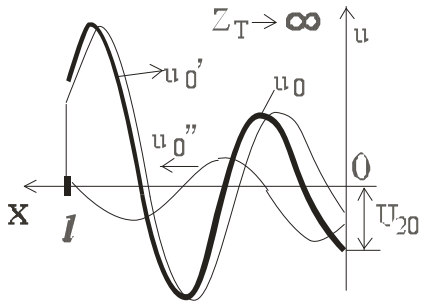
$$\begin{cases} \dot{U}_0 = \dot{U}_{20}\,\mathrm{ch}\gamma x; \\ \dot{I}_0 = \dot{U}_{20}\,\mathrm{sh}\gamma x / Z_c. \end{cases} \qquad (5.6.11)$$

Тогава входното съпротивление на линията ще бъде:

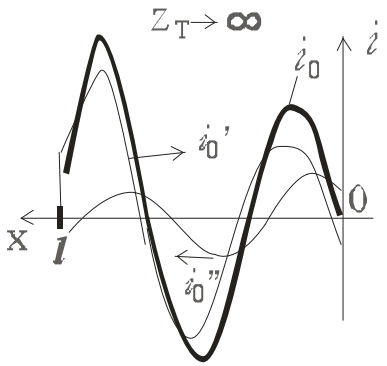
$$Z_{10} = Z_{вх0} = \dot{U}_{10}/\dot{I}_{10} = \dot{U}_{20}\,\mathrm{ch}\gamma l / \left(\dot{U}_{20}\,\mathrm{sh}\gamma l\right) Z_c^{-1}, \qquad (5.6.12)$$

т.е.: $Z_{10} = Z_c / \mathrm{th}\gamma l$. (5.6.13)

На фиг.5.6.2 са показани правата u_0', обратната u_0'' и резултантната вълна u_0 на напрежението, а на фиг.5.6.3 съответно правата i_0', обратната i_0'' и резултантната i_0 вълни на тока при режим на празен ход.



фиг. 5.6.2

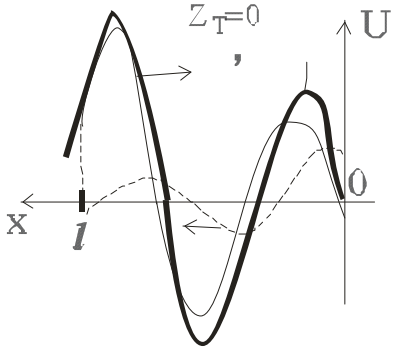


фиг. 5.6.3

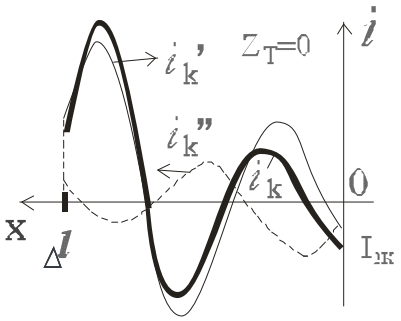
Б) Режим на късо съединение

В този случай на всички величини се поставя индекс “к”. Тъй като при късо съединение $Z_T = 0$ и $\dot{U}_2 = 0$, то уравненията на линията добиват вида:

$$\begin{cases} \dot{U}_к = \dot{I}_{2к} Z_c \mathrm{sh}\gamma x; \\ \dot{I}_к = \dot{I}_{2к}\,\mathrm{ch}\gamma x. \end{cases} \qquad (5.6.14)$$



фиг. 5.6.4



фиг. 5.6.5

За напрежението $\dot{U}_{1к}$ и тока $\dot{I}_{1к}$ на входа се записва:

$$\begin{cases} \dot{U}_{1к} = \dot{I}_{2к} Z_c \mathrm{sh}\gamma l; \\ \dot{I}_{1к} = \dot{I}_{2к}\,\mathrm{ch}\gamma l. \end{cases} \qquad (5.6.15)$$

Тогава за входното съпротивление при режим на късо съединение се получава изразът:

$$Z_{1k} = \dot{U}_{1k} / \dot{I}_{1k} = Z_c \text{th}\gamma l . \quad (5.6.16)$$

На фиг.5.6.4 и 5.6.5 са дадени съответно правите ($u'_к, i'_к$), обратните ($u''_к, i''_к$) и резултантните ($u_к, i_к$) вълни на напрежението и тока при режим на късо съединение.

Чрез опитите на празен ход и късо съединение на една линия могат да бъдат определени нейните входни съпротивления $Z_0 = Z_c / \text{th}\gamma l$ и $Z_к = Z_c \text{th}\gamma l$, а чрез тях да се намерят характеристичните ѝ параметри:

$$Z_c = \sqrt{Z_0 Z_к} ; \quad (5.6.17)$$

$$\text{th}\gamma l = \sqrt{Z_k / Z_0} . \quad (5.6.18)$$

Чрез Z_c и γ могат да бъдат определени и първичните параметри на линията (R_0, L_0, G_0, C_0) при съответна честота ω. И действително, като се знае, че:

$$R_0 + j\omega L_0 = \gamma Z_c ; \quad (5.6.19)$$

$$G_0 + j\omega C_0 = \gamma / Z_c . \quad (5.6.20)$$

Следователно :

$$R_0 = \text{Re}[\gamma Z_c]; \quad (5.6.21)$$

$$L_0 = \text{Im}[\gamma Z_c] / j\omega ; \quad (5.6.22)$$

$$G_0 = \text{Re}[\gamma / Z_c]; \quad (5.6.23)$$

$$C_0 = \text{Im}[\gamma / Z_c] / j\omega . \quad (5.6.24)$$

Ако се сравни система уравнения (5.6.8) със системи уравнения (5.6.11) и (5.6.14) може да се установи, че режимът на товар на една линия може да се получи от наслагването на режимите на празен ход и на късо съединение.

5.7. Линия без загуби

В редица случаи и особено при високи честоти обикновено са изпълнени неравенствата $R_0 << \omega L_0$ и $G_0 << \omega C_0$. Това дава основание да се пренебрегнат загубите в линиите, т.е. да се положи $R_0 = 0$ и $G_0 = 0$. Линиите, за които е изпълнено това условие, се наричат линии без загуби. За тези линии вълновото съпротивление Z_c става чисто активно. И действително:

$$Z_c = \sqrt{j\omega L_0 / j\omega C_0} = \sqrt{L_0 / C_0} = z_c . \quad (5.7.1)$$

Константата на разпространение на вълните γ добива стойност:

$$\gamma = \sqrt{j\omega L_0 . j\omega C_0} = j\omega\sqrt{L_0 C_0} = \alpha + j\beta , \quad (5.7.2)$$

т.е.: $\alpha = 0;$ (5.7.3)

$$\beta = \omega\sqrt{L_0 C_0} . \quad (5.7.4)$$

Тогава фазовата скорост $v_ф$ е:

$$v_ф = \omega / \beta = 1 / \sqrt{L_0 C_0} . \quad (5.7.5)$$

Следователно линията без загуби е и неизкривяваща линия, защото вълновото ѝ съпротивление Z_c, коефициентът на затихване α, който е равен на нула, и фазовата скорост $v_ф$ не зависят от честотата ω.

При въздушните линии без загуби: $v_ф = c = 3.10^8$ m/s. Скоростта на светлината се дава с формулата $c = 1/\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}$, където μ_0 и ε_0 са съответно абсолютните магнитна и

диелектрична проницаемост на въздуха и вакуума. При кабелните линии $V_Ф = 1/\sqrt{L_0 C_0} = 1/\sqrt{\mu_0\mu_r\varepsilon_0\varepsilon_r} = c/\sqrt{\mu_r\varepsilon_r}$, където μ_r и ε_r са съответно относителната магнитна и диелектрична проницаемости на диелектрика на изолацията на проводниците на кабелните линии.

Тъй като при линиите без загуба $\alpha = 0$, то константата $\gamma = j\beta$ става чисто имагинерна величина. Затова хиперболичните косинуси и синуси се превръщат в тригонометрични синуси и косинуси, т.е.

$$ch\gamma x = chj\beta x = \left(e^{j\beta x} + e^{-j\beta x}\right)/2 = \left(\cos\beta x + j\sin\beta x + \cos\beta x - j\sin\beta x\right)/2 = \cos\beta x; \quad (5.7.6)$$

$$sh\gamma x = shj\beta x = \left(e^{j\beta x} - e^{-j\beta x}\right)/2 = \left(\cos\beta x + j\sin\beta x - \cos\beta x + j\sin\beta x\right)/2 = j\sin\beta x. \quad (5.7.7)$$

Като се имат предвид горните изрази и че: $Z_c = z_c$, то уравненията на линия без загуби са следните:

$$\dot{U}(x) = \dot{U}_2\cos\beta x + j\dot{I}_2 z_c \sin\beta x; \quad (5.7.8)$$

$$\dot{I}(x) = j\dot{U}_2 \sin\beta x / z_c + \dot{I}_2\cos\beta x, \quad (5.7.9)$$

т.е. уравнения с хиперболични функции при еднородна линия се превръщат в уравнения с тригонометрични функции от реален аргумент при линия без загуби.

Напрежението и токът в линия без загуби, както и при еднородна линия, могат да се представят като сума от права и обратна вълна. Разликата тук е в това, че по цялата дължина на линията амплитудите им са постоянни, тъй като няма загуби (в тези линии $\alpha = 0$), т.е.:

$$\dot{U}(x) = \left(\dot{U}_2 + \dot{I}_2 z_c\right)e^{j\beta x}/2 + \left(\dot{U}_2 - \dot{I}_2 z_c\right)e^{-j\beta x}/2 = \dot{U}'_2 e^{j\beta x} + \dot{U}''_2 e^{-j\beta x} = \dot{U}_\varphi + \dot{U}_\psi; \quad (5.7.10)$$

$$\dot{I}(x) = \left(\dot{U}_2 + \dot{I}_2 z_c\right)e^{j\beta x}/2z_c - \left(\dot{U}_2 - \dot{I}_2 z_c\right)e^{-j\beta x}/2z_c = \quad (5.7.11)$$

$$= \dot{U}'_2 e^{j\beta x}/z_c - \dot{U}''_2 e^{-j\beta x}/z_c = \dot{I}'_2 e^{j\beta x} - \dot{I}''_2 e^{-j\beta x} = \dot{I}_\varphi + \dot{I}_\psi,$$

където с индекс "φ" е означена правата, а с – "ψ" - обратната вълна. От уравнения (5.7.10) и (5.7.11) е очевидно, че всяка вълна на тока съвпада по фаза със съответната вълна на напрежението, тъй като при линиите без загуби вълновото съпротивление z_c е чисто активно.

Входното съпротивление на линията без загуби е:

$$Z_{вх} = Z_1 = \dot{U}_1/\dot{I}_1 = z_c\frac{Z_T + jz_c tg\beta l}{z_c + jZ_T tg\beta l}. \quad (5.7.12)$$

Режимът на работа на линия без загуби, както в общия случай и на еднородна линия, се определя от параметрите на линията (z_c и γ), нейната дължина l и от товарното ѝ съпротивление Z_T.

А) <u>Режим на съгласуван товар</u>

В този случай $Z_T = z_c = \sqrt{L_0/C_0}$. Тогава $\dot{U}_2 = \dot{I}_2 z_c$, т.е. изходните ток и напрежение на линията ще съвпадат по фаза.

Системата уравнения на линията при режим на съгласуван товар добива вида:

$$\left|\begin{array}{l}\dot{U}(x)=\dot{U}_2\,e^{j\beta x}=\dot{U}'(x)=\dot{U}_\varphi;\\ \dot{I}(x)=\dot{I}_2\,e^{j\beta x}=\dot{I}'(x)=\dot{I}_\varphi.\end{array}\right. \qquad (5.7.13)$$

Следователно при линиите без загуби при режим на съгласуван товар се получават само прави вълни на тока и напрежението, които са във фаза ($\dot{U}_\varphi=\dot{I}_\varphi z_c$) и чиито амплитуди са съответно равни на амплитудите на напрежението ($U_{2m}=\sqrt{2}U_2$) и на тока ($I_{2m}=\sqrt{2}I_2$) в края на линията.

Ако се приеме, че напрежението в края на линията има нулева начална фаза, т.е. $\dot{U}_2=U_2$, то за моментните стойности на напрежението $u(x,t)$ и тока $i(x,t)$ в коя да е точка, намираща се на разстояние x от края на линията, могат да се запишат изразите:

$$\dot{U}(x) \rightleftharpoons u(x,t)=u'(x,t)=\sqrt{2}U_2\sin(\omega t+\beta x)$$

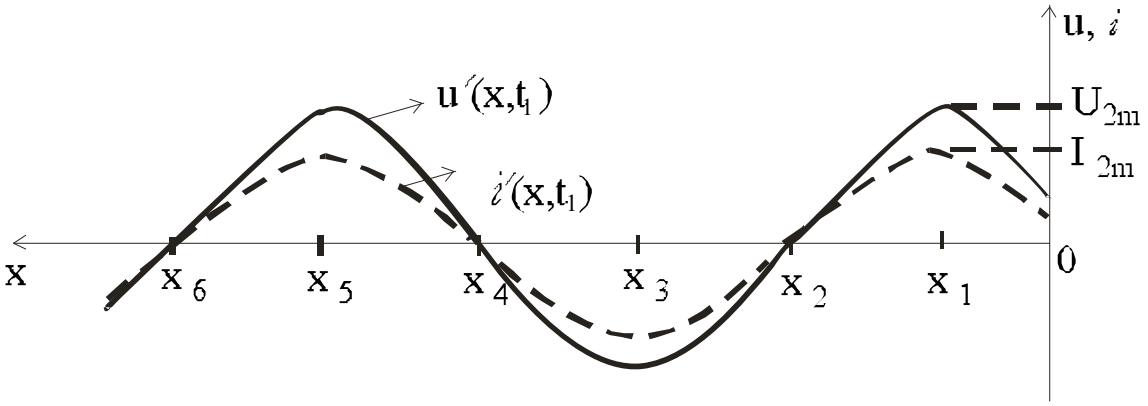
или

$$u(x,t)=U_{2m}\sin(\omega t+\beta x) \qquad (5.7.14)$$

и $\dot{I}(x) \rightleftharpoons i(x,t)=i'(x,t)=\sqrt{2}I_2\sin(\omega t+\beta x)$

т.е.:

$$i(x,t)=I_{2m}\sin(\omega t+\beta x). \qquad (5.7.15)$$



фиг. 5.7.1

Графичните изображения на уравнения (5.7.14) и (5.7.15) за даден момент от време $t=t_1$ са показани на фиг.5.7.1.

Както от тези уравнения, така и от фиг.5.7.1 е очевидно, че в даден момент от време t, разпределението на тока i и напрежението u по линията е по синусоидален закон. От уравнения (5.7.14) и (5.7.15) може да се установи още, че в коя да е точка x от линията напрежението u и токът i се изменят във времето също по синусоидален закон. Очевидно е също и че в различните точки от линията в даден момент напрежението u (токът i) имат различни фази. Например, в т. x_1 при $t=t_1$, напрежението $u(x_1,t_1)$ има фаза $\pi/2$ и е равно на U_{2m}, защото:

$$u(x_1,t_1)=U_{2m}\sin(\omega t_1+\beta x_1)=U_{2m}\sin\frac{\pi}{2}=U_{2m}.$$

В т. x_2 при $t = t_1$, фазата на напрежението $u(x_2,t_1)$ е равна на π, а то е равно на нула, защото:

$u(x_2,t_1)=U_{2m}\sin(\omega t_1+\beta x_2)=U_{2m}\sin\pi=0$ и т.н.

Тъй като амплитудите на напрежението и тока при режим на съгласуван товар на линия без загуби са постоянни по цялата дължина на линията ($U_m(x) = U_{2m} = \text{const}$ и $I_m(x) = I_{2m} = \text{const}$), то и ефективните им стойности ще бъдат постоянни по линията и няма да зависят от x:

$$U(x)=U_m(x)/\sqrt{2}=U_{2m}/\sqrt{2}=U_2; \qquad (5.7.16)$$

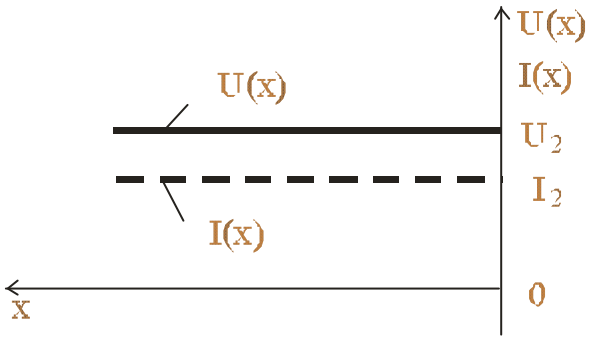
$$I(x)=I_m(x)/\sqrt{2}=I_{2m}/\sqrt{2}=I_2. \qquad (5.7.17)$$

Може да се запише още:

$$I_2=U_2/z_c. \qquad (5.7.18)$$

Разпределението на ефективните стойности на напрежението $U(x)$ и на тока $I(x)$ по линия без загуби в режим на съгласуван товар са показани на фиг.5.7.2.

Входното съпротивление на линията без загуби при режим на съгласуван товар при каквато и да е дължина на линията l е равно на вълновото й съпротивление и е чисто активно, т.е. :



фиг.5.7.2

$$Z_{вх}=Z_T=z_c. \qquad (5.7.19)$$

Колкото разликата между вълновото z_c и товарното съпротивление Z_T е по-голяма, толкова по-осезаема става отразената вълна. Коефициентите на отражение по напрежение и по ток от края на линията стават най-големи при режимите на празен ход ($Z_T \to \infty$) и късо съединение($Z_T = 0$).

Б) Режим на празен ход

В случай на режим на празен ход $Z_T \to \infty$ и $\dot{I}_2 = 0$ и системата уравнения на линия без загуби добива вида:

$$\begin{cases}\dot{U}_0(x)=\dot{U}_{20}\cos\beta x;\\ \dot{I}_0(x)=j\dot{U}_{20}\sin\beta x/z_c.\end{cases} \qquad (5.7.20)$$

Ако се приеме, че напрежението в края на линията е с нулева начална фаза, т.е.: $\dot{U}_{20}=U_{20}$, то за моментните стойности на напрежението $u_0(x,t)$ и на тока $i_0(x,t)$ се записва:

$$\begin{cases}u_0(x,t)=U_{2m}\cos\beta x\sin\omega t;\\ i_0(x,t)=(U_{2m}/z_c)\sin\beta x\sin(\omega t+\pi/2).\end{cases} \qquad (5.7.21)$$

Система уравнения (5.7.21) може да се запише още по следния начин:

$$\begin{cases} u_0(x,t) = U_m(x)\sin\omega t\,; \\ i_0(x,t) = I_m(x)\cos\omega t\,, \end{cases} \qquad (5.7.22)$$

където амплитудите на напрежението и тока в този случай се изменят съгласно изразите:

$$\begin{aligned} U_m(x) &= U_{2m}\cos\beta x\,; \\ I_m(x) &= (U_{2m}/z_c)\sin\beta x\,. \end{aligned} \qquad (5.7.23)$$

От система уравнения (5.7.22) е очевидно, че в дадена точка x напрежението се изменя по синусоидален, а токът - по косинусоидален закон. От изрази (5.7.23) може да се установи още, че разпределението на напрежението по линията в даден момент от време е по косинусоидален закон, а на тока - по синусоидален закон.

На фиг.5.7.3 е показано разпределението на напрежението $u_0(x,t)$ за различни моменти от време:

за момента $t_1 \rightarrow 0 < \omega t_1 < \pi/2;\ 0 < \sin\omega t_1 < 1;$

за момента $t_2 \rightarrow \omega t_2 = \pi/2;\ \sin\omega t_2 = 1;$

за момента $t_3 = t_2 + T/4 \rightarrow \omega t_3 = \pi;\ \sin\omega t_3 = 0;$

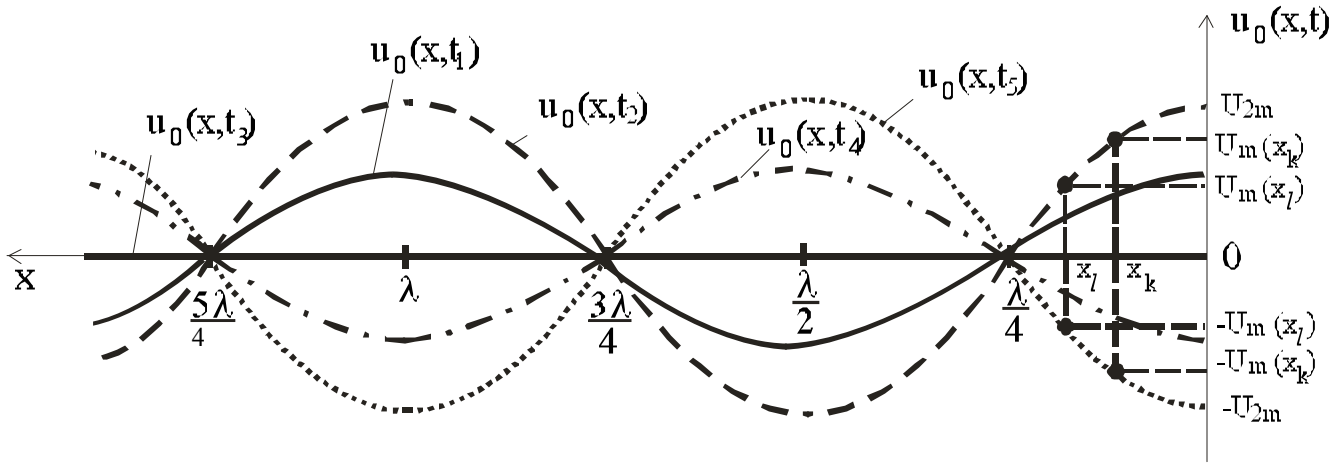
за момента $t_4 \rightarrow \pi < \omega t_4 < 3\pi/2;\ -1 < \sin\omega t_4 < 0;$

за момента $t_5 = t_3 + T/4 \rightarrow \omega t_5 = 3\pi/2;\ \sin\omega t_5 = -1.$

(T е периодът на изменение на напрежението във времето)

При начертаването на кривите от фиг.5.7.3 е взето предвид, че $U_m(x) = U_{2m}\cos\beta x$, при което за различните стойности на x, то $U_m(x)$ се изменя в диапазона $0 \ldots U_{2m}$, както следва:

$x_1 = 0;$	$\beta x_1 = 0;$	$\cos\beta x_1 = 1;$
$x_2 = \lambda/4;$	$\beta x_2 = (2\pi/\lambda).(\lambda/4) = \pi/2;$	$\cos\beta x_2 = 0;$
$x_3 = \lambda/2;$	$\beta x_3 = (2\pi/\lambda).(\lambda/2) = \pi;$	$\cos\beta x_3 = -1;$
$x_4 = 3\lambda/4;$	$\beta x_4 = (2\pi/\lambda).(3\lambda/4) = 3\pi/2;$	$\cos\beta x_4 = 0;$
$x_5 = \lambda;$	$\beta x_5 = (2\pi/\lambda).(\lambda) = 2\pi;$	$\cos\beta x_5 = 1$ и т.н.



фиг. 5.7.3

Ако се разгледат напрежението $u_0(x_к,t)$ в точка $x_к$ и напрежението $u_0(x_l,t)$ в съседната ѝ точка x_l може да се установи,че те се изменят по синусоидален закон във времето, като едновременно нарастват от нула съответно до $U_m(x_к)$ и $U_m(x_l)$ (вж. фиг.5.7.3), след това намаляват до нула. По-нататък те добиват отрицателни

максимални стойности, съответно -$U_m(x_к)$ и - $U_m(x_l)$ и отново стават равни на нула и т.н. Разгледаното по-горе показва, че напрежението в отделните точки на линията пулсира. Максималните стойности на напрежението $u_0(x,t)$ в различните точки x са различни. В точките, за които x има стойности 0; $\lambda/2$; $3\lambda/2$ и т.н., максимумите са най-големи и равни на амплитудата на напрежението в края на линията U_{2m}. Те се наричат върхове на напрежението. В точките от линията, за които x има стойности $\lambda/4$; $3\lambda/4$; $5\lambda/4$; $7\lambda/4$ и т.н. напрежението е винаги равно на нула. В тези точки се казва, че има възли на напрежението. В междинни на описаните по-горе точки, напрежението също добива едновременно максималните си стойности, но те са по-ниски от тези във върховете. Така напрежението по линията запазва във времето косинусоидалното си разпределение, т.е. вълната стои на едно място. Затова при режим на празен ход се казва, че се получават стоящи вълни на напрежението, а първото уравнение на системата (5.7.21) е уравнение на стояща вълна.

Ако се сравни второто уравнение на система (5.7.21), което е за тока $i_0(x,t)$, с това за напрежението $u_0(x,t)$ (първото уравнение на система (5.7.21)), може да се установи, че и токът при режим на празен ход образува стоящи вълни. Тъй като разпределението на тока $i_0(x,t)$ по линията е по синусоидален закон, а на напрежението $u_0(x,t)$ е по косинусоидален закон, то там където напрежението има върхове, токът ще има възли и обратно - там където са възлите на напрежението, ще има върхове на тока.

Освен това тъй като напрежението се изменя във времето по синусоидален закон, а токът - по косинусоидален закон (това дефазиране съответствува на време, равно на $T/4$), то когато по цялата линия напрежението е достигнало максималната си стойност, то токът във всички точки от линията ще бъде равен на нула в този момент. Обратно - когато по цялата линия напрежението е равно на нула, то в този момент във всички точки от линията токът ще получи максималната си стойност.

От уравнения (5.7.23) могат да се определят ефективните стойности на тока и на напрежението при режим на празен ход и те са:

$$U_0(x) = |U_m(x)|/\sqrt{2} = |U_{2m}\cos\beta x|/\sqrt{2}\,; \tag{5.7.24}$$

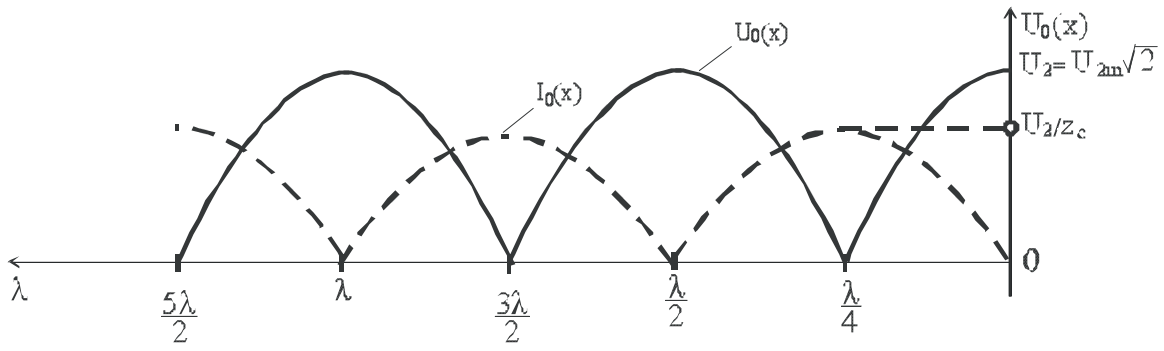
$$I_0(x) = |I_m(x)|/\sqrt{2} = |U_{2m}\sin\beta x|/z_c\sqrt{2}\,, \tag{5.7.25}$$

откъдето за стойностите на напрежението и тока във върховете и възлите се записва:

$$U_{връх} = U_{2m}/\sqrt{2} = U_2\ ;\ U_{възел} = 0\ ; \tag{5.7.26}$$

$$I_{връх} = U_{2m}/z_c\sqrt{2} = U_2/z_c\ ;\ I_{възел} = 0. \tag{5.7.27}$$

На фиг.5.7.4 е показано разпределението на ефективните стойности на напрежението и тока по линията при режим на празен ход, т.е. е показана графичната интерпретация на уравнения (5.7.24) и (5.7.25).



фиг. 5.7.4

Стоящите вълни на напрежението и тока в линията при режим на празен ход, както и при всеки друг режим, могат да се разглеждат като получени от наслагването на две бягащи вълни - права и обратна. При режим на празен ход коефициентите на отражение по напрежение q_u и по ток q_i са съответно: $q_u = +1$; $q_i = -1$. Затова ефективните стойности на падащата (правата) и отразената(обратната) вълни са равни помежду си и равни на половината от ефективната стойност на съответната стояща вълна т.е. :

$$\left|U'_2(x)\right| = \left|U''_2(x)\right| = \left|U(x)\right|/2; \tag{5.7.28}$$

$$\left|I'_2(x)\right| = \left|I''_2(x)\right| = \left|U(x)\right|/2z_c. \tag{5.7.29}$$

Аналогично е съотношението и между амплитудните стойности на правата, обратната и стоящата вълни съответно на тока и напрежението

При наличие на стоящи вълни в линията, по нея не се предава активната мощност, тъй като във възлите на тока и напрежението тази мощност е винаги нула. Физически това се обяснява от една страна с отсъствието на загуби в линията ($R_0 = 0$, $G_0 = 0$), а от друга страна липсва и консуматор (линията е отворена накрая при режим на празен ход). Следователно захранващият генератор не отдава активни мощности на такава линия. Във всеки участък от линията с дължина, равна на $\lambda/4$ (между възел на тока и възел на напрежението) се извършва само обмен на запасената енергия между електрическото и магнитното полета. Така например, когато напрежението достигне максимална стойност във всички точки от линията и токът по цялата линия е равен на нула, то цялата запасена енергия е съсредоточена в електрическото поле.

Когато напрежението навсякъде е равно на нула, а токът във всички точки добие максимална стойност, то цялата запасена енергия е съсредоточена в магнитното поле. В този смисъл процесите, извършващи се във всеки участък от линията с дължина $\lambda/4$, са аналогични на процесите на обмен на енергията в контур, съставен от бобина и кондензатор при резонанс.

Равенството на амплитудите на правата и обратната бягащи вълни също показва, че в еднородна линия без загуби в режим на празен ход не се извършва пренасяне на енергия, а само има многократно отражение на бягащи вълни от края на линията.

От системата уравнения за напрежението $\dot{U}_{10}$ и тока $\dot{I}_{10}$ в началото на линията в режима й на празен ход:

$$\begin{cases} \dot{U}_{10} = \dot{U}_{20}\cos\beta\ell; \\ \dot{I}_{10} = \dfrac{j\dot{U}_{20}\sin\beta\ell}{z_c} \end{cases} \tag{5.7.30}$$

може да бъде определено входното й съпротивление Z_{10} :

$$Z_{10} = \frac{\dot{U}_{10}}{\dot{I}_{10}} = -jz_c\cot g\beta\ell. \tag{5.7.31}$$

Тъй като вълновото съпротивление z_c на линията без загуби е чисто активно, т.е. е реално число и $\cot g\,\beta\ell$ също е реално число, то входното съпротивление Z_{10} е чисто реактивно. От уравнение (5.7.31) е очевидно, че големината на Z_{10} се изменя по котангенсов закон.

Съпротивлението Z_{10} може да се запише по следния начин:

$$Z_{10} = jX_{10},$$

където $X_{10} = -z_c \cot g\beta\ell.$ (5.7.32)

При зададени вълново съпротивление Z_{10} , честотата ω и дължината на вълната $\lambda = \frac{2\pi}{\beta}$, входното съпротивление Z_{10} ще зависи само от дължината на линията ℓ. Така например при:

$$\ell = 0;\ \cot g\beta\ell \to +\infty;\ X_{10} \to -\infty;$$

$$\ell = \frac{\lambda}{4};\ \beta\ell = \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)\left(\frac{\lambda}{4}\right) = \frac{\pi}{2};\ \cot g\beta\ell = 0;\ X_{10} = 0;$$

$$\ell = \frac{\lambda}{2};\ \beta\ell = \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)\left(\frac{\lambda}{2}\right) = \pi;\ \cot g\pi \to -\infty;\ x_{10} \to +\infty$$

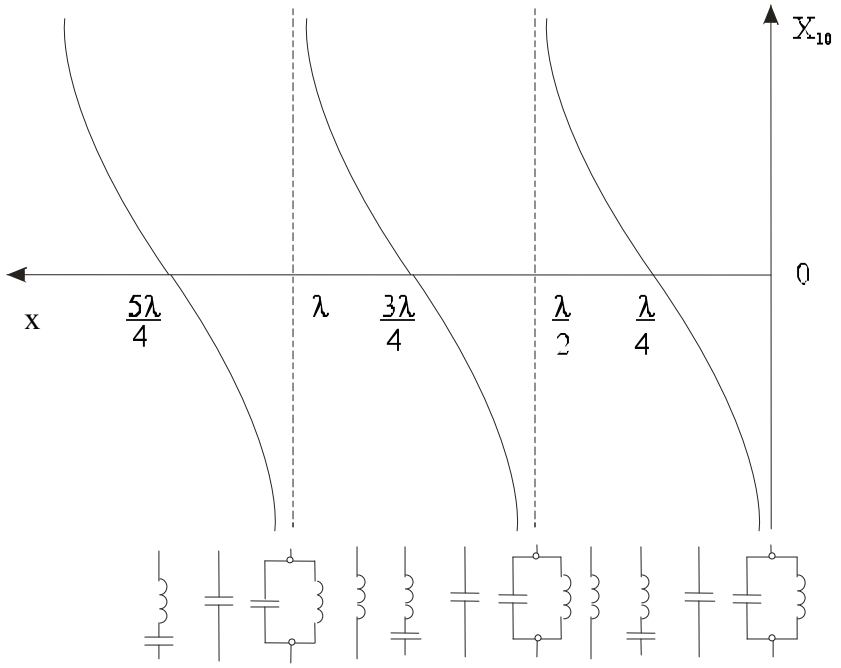
и т.н.

На фиг.5.7.5 е показано изменението на входното съпротивление x_{10} на линия без загуби при режим на празен ход в зависимост от дължината ѝ ℓ при постоянни z_c, ω, $\lambda = \frac{2\pi}{\beta}$.

На фиг.5.7.5 са начертани и заместващите схеми на линията при различна дължина ℓ .

Тъй като при $\ell = \ell_1 + n\frac{\lambda}{2}$, където $0 < \ell_1 < \frac{\lambda}{4}$, а n = 0, 1, 2, 3, …, входното съпротивление е чисто реактивно и отрицателно, то заместващата схема на линията е схема на кондензатор, който също има отрицателно реактивно съпротивление.

При $\ell = \ell_2 + n\frac{\lambda}{2}$, където $\ell_2 = 0$, а n = 0, 1, 2, 3, … , входното съпротивление Z_{10} клони към безкрайност. Затова заместващата схема на такава линия е схема на паралелен LC - контур при резонанс, тъй като неговото съпротивление тогава клони към безкрайност.



Фиг.5.7.5

При $\ell = \ell_3 + n\frac{\lambda}{2}$, където $\frac{\lambda}{4} < \ell_3 < \frac{\lambda}{2}$, а $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$, входното съпротивление Z_{10} е чисто реактивно и положително. Следователно в този случай заместващата схема на линията ще бъде схема на бобина, чието реактивно съпротивление е положително.

При $\ell = \ell_4 + n\frac{\lambda}{2}$, където $\ell_4 = \frac{\lambda}{4}$, а $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$, входното съпротивление Z_{10} е равно на нула. Заместващата схема на линията е схема на последователен LC - контур при резонанс, тъй като неговото съпротивление тогава е равно на нула.

С) Режим на късо съединение

При режим на късо съединение $Z_т = 0$ и напрежението в края на линията $\dot{U}_2 = 0$. Тогава системата уравнения на линия без загуби има вида :

$$\begin{aligned} \dot{U}_к(x) &= j\dot{I}_{2к} z_c \sin\beta x ; \\ \dot{I}_к(x) &= \dot{I}_{2к}\cos\beta x . \end{aligned} \qquad (5.7.33)$$

Ако се приеме, че токът в края на линията е с нулева начална фаза, т.е.: $\dot{I}_2 = I_2$, то за моментните стойности за напрежението в коя да е точка x от линията се получава системата уравнения:

$$\begin{aligned} u_к(x,t) &= I_{2m} z_c \sin\beta x \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right); \\ i_к(x,t) &= I_{2m}\cos\beta x.\sin\omega t, \end{aligned} \qquad (5.7.34)$$

която може да се запише още по следния начин:

$$\begin{aligned} u_к(x,t) &= U_{mк}(x)\cos\omega t ; \\ i_к(x,t) &= I_{mк}(x)\sin\omega t , \end{aligned} \qquad (5.7.35)$$

където амплитудите на напрежението $U_{mк}(x)$ и тока $I_{mк}(x)$ са:

$$\begin{aligned} U_{mк}(x) &= I_{2m}.z_c.\sin\beta x ; \\ I_{mк}(x) &= I_{2m}.\cos\beta x . \end{aligned} \qquad (5.7.36)$$

Ако се сравни система уравнения (5.7.34) за режим на късо съединение със система уравнения (5.7.21) за режим на празен ход, може да се установи, че при режим на късо съединение също се образуват стоящи вълни на тока и напрежението.

Изменението на напрежението $u_к(x,t)$ при късо съединение е аналогично на изменението на тока $i_0(x,t)$ при празен ход. Обратно – изменението на тока $i_к(x,t)$ при късо съединение е аналогично на изменението на напрежението $u_0(x,t)$ при празен ход. Следователно възлите и върховете на $u_к(x,t)$ съвпадат с възлите и върховете на $i_0(x,t)$, възлите и върховете на $i_к(x,t)$ – с възлите и върховете на $u_0(x,t)$.

Ефективните стойности на напрежението и тока при режим на късо съединение се дават със системата уравнения:

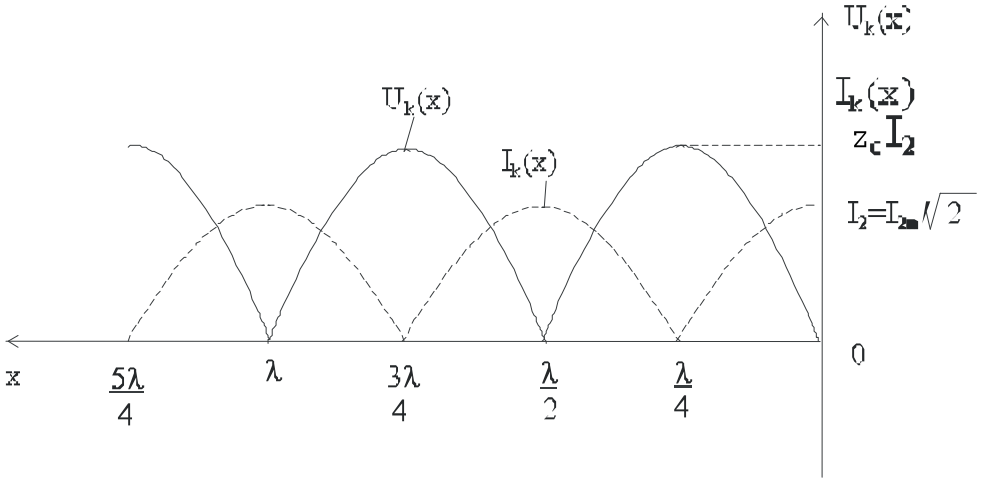
$$\begin{aligned} U_к(x) &= \left|U_{mк}(x)\right| = \frac{\left|z_c I_{2m}\sin\beta x\right|}{\sqrt{2}} ; \\ I_к(x) &= \left|I_{mк}(x)\right| = \frac{\left|I_{2m}\cos\beta x\right|}{\sqrt{2}} . \end{aligned} \qquad (5.7.37)$$

На фиг.5.7.6 е показана графичната интерпретация на последните уравнения, т.е. разпределението на ефективните стойности на напрежението и тока по линия без загуби при режим на късо съединение.

Енергийните процеси при режим на късо съединение са аналогични на тези при режим на празен ход. И в този случай отсъствува товар ($Z_т = 0$) и линията е без загуби ($R_0 = 0$, $G_0 = 0$).

Входното съпротивление $Z_{1к}$ на линия без загуби при режим на късо съединение може да се определи от системата уравнения за входните напрежение $\dot{U}_{1к}$ и ток $\dot{I}_{1к}$:

$$\dot{U}_{1к}(x) = j\dot{I}_{2к} z_c \sin\beta\ell\,;$$
$$\dot{I}_{1к}(x) = \dot{I}_{2к}\cos\beta\ell\,. \qquad (5.7.38)$$



Фиг.5.7.6

Следователно:

$$Z_c = \frac{\dot{U}_{1к}}{\dot{I}_{1к}} = jz_c\,\mathrm{tg}\beta\ell\,. \qquad (5.7.39)$$

И в този случай, тъй като z_c и $\mathrm{tg}\beta\ell$ са реални числа, входното съпротивление $Z_{1к}$ е чисто реактивно. При зададени вълново съпротивление z_c, честотата ω и дължината на вълната $\lambda = \frac{2\pi}{\beta}$, входното съпротивление $Z_{1к}$ ще зависи само от дължината на линията ℓ и по големина ще се изменя по тангенсоидеален закон.

Изразът за $Z_{1к}$ може да се запише още по следния начин:

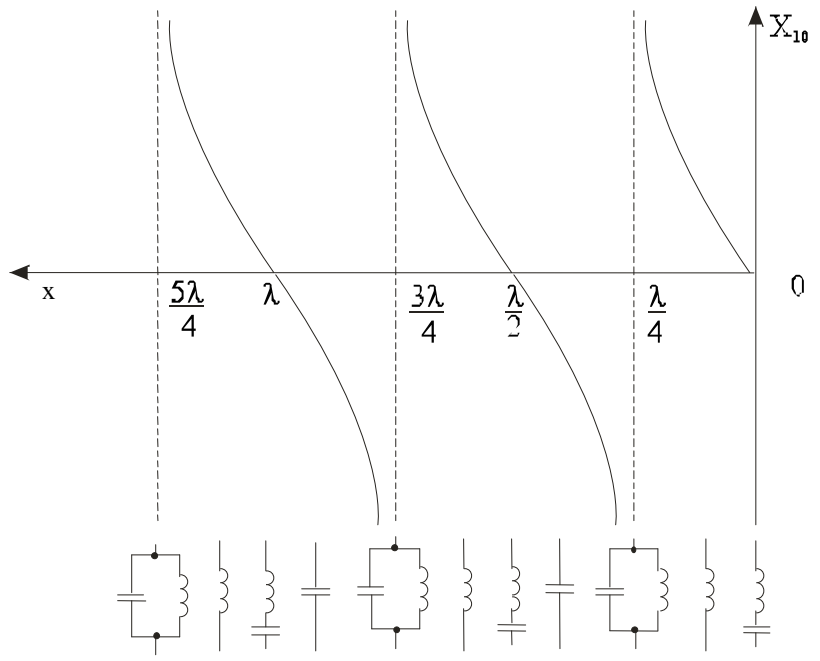
$$Z_{1к} = jX_{1к}\,, \qquad (5.7.40)$$

където $X_{1к} = z_c\,\mathrm{tg}\beta\ell.$ (5.7.41)

На фиг.5.7.7 е показано изменението на входното съпротивление $X_{1к}$ в зависимост от дължината на линията ℓ (графиката съответствува на уравнение (5.7.41)). На същата фигура са начертани и заместващите схеми на линията за участъците й с различна дължината ℓ .

На фиг.5.7.7 е показано изменението на входното съпротивление $X_{1к}$ в зависимост от дължината на линията ℓ (графиката съответствува на уравнение (5.7.41)). На същата фигура са начертани и заместващите схеми на линията за участъците й с различна дължината ℓ .

При постоянно вълново съпротивление z_c и дължината ℓ , входните съпротивления на линия без загуби при режим на празен ход Z_{10} и късо съединение $Z_{1к}$ се изменят при изменение на честотата ω по аналогични закони както при изменението на дължината ѝ ℓ .



Фиг.5.7.7

Д) Режим на чисто реактивен товар

Ако се приеме, че товарното съпротивление е индуктивно , т.е.: $Z_т = jX_L = j\omega L$, то системата уравнения на линията в този случай добива вида:

$$\begin{cases} \dot{U}(x) = \dot{U}_2\left(\cos\beta x + j\dfrac{z_c}{jX_T}\sin\beta x\right); \\ \dot{I}(x) = \dot{I}_2\left(\cos\beta x + j.\dfrac{jX_T}{z_c}\sin\beta x\right). \end{cases} \qquad (5.7.42)$$

Полага се:

$$\frac{z_c}{X_T} = tg\sigma = \frac{\sin\sigma}{\cos\sigma} \qquad (5.7.43)$$

и се замества в система (5.7.42). Тогава за $\dot{U}_2(x)$ и $\dot{I}_2(x)$ се получава:

$$\begin{cases} \dot{U}(x) = \dot{U}_2\left(\cos\beta x + \dfrac{\sin\sigma}{\cos\sigma}\sin\beta x\right); \\ \dot{I}(x) = \dot{I}_2\left(\cos\beta x - \dfrac{\cos\sigma}{\sin\sigma}\sin\beta x\right) \end{cases} \qquad (5.7.44)$$

или:

$$\begin{cases} \dot{U}(x) = \dfrac{\dot{U}_2}{\cos\sigma}\cos(\beta x - \sigma); \\ \dot{I}(x) = \dfrac{\dot{I}_2}{\sin\sigma}\sin(\beta x - \sigma). \end{cases} \qquad (5.7.45)$$

Ако напрежението в края на линията е с нулева начална фаза, т.е.: $\dot{U}_2 = U_2$, то за тока $\dot{I}_2$ в края на линията се получава:

$$\dot{I}_2 = \frac{\dot{U}_2}{jX_T} = \frac{U_2}{jX_T} = -jI_2 = I_2.e^{-j\frac{\pi}{2}}. \qquad (5.7.46)$$

Тогава системата уравнения за моментните стойности на напрежението $u(x,t)$ и тока $i(x,t)$ при режим на чисто реактивен (индуктивен) товар ще бъде:

$$\begin{cases} u(x,t) = \dfrac{U_{2m}}{\cos\sigma}\cos(\beta x - \sigma)\sin\omega t\,; \\ i(x,t) = \dfrac{I_{2m}}{\sin\sigma}\sin(\beta x - \sigma)\sin(\omega t - \dfrac{\pi}{2}). \end{cases} \qquad (5.7.47)$$

Уравнения (5.7.47) са също уравнения на стоящи вълни. Следователно при режим на чисто реактивен товар също се получават стоящи вълни на напрежението и тока. В този случай в края на линията няма да има нито връх, нито възел и то нито на напрежението, нито на тока.

Най-близкият до края на линията връх на напрежението, респективно - най-близкият възел на тока се получават в точка x_1, за която е изпълнено условието:

$$\cos(\beta x_1 - \sigma) = 1 \quad \text{или} \quad \sin(\beta x_1 - \sigma) = 0\,, \qquad (5.7.48)$$

т.е.: $\beta x_1 - \sigma = 0\,,$ (5.7.49)

откъдето: $x_1 = \dfrac{\sigma}{\beta}.$ (5.7.50)

Тогава най-близкият до края на линията възел на напрежението, респективно - връх на тока ще се намират в точка x_2, за която е изпълнено равенството:

$$x_2 = x_1 + \frac{\lambda}{4}. \qquad (5.7.51)$$

На фиг.5.7.8 са начертани кривите, съответстващи на уравнения (5.7.47) за момент от време $t_1 = \dfrac{T}{8}.$ Тогава $\omega t_1 = \left(\dfrac{2\pi}{T}\right).\left(\dfrac{T}{8}\right) = \dfrac{\pi}{4},$ а $\sin\omega t_1 = \cos\omega t_1 = \dfrac{\sqrt{2}}{2}.$ Следователно:

$$\begin{cases} u(x,t_1) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\dfrac{U_{2m}}{\cos\sigma}\cos(\beta x - \sigma); \\ i(x,t_1) = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}\dfrac{I_{2m}}{\sin\sigma}\sin(\beta x - \sigma). \end{cases} \qquad (5.7.52)$$

Система (5.7.52) може да се запише още по следния начин:

$$\begin{cases} u(x,t) = \dfrac{U_2}{2\cos\sigma}\cos(\beta x - \sigma); \\ i(x,t) = -\dfrac{I_2}{2\sin\sigma}\sin(\beta x - \sigma). \end{cases} \qquad (5.7.53)$$

Ефективните стойности на напрежението и тока във върховете им се дават с изразите:

$$U_{\text{връх}} = u(x_1 = \frac{\sigma}{\beta},\ t_1 = \frac{T}{8}) = \frac{U_2}{\cos\sigma}\,; \qquad (5.7.54)$$

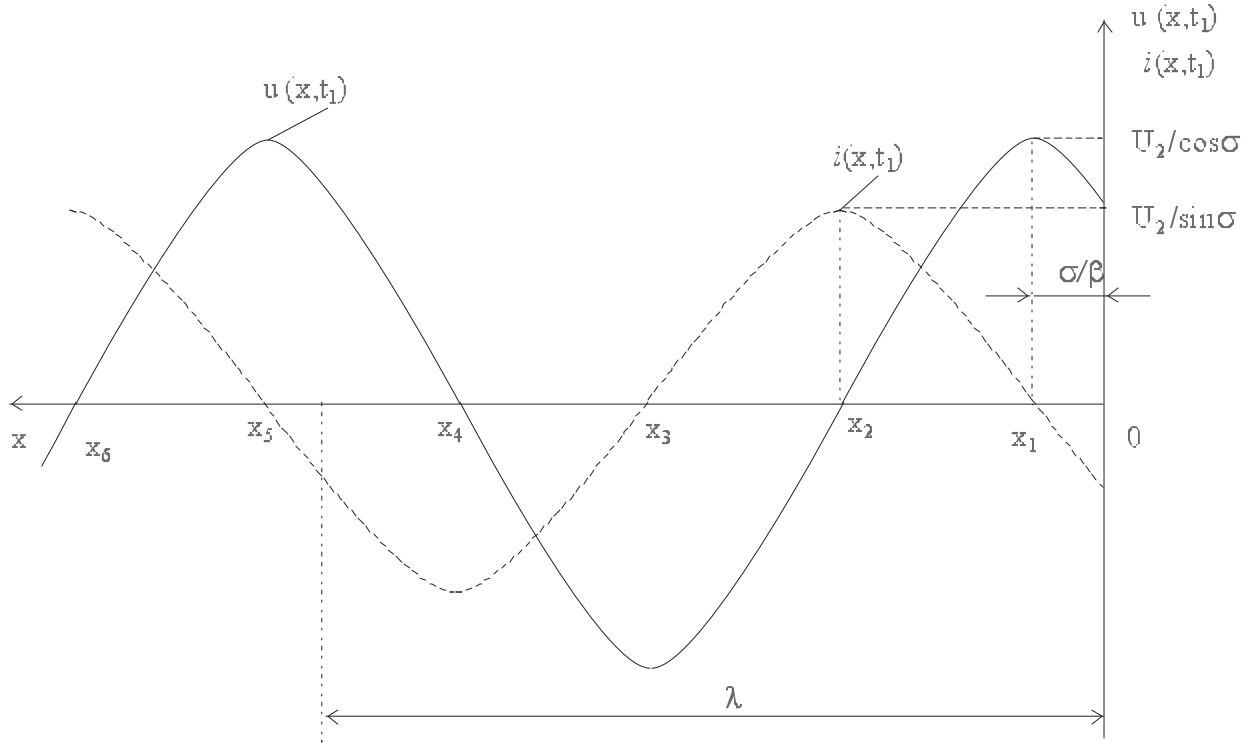
$$I_{\text{връх}} = i(x_1 = \left(\frac{\sigma}{\beta}\right) + \frac{\lambda}{4},\ t_1 = \frac{T}{8}) = \frac{I_2}{\sin\sigma}. \qquad (5.7.55)$$

За входното съпротивление на линия без загуби при чисто реактивен (индуктивен) товар, се получава изразът:

$$Z_{вх} = \frac{\dot{U}_1}{\dot{I}_1} = \frac{\frac{\dot{U}_2}{\cos\sigma}\cos(\beta\ell - \sigma)}{\frac{\dot{I}_2}{\sin\sigma}\sin(\beta\ell - \sigma)} = \frac{\dot{U}_2}{\dot{I}_2}\cdot\frac{\frac{\cos(\beta\ell - \sigma)}{\sin(\beta\ell - \sigma)}}{\frac{\cos\sigma}{\sin\sigma}} = \frac{jX_T.\cot g(\beta\ell - \sigma)}{\frac{X_T}{z_c}},$$

т.е.: $Z_{вх} = jz_c \cot g(\beta\ell - \sigma)$. (5.7.56)

Тъй като вълновото съпротивление z_c и $\cot g(\beta\ell - \sigma)$ са реални числа, то $Z_{вх}$ на линия без загуби при чисто реактивен товар, също както при празен ход и късо съединение, е чисто реактивно съпротивление, но в края на линията не е нито равно на нула, нито клони към безкрайност. Характерът на $Z_{вх}$ (индуктивен или капацитивен) и големината му зависят в случая не само от дължината на линията ℓ, но и от съотношението между вълновото съпротивление z_c и товарното



Фиг.5.7.8

съпротивление $Z_т$.

При изменение на дължината ℓ на линията, $Z_{вх}$ се изменя по следния начин:

при $\ell = 0 \rightarrow Z_{вх} = jz_c \cot g(-\sigma) = -jz_c \cot g\sigma = -jX_T$;

при $\ell = \frac{\lambda}{4} \rightarrow Z_{вх} = jz_c \cot g\left(\frac{\pi}{2} - \sigma\right) = -jz_c tg\sigma = -jz_c \frac{z_c}{Z_T} = -jz_c^2 / X_T$;

при $\ell = \frac{\lambda}{2} \rightarrow Z_{вх} = jz_c \cot g(\pi - \sigma) = -jz_c \cot g\sigma = -jz_c \frac{X_T}{z_c} = -jX_T$ и т. н.

При изменение на стойностите на σ, изменението на $Z_{вх}$ е:

При $\sigma = \beta.\ell \rightarrow Z_{вх} = jz_c \cot g0 \rightarrow \pm\infty.$ Тогава линията е еквивалентна на късо съединена (затворена) линия с дължина $\ell = \frac{\lambda}{4}$.

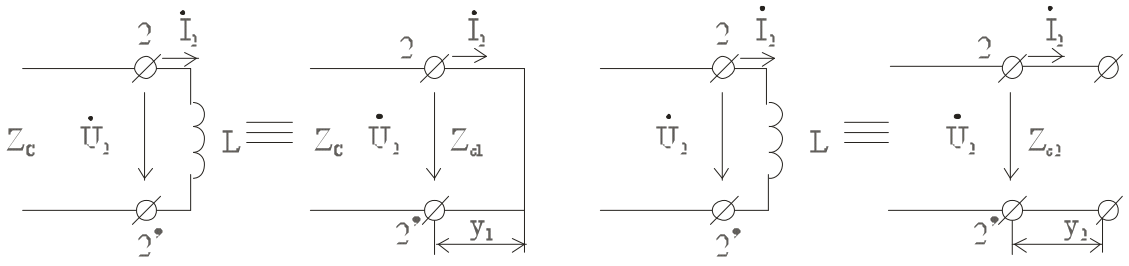
При $\sigma = \beta.\ell \pm \frac{\pi}{2} \rightarrow Z_{вх} = jz_c \cot g\left(\mp\frac{\pi}{2}\right) = 0$ и следователно линията в този случай е еквивалентна на отворена линия с дължина $\ell = \frac{\lambda}{4}$.

По такъв начин в зависимост от честотата ω на приложеното напрежение, дължината на линията ℓ и товарното реактивно съпротивление $Z_T = \pm jX_T$, линията представлява индуктивно или капацитивно съпротивление, при което еквивалентната й индуктивност или капацитет могат да имат всички стойности в границите от нула до безкрайност. Възможността да се осъществи индуктивно или капацитивно съпротивление с една или друга стойност, избрана по подходящ начин, има много важно практическо значение при високи честоти. Реактивният товар на една линия може да се осъществи чрез включване в края й на друга линия без загуби с подходяща дължина и параметри (така наречения шлейф), работеща в режим на празен ход или късо съединение.

На фиг.5.7.9а е показано, че бобина с индуктивност L се замества с отрязък от линия в режим на късо съединение (на късо съединен шлейф) с такава дължина $y_1 = y_{01} + \frac{n\lambda}{2}$ и параметри z_{c_1}, β_1 така, че входното й съпротивление $Z_{вх_1} = jz_{c_1} tg\beta_1 y_1$ да бъде равно на комплексното съпротивление на бобината $Z_T = j\omega L$, т.е. y_1 може да се определи от уравнението:

$$\omega L = z_{c_1} tg\,\beta_1 y_1. \qquad (5.7.57)$$

В израз (5.7.57) $y_1 = y_{01} + \frac{n\lambda}{2}$, $n = 0, 1, 2, ...$, а $0 < y_{01} < \frac{\lambda}{4}$.



а) б)

Фиг.5.7.9

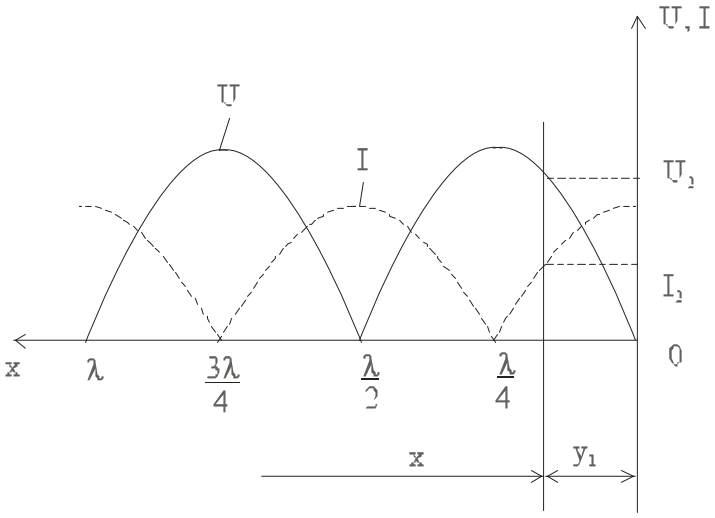
Чисто реактивният товар, в случая индуктивен, може да се моделира и чрез линия без загуби, отворена на края (отворен шлейф) с дължина y_2 и параметри z_{c_2} и β_2 така, че комплексното съпротивление на бобината $Z_T = j\omega L$ да бъде равно на входното съпротивление на отворения шлейф $Z_{вх_2}$, което в случая е:

$$Z_{вх_2} = -jz_{c_2} \cot g\beta_2 y_2, \qquad (5.7.58)$$

където: $y_2 = y_{02} + \frac{n\lambda}{2}$, n = 0, 1, 2, ..., (5.7.59)

а за y_{02} важи неравенството:

$$\frac{\lambda}{4} < y_{02} < \frac{\lambda}{2}. \quad (5.7.60)$$



Фиг.5.7.10

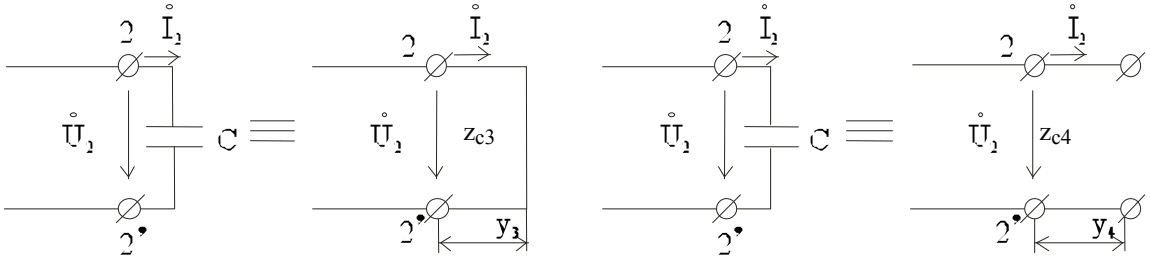
Този случай на моделиране на индуктивен товар е показан на фиг. 5.7.9б.

На фиг.5.7.10 е илюстрирано разпределението на ефективните стойности на напрежението U и на тока I по основната линия и по късо съединения шлейф с дължина y_1 (за случая от фиг.5.7.9а, когато $0 < y_{01} < \frac{\lambda}{4}$).

Ако за чисто реактивен товар на основната линия служи кондензатор със съпротивление:

$$Z_T = -j\frac{1}{\omega C'},$$

то той също може да бъде заменен с късо съединен шлейф с дължина y_3 и



Фиг.5.7.11

параметри z_{c_3} и β_3 (фиг. 5.7.11а) или с отворен шлейф с дължина y_4 и параметри z_{c_4}, β_4 (фиг. 5.7.11б).

За случая от фиг.5.7.11а дължината на шлейфа y_3 е:

$$y_3 = y_{03} + \frac{n\lambda}{2}, \quad (5.7.62)$$

където n = 0, 1, 2, ... , а $\frac{\lambda}{4} < y_{03} < \frac{\lambda}{2}$. Стойността на y_3 може да се определи въз основа на моделирания товар от уравнението:

$$-\frac{1}{\omega C} = z_{c_3} \operatorname{tg} \beta_3 y_3. \quad (5.7.63)$$

Аналогично за случая от фиг. 5.19б може да се установи, че:

$$y_4 = y_{04} + \frac{n\lambda}{2}, \quad (5.7.64)$$

където $n = 0, 1, 2, \ldots$, а $0 < y_{04} < \frac{\lambda}{4}$. Стойността на y_4 може да се определи въз основа на желания товар посредством равенството:

$$-\frac{1}{\omega C} = -z_{c_4} \operatorname{cotg} \beta_4 y_4 . \qquad (5.7.65)$$

И трите разглеждани случая – режими на празен ход, на късо съединение и на чисто реактивен товар на линия без загуби, се характеризират с получаването в линията на стоящи вълни на тока и напрежението. При това върховете на напрежението и тока, а също и възлите на напрежението и тока са отместени едни спрямо други на четвърт дължина на вълната $\left(\frac{\lambda}{4}\right)$. Напрежението и токът във всяка точка от линията се различават по фаза, съответствуваща на време, равно на четвърт период $\left(t = \frac{T}{4}\right)$, т.е. когато по цялата линия напрежението има максимална стойност (в различните точки от линията максимумите са различни) , то по цялата линия токът е равен на нула. Обратно, когато по цялата линия напрежението е равно на нула , то тогава навсякъде по линията токът е достигнал максималната си стойност.

И в трите случая се образуват стоящи вълни, които характеризират отсъствие на разход на енергия, както в линията , така и в товара. При наличие на разход на енергия или в линията или в товара е неизбежно получаването на бягащи вълни, само с наличието на които може да бъде свързан процесът на предаване на енергия по линията.

Е) Режим при какъвто и да е товар

Тук се разглежда случай, при който се изключват режимите на съгласуван товар и на стоящи вълни.

В този случай товарното съпротивление Z_T се различава от вълновото съпротивление z_c на линията, т.е.: $Z_T \neq z_c$. Освен това Z_T се различава от 0, ∞ и $\pm jX_T$. Отражението от края на линията е непълно и затова коефициентите на отражение по напрежение q_u и по ток q_i от края на линията са по-малки от единица в сравнение с режимите на празен ход и късо съединение. Следователно в този случай амплитудата на отразената вълна на напрежението $\dot{U}''$, респективно на тока $\dot{I}''$, е по- малка от амплитудата на падащата вълна на напрежението $\dot{U}'$, респективно на тока $\dot{I}'$.

Тъй като правите и обратните вълни на напрежението и тока са:

$$\dot{U}' = \dot{U}'_2 e^{j\beta x} ; \qquad (5.7.66)$$

$$\dot{U}'' = \dot{U}''_2 e^{-j\beta x} ; \qquad (5.7.67)$$

$$\dot{I}' = \dot{I}''_2 e^{j\beta x} ; \qquad (5.7.68)$$

$$\dot{I}'' = -\dot{I}''_2 e^{-j\beta x} \qquad (5.7.69)$$

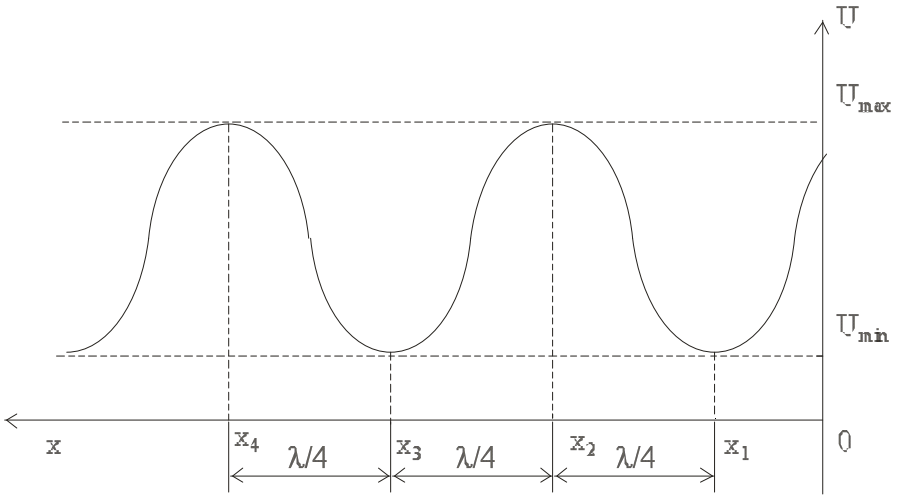
и вълновото съпротивление z_c на линия без загуби е чисто активно, то може да се установи, че правата вълна на напрежението съвпада по фаза с правата вълна на тока и съответно обратната вълна на напрежението съвпада по фаза с обратната вълна на тока.

Коефициентът на отражение по напрежение от края на линията q_u, който се изразява със съотношението:

$$q_u = \frac{Z_T - z_c}{Z_T + z_c} \qquad (5.7.70)$$

е комплексно число и има аргумент, равен на фазовата разлика между правата и обратната вълна на напрежението, съответно на тока.

При линия без загуби при режим на какъвто и да е товар не се образуват стоящи вълни. Разпределението на ефективните стойности на напрежението и тока по линията не е по синусоидален закон и минималната им стойност не е равна на нула (фиг.5.7.12).



Фиг.5.7.12

В точка с координата x_1, където правите и обратните вълни на напрежението и на тока са дефазирани на ъгъл, равен на π, напрежението е минимално, а токът - максимален (фиг.5.7.12)

$$U_{min} = U(x_1) = U'_2 - U''_2; \qquad (5.7.71)$$

$$I_{max} = I(x_1) = I'_2 + I''_2. \qquad (5.7.72)$$

В точка с координата $x_2 = x_1 + \lambda/4$ напрежението е максимално, а токът е минимален (фиг. 5.20)

$$U_{max} = U(x_2) = U'_2 + U''_2 = z_c I_{max}; \qquad (5.7.73)$$

$$I_{min} = I(x_2) = I'_2 - I''_2 = \frac{U_{min}}{z_c}. \qquad (5.7.74)$$

Минимуми на напрежението, съответно максимуми на тока, се наблюдават във всички точки с координати:

$$x = x_1 + \frac{n\lambda}{2}, \qquad (5.7.75)$$

където $n = 0, 1, 2, \ldots$.

Максимуми на напрежението, съответно минимуми на тока, има във всички точки с координати:

$$x = x_2 + \frac{n\lambda}{2}, \qquad (5.7.76)$$

където $n = 0, 1, 2, \ldots$.

Отношението на минималното напрежение U_{min} към максималното напрежение U_{max} оценява степента на съгласуване на линията с товара и се нарича коефициент на бягаща вълна:

$$к_{б.в.} = \frac{U_{min}}{U_{max}} = \frac{U_2^{'} - U_2^{''}}{U_2^{'} + U_2^{''}}, \qquad (5.7.77)$$

или още:

$$к_{б.в} = \frac{1 - \frac{U_2''}{U_2'}}{1 + \frac{U_2''}{U_2'}} = \frac{1-n}{1+n}, \qquad (5.7.78)$$

където n е модулът на коефициента на отражение, т.е.:

$$n = |q_u| = |q_i|. \qquad (5.7.79)$$

Реципрочната стойност на коефициента на бягаща вълна се нарича коефициент на стояща вълна – $к_{ст.в}$:

$$к_{ст..в.} = \frac{1}{к_{б..в.}} = \frac{U_{max}}{U_{min}} = \frac{1+n}{1-n}. \qquad (5.7.80)$$

Коефициентът на бягаща вълна в зависимост от съгласуваността с товара може да приема стойности от нула ($U_{min} = 0$ при празен ход, късо съединение и чисто реактивен товар) до единица ($U_{min} = U_{max}$ при съгласуван товар).

Съответно коефициентът на стояща вълна се изменя в диапазона от безкрайност до единица.

В реалните линии за предаване обикновено $к_{б.в.}$ е не по-малък от 0,5 ... 0,6.

Коефициентът на бягаща вълна може да се определи и чрез съотношението на минималната и максималната стойности на тока, т.е.:

$$к_{б.в.} = \frac{I_{min}}{I_{max}} = \frac{I_2' - I_2''}{I_2' + I_2''}. \qquad (5.7.81)$$

Последното равенство се получава от уравнение (5.7.77) след разделяне на числителя и знаменателя на вълновото съпротивление z_c.

Коефициентът на бягаща вълна участва в израза за входното съпротивление на линията. Например, в точките с координата $x = x_1 + \frac{n\lambda}{2}$, където напрежението има минимум, а токът – максимум, се получава:

$$Z_{вх}(x_1) = \frac{\dot{U}(x_1)}{\dot{I}(x_1)} = \frac{U_{min}}{I_{max}} = \frac{z_c I_{min}}{I_{max}} = z_c к_{б.в.}$$

В точките от линията $x = x_2 + \frac{n\lambda}{2}$, където напрежението е максимално, а токът минимален, за входното съпротивление се получава:

$$Z_{вх}(x_2) = \frac{\dot{U}(x_2)}{\dot{I}(x_2)} = \frac{U_{max}}{I_{min}} = \frac{z_c I_{max}}{I_{min}} = \frac{z_c}{к_{б.в.}}.$$

От горните изрази се установява, че в тези точки входното съпротивление е чисто активно. В останалите точки, където нито напрежението, нито тока са максимални или минимални, входното съпротивление е комплексно.

Чрез разстоянията от края на линията до точките, където напрежението или токът са минимални или максимални и чрез коефициента на бягаща вълна, може да се намери товарното съпротивление на линията.

Особен интерес представлява дълга линия без загуби с дължина, равна на четвърт дължина на вълната и натоварена с чисто активно съпротивление: $R_T \neq z_c$. Това е така, защото тя играе роля на съгласуващо устройство, понеже е идеален трансформатор на съпротивление. И действително, при $\ell = \frac{\lambda}{4}$, $\beta.\ell = \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)\left(\frac{\lambda}{4}\right) = \frac{\pi}{2}$. Тъй като $\cos\frac{\pi}{2} = 0$ и $\sin\frac{\pi}{2} = 1$, то уравненията за входното напрежение $\dot{U}_1$ и на входния ток $\dot{I}_1$ на линията са съответно:

$$\dot{U}_1 = j\dot{I}_2 z_c \text{ и } \dot{I}_1 = \frac{j\dot{U}_2}{z_c}.$$

Тъй като $\dot{U}_2 = \dot{I}_2 R_T$, то за $Z_{вх}$ се получава:

$$Z_{вх} = \frac{\dot{U}_1}{\dot{I}_1} = \frac{z_c^2}{R_T}.$$

В случая коефициентът на трансформация е равен на $\frac{z_c}{R_T}$.

Такава съгласуваща линия може да се използува между генератора и основната линия, между товара и основната линия, както и за съгласувано включване на две линии.

Линия без загуби с дължина $\ell = \frac{\lambda}{4}$ може да се използува за съгласуване на генератор ($R_г$) и товар (R_T), при което е достатъчно само тя да има вълново съпротивление: $z_c = \sqrt{R_г R_T}$.

5.8 Преходни процеси в еднородна линия

Преходни процеси във веригите с разпределени параметри, в частност в линиите, възникват при включването и изключването им, при предаване на непериодични сигнали (както е в линиите за предаване на информация), при наличие на атмосферни пренапрежения и др.

В линиите за предаване на енергия при преходен процес е възможно възникване на пренапрежения или свръхтокове. При неправилен избор на оборудването пренапреженията могат да доведат до пробиви в изолацията, до разряди между отделните части на линията и устройствата, включени към нея. Появата на свръхтокове може да изключи устройствата след включването на защитите, до обгаряния на контактите, до излизане от строя на прибори и апарати.

При линиите за предаване на информация преходните процеси могат да доведат до изкривяване на сигналите, в резултат на което да се получат лъжливи команди в системите за телеуправление, да се предават грешни данни в системите за телеизмерване и др.

При изследването на преходните процеси в линиите е необходимо да се решат системите с частни диференциални уравнения при зададените гранични и начални условия. Това решение може да стане както по класическия, така и по операторния метод.

А) Анализ на преходните процеси в еднородна неизкривяваща линия по класическия метод

По класическия метод ще бъде решена системата телеграфни уравнения:

$$\begin{cases} -\dfrac{\partial u}{\partial x} = R_0 i + L_0 \dfrac{\partial i}{\partial t}; \\ -\dfrac{\partial i}{\partial x} = G_0 u + C_0 \dfrac{\partial u}{\partial t}. \end{cases} \qquad (5.8.1)$$

Разглеждането се прави за частния случай на неизкривяваща линия, т.е. когато е изпълнено условието $R_0 C_0 = G_0 L_0$.

Ако се положи: $\dfrac{R_0}{L_0} = \dfrac{G_0}{C_0} = \delta$, $u = u_1 e^{-\delta t}$ и $i = i_1 e^{-\delta t}$, то тогава:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u_1}{\partial x} e^{-\delta t}; \quad \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u_1}{\partial t} e^{-\delta t} - \delta u_1 e^{-\delta t};$$

$$\frac{\partial i}{\partial x} = \frac{\partial i_1}{\partial x} e^{-\delta t}; \quad \frac{\partial i}{\partial t} = \frac{\partial i_1}{\partial t} e^{-\delta t} - \delta i_1 e^{-\delta t}.$$

След заместване на намерените по-горе производни в уравнения (5.8.1) и след съкращаване на $e^{-\delta t}$, се получава системата:

$$\begin{cases} -\dfrac{\partial u_1}{\partial x} = L_0 \dfrac{\partial i_1}{\partial t}; \\ -\dfrac{\partial i_1}{\partial x} = C_0 \dfrac{\partial u_1}{\partial t}. \end{cases} \qquad (5.8.2)$$

Диференцират се първото уравнение на (5.8.2) по отношение на x, а второто уравнение на (5.8.2) - по отношение на t. Тогава се получава :

$$\begin{cases} -\dfrac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} = L_0 \dfrac{\partial^2 i_1}{\partial x \partial t}; \\ -\dfrac{\partial^2 i_1}{\partial x \partial t} = C_0 \dfrac{\partial^2 u_1}{\partial t^2}. \end{cases} \qquad (5.8.3)$$

Оттук се намира уравнението:

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} = L_0 C_0 \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2}. \qquad (5.8.4)$$

Ако се положи $L_0 C_0 = \dfrac{1}{v_\phi}$, се достига до вълновото уравнение:

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} = v_\varphi \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}. \qquad (5.8.5)$$

Вместо x и t се въвеждат нови променливи:

$$\xi = x - v_\phi t \ , \tag{5.8.6}$$

$$\eta = x + v_\phi t \ . \tag{5.8.7}$$

Като се има предвид, че:

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = 1; \ \frac{\partial \eta}{\partial x} = 1 \ ; \ \frac{\partial \xi}{\partial t} = - v_\phi \ ; \ \frac{\partial \eta}{\partial t} = v_\phi \ ;$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial x} = \frac{\partial u_1}{\partial \xi} + \frac{\partial u_1}{\partial \eta} \ ; \ \frac{\partial u_1}{\partial t} = - v_\varphi \frac{\partial u_1}{\partial \xi} + v_\varphi \frac{\partial u_1}{\partial \eta} \ ;$$

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u_1}{\partial \xi^2} + 2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial \eta^2} \ ;$$

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} = v_\varphi^2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial \xi^2} - 2 v_\varphi^2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial \xi \partial \eta} + v_\varphi^2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial \eta^2} \ ,$$

то след заместване на намерените производни във вълновото уравнение (5.8.5) се получава, че:

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial \xi \partial \eta} = 0 \text{ или още: } \frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{\partial u_1}{\partial \eta} \right) = 0 \ .$$

Оттук след интегриране се намира:

$$\frac{\partial u_1}{\partial \eta} = \vartheta(\eta) \text{ и } u_1 = \int \vartheta(\eta) \partial \eta + \varphi(\xi) \ .$$

Ако се положи: $\int \vartheta(\eta) \partial \eta = \psi(\eta)$, то се получава:

$$u_1 = \varphi(x - v_\varphi t) + \psi(x + v_\varphi t) \tag{5.8.8}$$

и следователно за напрежението $u(x,t)$ ще се получи решението:

$$u = u(x,t) = \left[\varphi(x - V_\varphi t) + \psi(x + v_\varphi t) \right] \cdot e^{-\delta t} \ . \tag{5.8.9}$$

За намиране на тока i_1 се замества напрежението u_1 (уравнение (5.8.8)) във второто уравнение на система (5.8.2), при което се получава:

$$- \frac{\partial i_1}{\partial x} = C_0 \frac{\partial [\varphi(\xi) + \psi(\eta)]}{\partial t} = C_0 \left[\frac{\partial \varphi}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial t} \right] =$$

$$= C_0 V_\phi \left[- \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} + \frac{\partial \psi}{\partial \eta} \right] = - \sqrt{\frac{C_0}{L_0}} \cdot \left[\frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \right] . \tag{5.8.10}$$

Тъй като $\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \varphi}{\partial \xi}$ и $\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial \eta}$, то след интегриране се намира:

$$i_1 = \sqrt{\frac{C_0}{L_0}} \cdot \left[\varphi\left(x - v_\phi t\right) - \psi\left(x + v_\phi t\right) + f\left(t\right)\right].$$

В израза за тока i, може да се съдържа функцията $f(t)$, която е функция само на t, тъй като: $\frac{\partial f\left(t\right)}{\partial t} = 0$. За определянето на $f(t)$ може в първото уравнение на система (5.8.2) да се заместят намерените изрази за u_1 (уравнение (5.8.8)) и i_1 (уравнение (5.8.10)), от което се получава, че: $\frac{\partial f\left(t\right)}{\partial t} = 0$. Следователно $f(t) = A = \text{const}$. Възможно е да се положи: $A = 0$ или $A \neq 0$. При втория случай вместо φ и ψ ще се въведат функциите: $\varphi_1 = \varphi + \frac{A}{2}$ и $\psi_1 = \psi_1 - \frac{A}{2}$, след което биха се получили изрази за u_1 и i_1, в които константата A влиза неявно. Затова може да се запише:

$$i_1 = \sqrt{\frac{C_0}{L_0}} \cdot \left[\varphi\left(x - v_\phi t\right) - \psi\left(x + v_\phi t\right)\right] \qquad (5.8.11)$$

и следователно за тока $i = i(x,t)$ в линията се получава решението:

$$i = \sqrt{\frac{C_0}{L_0}} \cdot \left[\varphi\left(x - v_\phi t\right) - \psi\left(x + v_\phi t\right)\right].e^{-\delta t}, \qquad (5.8.12)$$

където $\sqrt{\frac{C_0}{L_0}}$ представлява вълновата проводимост на неизкривяващата линия.

Получените изрази за напрежението u и тока i могат да се запишат и в друг вид, като се вземе под внимание, че: $\delta^2 = \frac{R_0}{L_0} \cdot \frac{G_0}{C_0} = \alpha^2 v_\phi^2$ и $\delta t = \alpha v_\phi t$, където $\alpha = \sqrt{R_0 G_0}$ е коефициентът на затихване на неизкривяващата линия и следователно:

$$e^{-\delta t} = e^{-\alpha v_\phi t} = e^{\alpha\left(x - v_\phi t\right)} e^{-\alpha x} = e^{-\alpha\left(x + v_\phi t\right)} e^{\alpha x}. \qquad (5.8.13)$$

Въз основа на равенство (5.8.13) изразите за u и i могат да се дадат във вида:

$$\begin{cases} u = \varphi'\left(x - v_\phi t\right) \cdot e^{-\alpha x} + \psi'\left(x + v_\phi t\right) \cdot e^{\alpha x}; \\ i = \sqrt{\frac{C_0}{L_0}} \cdot \left[\varphi'\left(x - v_\phi t\right) \cdot e^{-\alpha x} - \psi'\left(x + v_\phi t\right) \cdot e^{\alpha x}\right], \end{cases} \qquad (5.8.14)$$

при което трябва да се има предвид, че функциите φ' и ψ' в последните изрази се различават от функциите φ и ψ в изразите за напрежението и тока ((5.8.9) и (5.8.12)) съответно с множителите $e^{\alpha\left(x - v_\phi t\right)}$ и $e^{-\alpha\left(x + v_\phi t\right)}$.

Може да се отбележи, че система уравнения (5.8.14) дава само общия вид на решението на диференциалните уравнения, определящо характера на функционалните зависимости на напрежението u и тока i от пространствената

координата x и времето t. Конкретният вид на функциите $\varphi(x - v_\phi t)$ и $\psi(x + v_\phi t)$ се определя от конкретните условия на задачата.

В) Решение на уравненията на еднородна неизкривяваща линия при преходен процес по операторния метод

Диференциалните уравнения на еднородна линия (5.8.1) могат да се решат при съответните начални и гранични условия и с помощта на операторния метод. Основните етапи на това решение са:

1) Функциите $u(x,t)$ и $i(x,t)$ се заменят с техните операторни образи по променливата t, като се използва трансформацията на Лаплас:

$$u(x,t) \rightleftharpoons U(x,p) = \int_0^\infty u(x,t)\cdot e^{-pt}\,dt\ ; \tag{5.8.15}$$

$$i(x,t) \rightleftharpoons I(x,p) = \int_0^\infty i(x,t)\cdot e^{-pt}\,dt\,. \tag{5.8.16}$$

2) Системата телеграфни уравнения, записани за операторните образи на напрежението $U(x,p)$ $u(x,t)$ и за тока $I(x,p)$ $i(x,t)$, ще има вида:

$$\left|\begin{array}{l} -\dfrac{dU(p,x)}{dx} = (R_0 + pL_0).I(p,x) - L_0 i(0,x); \\ -\dfrac{dI(p,x)}{dx} = (G_0 + pC_0).U(p,x) - C_0 u(0,x). \end{array}\right. \tag{5.8.17}$$

От свойствата на трансформацията на Лаплас следват равенствата:

$$\frac{\partial}{\partial t}u(t,x) \rightleftharpoons pU(p,x) - u(0,x), \tag{5.8.18}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}i(t,x) \rightleftharpoons pI(p,x) - i(0,x) \tag{5.8.19}$$

както и равенствата:

$$\frac{\partial}{\partial x}u(t,x) \rightleftharpoons \frac{\partial}{\partial x}U(p,x), \tag{5.8.20}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}i(t,x) \rightleftharpoons \frac{\partial}{\partial x}I(p,x). \tag{5.8.21}$$

В равенства (5.8.18) и (5.8.19) $i(0,x)$ и $u(0,x)$ са разпределенията на тока и напрежението по линията в началния момент $t = 0$.

В уравнения (5.8.18) и (5.8.19) частните производни по x се заменят с обикновени производни, тъй като трансформацията на Лаплас по отношение на времето (във временната област) свежда оригиналите $u(t,x)$ и $i(t,x)$ до операторните образи $U(p,x)$ и $I(p,x)$, които са функции само на една независима променлива. Операторът p играе роля на постоянен параметър.

Системата уравнения (5.8.17) се опростява при нулеви начални условия, т.е.:

$$\left[u(t,x)\right]_{t=0} = 0;\ \left[i(t,x)\right]_{t=0} = 0$$

и добива вида:

$$\begin{cases} -\dfrac{dU(p,x)}{dx} = (R_0 + pL_0).I(p,x); \\ -\dfrac{dI(p,x)}{dx} = (G_0 + pC_0).U(p,x). \end{cases} \qquad (5.8.22)$$

По структура уравненията на система (5.8.22) не се отличават от уравненията на еднородна линия в комплексен вид (вж. 5.3) и имат аналогични решения:

$$\begin{cases} U(p,x) = A_1.e^{-\gamma(p)x} + A_2.e^{\gamma(p)x}; \\ I(p,x) = \dfrac{1}{Zc(p)}\left(A_1.e^{-\gamma(p)x} - A_2.e^{\gamma(p)x}\right). \end{cases} \qquad (5.8.23)$$

В случая $\gamma(p)$ е операторната константа на разпространение и има вида:

$$\gamma(p) = \sqrt{(R_0 + pL_0)(G_0 + pC_0)}\ , \qquad (5.8.24)$$

а $Z_c(p)$ е операторното вълново съпротивление и се определя с израза:

$$Z_c(p) = \sqrt{\frac{(R_0 + pL_0)}{(G_0 + pC_0)}}. \qquad (5.8.25)$$

Очевидно е, че в сравнение с комплексните решения на телеграфните уравнения в последните формули $j\omega$ се заменя с оператора p.

Константите A_1 и A_2 не зависят от променливата x, по отношение на която се търси решението, но могат да бъдат функция на оператора p, който в случая е параметър, т.е.:

$A_1 = A_1(p)$ и съответно $A_2 = A_2(p)$.

Решението на уравненията относно напрежението и тока има относително проста форма в случая на линия без изкривявания. Тогава за $Z(p)$ се получава:

$$Z_c(p) = \sqrt{\frac{L_0}{C_0}}\ , \qquad (5.8.26)$$

тъй като за такава линия е изпълнено условието на Хевисайд (вж. 5.5):

$$\frac{R_0}{L_0} = \frac{G_0}{C_0}.$$

Съответно за операторната константа на разпространение $\gamma(p)$ се намира:

$$\gamma(p) = \sqrt{R_0 G_0} + p\sqrt{L_0 C_0} = \alpha + \frac{p}{v_\phi},$$

тъй като $v_\phi = \frac{1}{\sqrt{L_0 C_0}}$.

Операторните решения тогава се записват във вида:

$$\begin{cases} U(p,x) = \left[A_1(p) e^{-\frac{p}{v_\phi}x} \right] e^{-\alpha x} + \left[A_2(p) e^{\frac{p}{v_\phi}x} \right] e^{\alpha x}; \\ I(p,x) = \sqrt{\frac{C_0}{L_0}} \left\{ \left[A_1(p) e^{-\frac{p}{v_\phi}x} \right] e^{-\alpha x} - \left[A_2(p) e^{\frac{p}{v_\phi}x} \right] e^{\alpha x} \right\}. \end{cases} \qquad (5.8.28)$$

Функциите-оригинали $u(t,x)$ и $i(t,x)$ могат да се намерят като се приложи трансформацията на Риман – Мелин (обратната трансформация на Лаплас) :

$$u(t,x) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma_0 - j\infty}^{\sigma_0 + j\infty} U(p,x) e^{pt} dp =$$

$$= e^{-\alpha x} \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma_0 - j\infty}^{\sigma_0 + j\infty} \left[A_1(p) e^{-\frac{p}{v_\phi}x} \right] e^{pt} dp + e^{\alpha x} \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma_0 - j\infty}^{\sigma_0 + j\infty} \left[A_2(p) e^{\frac{p}{v_\phi}x} \right] e^{pt} dp .$$

Ако интегралът

$$\frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma_0 - j\infty}^{\sigma_0 + j\infty} \left[A_1(p) e^{-\frac{p}{v_\phi}x} \right] e^{pt} dp$$

се запише във вида:

$$\frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma_0 - j\infty}^{\sigma_0 + j\infty} A_1(p) e^{-\frac{p}{v_\phi}(x - v_\phi t)} dp ,$$

то тогава решението му ще бъде функция от вида: $\varphi = \varphi(s_1)$, където $s_1 = x - v_\phi t$.

Аналогично от втория интеграл се получава:

$$\frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma_0 - j\infty}^{\sigma_0 + j\infty} \left[A_2(p) e^{\frac{p}{v_\phi}x} \right] e^{pt} dp = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma_0 - j\infty}^{\sigma_0 + j\infty} A_2(p) e^{\frac{p}{v_\phi}(x - v_\phi t)} dp ,$$

при което решението му ще бъде: $\psi = \psi(s_2)$, където $s_2 = x + v_\phi t$.

Окончателно за $u(t,x)$ се достига до израза:

$$u(t, x) = \varphi(x - v_\varphi t) \cdot e^{-\alpha x} + \psi(x + v_\varphi t) \cdot e^{\alpha x} . \qquad (5.8.29)$$

Съответно за тока $i(t, x)$ ще се получи:

$$i(t,x) = \sqrt{\frac{C_0}{L_0}}\left[\varphi\left(x - v_\phi t\right)\cdot e^{-\alpha x} - \psi\left(x + v_\phi t\right)\cdot e^{\alpha x}\right]. \qquad (5.8.30)$$

Получените изрази (5.8.29) и (5.8.30) напълно съвпадат с тези, намерени в 5.8.А) при използването на класическия метод за изследване на преходни процеси в еднородна неизкривяваща линия.

С) Вълни в неизкривяваща линия

Разглеждат се уравнения (5.8.29) и (5.8.30) за случая на линия без загуби, т.е. когато се полага: $R_0 = 0$ и $G_0 = 0$, при което $\alpha = 0$. Следователно $\delta = 0$, $e^{-\delta t} = 1$, а също и $e^{-\alpha x} = e^{\alpha x} = 1$ и системата уравнения за линия без загуби добива вида:

$$\begin{cases} u = \varphi\left(x - v_\varphi t\right) + \psi\left(x + v_\varphi t\right) = u_\varphi + u_\psi; \\ i = \sqrt{\frac{C_0}{L_0}}\left[\varphi\left(x - v_\phi t\right) - \psi\left(x + v_\phi t\right)\right] = i_\varphi + i_\psi, \end{cases} \qquad (5.8.31)$$

или за тока може да се запише:

$$i = \frac{u_\varphi}{z_c} - \frac{u_\psi}{z_c}. \qquad (5.8.32)$$

Функцията $u_\varphi = \varphi(x - v_\phi t)$ определя правата вълна на напрежението, разпространяваща се по линията със скорост v_ϕ, т.е. вълната на напрежението, бягаща по линията от началото към края й и непретърпяваща изменение. Нарича се още падаща вълна.

Аналогично функцията $u_\psi = \psi(x + v_\phi t)$ определя обратната вълна на напрежението. Тя се разпространява по линията без изменение и със скорост $-v_\phi$, т.е. се движи от края към началото на линията. Тя се нарича още отразена вълна.

Токът в линията i също е сума от две вълни:

$i_\varphi = \frac{u_\varphi}{z_c}$ - падаща или права вълна на тока;

$i_\psi = -\frac{u_\psi}{z_c}$ - отразена или обратна вълна на тока.

Наличието в изразите (5.8.29) и (5.8.30) на множителите $e^{-\alpha x}$ и $e^{\alpha x}$, при което $\alpha = \sqrt{R_0 G_0}$ показва, че при наличие на загуби ($R_0 \neq 0$, $G_0 \neq 0$) двете вълни при придвижването си затихват по линията по експоненциален закон.

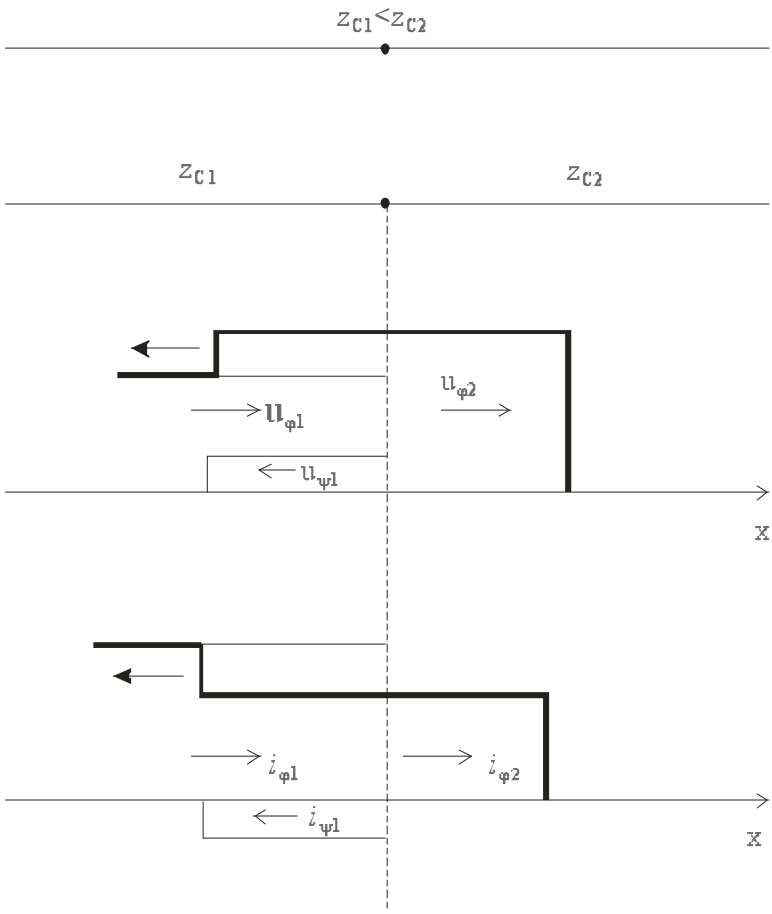
Причината за това затихване е превръщането на началните запаси на енергия на електрическото и магнитното полета, свързани с линията, в топлина, отделяща се в проводниците ($R_0 \neq 0$) и обкръжаващата среда ($G_0 \neq 0$), именно поради наличието на загубите.

Възникването на вълните в линиите е свързано обикновено или с атмосферни разряди или с превключвания в линиите, т.е. с включването и изключването на самите линии или с включването и изключване на устройства към линиите.

При изучаването на явленията, свързани с превключванията, в тези случаи когато дължината ℓ на линията е много по-малка от дължината на вълната λ, се предполага, че външните електродвижещи напрежения (ЕДН) са постоянни. Това предположение е допустимо, защото разглежданите явления протичат толкова бързо, че при синусоидално ЕДН, имащо честота от порядъка на десетки херци, стойността на това ЕДН за времето на пробягване на вълната по цялата линия, може да се промени твърде незначително. Освен това се смята, че процесите на превключване се осъществяват мигновено. В съответствие с тези предположения по-нататък се приема, че вълните на напрежението и тока, постъпващи в линията от външния източник на ЕДН, имат правоъгълна форма.

Д) Пречупване и отражение в мястото на свързване на две еднородни линии

Предполага се, че вълната φ_1, бягаща от източника на ЕДН по еднородната линия, имаща вълново съпротивление z_{c_1}, е достигнала края й, в който е свързана друга еднородна линия, имаща вълново съпротивление z_{c_2}. Означавайки с u_1 и i_1 напрежението и тока в първата линия, а с u_2 и i_2 - във втората линия, то в мястото на свързване на двете линии трябва да бъдат изпълнени следните равенства:



Фиг. 5.8.1

$$u_1 = u_2; \qquad (5.8.33)$$

$$i_1 = i_2. \qquad (5.8.34)$$

Предполага се, че във втората линия до идването на вълната φ_1 от първата линия, не е имало напрежение. Тогава непосредствено след идването на вълната φ_1 до обезателно ще възникне вълна ψ_1, бягаща в обратна посока и наречена отразена вълна, тъй като иначе не могат да бъдат удовлетворени условията за равенство на напреженията и токовете в мястото на свързване на двете линии. Затова, отбелязвайки с φ_1, ψ_1 и φ_2 съответно падащата, отразената и пречупената вълни, то в мястото на свързване на двете линии трябва да бъдат изпълнени равенствата:

$$\begin{cases} u_1 = u_{\varphi_1} + u_{\psi_1} = u_{\varphi_2} = u_2; \\ i_1 = \dfrac{u_{\varphi_1} - u_{\psi_1}}{z_{c_1}} = \dfrac{u_{\varphi_2}}{z_{c_2}} = i_2. \end{cases}$$

Оттук се получава :

$$u_{\varphi 2} = \frac{2 z_{c 2}}{z_{c 1} + z_{c 2}} u_{\varphi 1} ; \qquad (5.8.36)$$

$$u_{\psi 1} = \frac{z_{c 2} - z_{c 1}}{z_{c 2} + z_{c 1}} u_{\varphi 1} ; \qquad (5.8.37)$$

$$i_{\varphi 2} = \frac{2 z_{c 2}}{z_{c 1} + z_{c 2}} i_{\varphi 1} ; \qquad (5.8.38)$$

$$i_{\psi 1} = \frac{z_{c 1} - z_{c 2}}{z_{c 2} + z_{c 1}} i_{\varphi 1} . \qquad (5.8.39)$$

От тези съотношения следва, че в дадения случай пречупените и отразените вълни имат същата форма, както и падащите вълни. Отношенията $\frac{u_{\varphi_2}}{u_{\varphi_1}}$ и $\frac{i_{\varphi_2}}{i_{\varphi_1}}$ могат да се разглеждат като коефициенти на пречупване, а отношенията $\frac{u_{\psi_1}}{u_{\varphi_1}} = q_u$ и $\frac{i_{\psi_1}}{i_{\varphi_1}} = q_i$ - като коефициенти на отражение.

От изразите, получени за пречупените и отразените вълни следва, че пречупените вълни на напрежението и тока имат същия знак, както падащите вълни, а при отразените вълни едната вълна запазва знака на падащата вълна, а другата вълна има обратен знак.

Например, при $z_{c_2} > z_{c_1}$, както е при преминаването на вълната от кабелна във въздушна линия, пречупената вълна на напрежението е по-голяма от падащата, а пречупената вълна на тока е по-малка от падащата. В този случай отразената вълна на напрежението е със същия знак, както на падащата вълна, а отразената вълна на тока има обратен знак спрямо падащата, при което по големина и двете отразени вълни са по-малки от съответните падащи вълни. При това поради наслагването на отразената и падащата вълна в първата линия, то токът в първата линия се намалява, а напрежението нараства, но не повече от два пъти. На фиг.5.8.1 са показани падащите, отразените и пречупените вълни на напрежението и тока за случая $z_{c_2} > z_{c_1}$. Очевидно е, че даже при много големи стойности на z_{c_2}, пречупената вълна на напрежението превишава падащата вълна не повече от два пъти.

При случая, когато $z_{c_1} > z_{c_2}$ пречупената вълна на напрежението е по-малка от падащата, а пречупената вълна на тока е по-голяма от падащата. В този случай при отражението се променя знакът на вълната на напрежението, а големините на двете отразени вълни пак ще бъдат по-малки от големините на съответните падащи вълни. Вследствие на наслагването на отразените вълни падащата вълна на напрежението в първата линия намалява, а тази на тока нараства, но не повече от два пъти (фиг.5.8.2).

Очевидно е,че даже при много малки стойности на z_{c_2} пречупената вълна на тока не може да превиши падащата повече от два пъти.

Разглеждайки мощността p в мястото на свързване на линиите, може да се запише:

$$p = u_1 i_1 = u_2 i_2 \qquad (5.8.40)$$

или

$$\frac{\left(u_{\varphi 1}+u_{\psi 1}\right)\left(u_{\varphi 1}-u_{\psi 1}\right)}{z_{c_1}}=\frac{u_{\varphi 1}^2}{z_{c_1}}-\frac{u_{\psi 1}^2}{z_{c_1}}=\frac{u_{\varphi 2}^2}{z_{c_2}} \qquad (5.8.41)$$

и следователно:

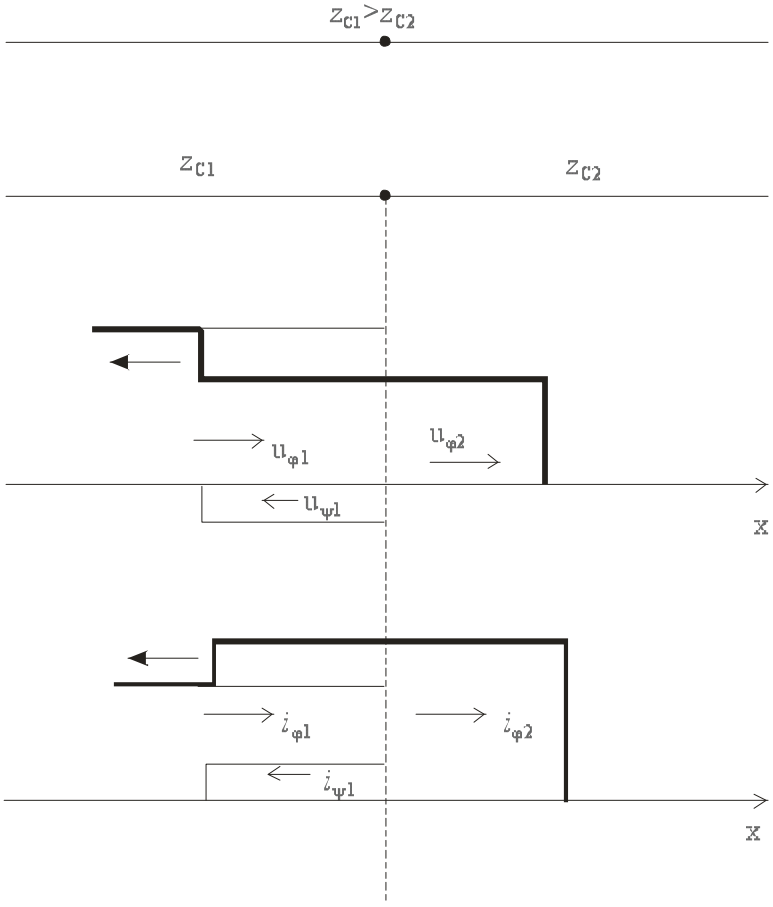
$$\frac{u_{\varphi_1}^2}{z_{c_1}}=\frac{u_{\psi_1}^2}{z_{c_1}}+\frac{u_{\varphi_2}^2}{z_{c_2}}; \qquad (5.8.42)$$

т.е.:

$$p_{\varphi_1}=p_{\psi_1}+p_{\varphi_2}, \qquad (5.8.43)$$

където p_{φ_1}, p_{ψ_1} и p_{φ_2} са съответно мощностите на падащата, отразената и пречупената вълни. Оттук следва, че част от мощността на падащата вълна е равна на мощността на пречупената вълна, преминаваща във втората линия, а останалата част е равна на мощността на отразената вълна, връщаща се в първата линия.

От изложеното по-горе следва, че при преминаване на вълните на напрежението от линии с по-малко вълново съпротивление в линии с по-голямо вълново съпротивление напрежението нараства и в граничния случай то превишава напрежението на падащата вълна двукратно. Затова напрежението нараства при преминаване на вълни от кабелни във въздушни линии и от линии за предаване в намотките на трансформатор, който може да се разглежда като линия с по-голямо вълново съпротивление, превишаващо съпротивлението на въздушната линия.



Фиг. 5.8.2

Вълните, възникващи в линиите, се разпространяват по тях с крайна скорост и затова могат да доведат до значителни пренапрежения между съседните точки на линията, в някои от които вълната на напрежението вече е преминала. Тези

пренапрежения са толкова по-големи, колкото фронтът на вълната е по-стръмен и са най-големи при отвесен фронт на вълната. Във връзка с това първите навивки на намотката на трансформаторите в съответните случаи се правят с усилена изолация.

Е) Отражение на вълните от края на линията

Предполага се, че вълните на напрежението и тока са достигнали края на линия, която има вълново съпротивление z_c и е натоварена с възможно най-сложна верига със съсредоточени параметри. В резултат на отражението на падащите вълни φ от края на линията, възникват отразени вълни ψ и за напрежението u и тока i в края на линията, или с други думи за напрежението и тока в товара, ще се получи:

$$\begin{cases} u = u_\varphi + u_\psi ; \\ i = i_\varphi + i_\psi = \dfrac{\left(u_\varphi - u_\psi\right)}{z_c}, \end{cases} \qquad (5.8.44)$$

т.е.:

$$z_c i = \left(u_\varphi - u_\psi\right), \qquad (5.8.45)$$

откъдето:

$$2u_\varphi = z_c i + u. \qquad (5.8.46)$$

От зависимост (5.8.46) следва, че токът i може да се намери като ток, възникващ в еквивалентна верига, включена към напрежение $2u_\varphi$ и съставена от активно съпротивление, равно на вълновото съпротивление z_c на линията и последователно съединен към него товар на линията.

След определяне тока i по зададени u_φ, z_c и параметри на товарната верига на линията, могат да бъдат намерени отразените вълни на тока и напрежението от системата:

$$\begin{cases} u_\psi = u_\varphi - z_c i ; \\ i_\psi = -\dfrac{u_\psi}{z_c}. \end{cases} \qquad (5.8.47)$$

При разглежданите по-нататък примери се предполага, че ЕДН на източника на падащи вълни е постоянно.

Пример 1

В края на линията е включен резистор със съпротивление R_0, т.е. товарът й е чисто активен.

Тогава еквивалентната верига се състои от два последователно свързани резистора със съпротивления z_c и R_0 и се получава:

$$i = \frac{2u_\varphi}{\left(z_c + R_0\right)}; \qquad (5.8.48)$$

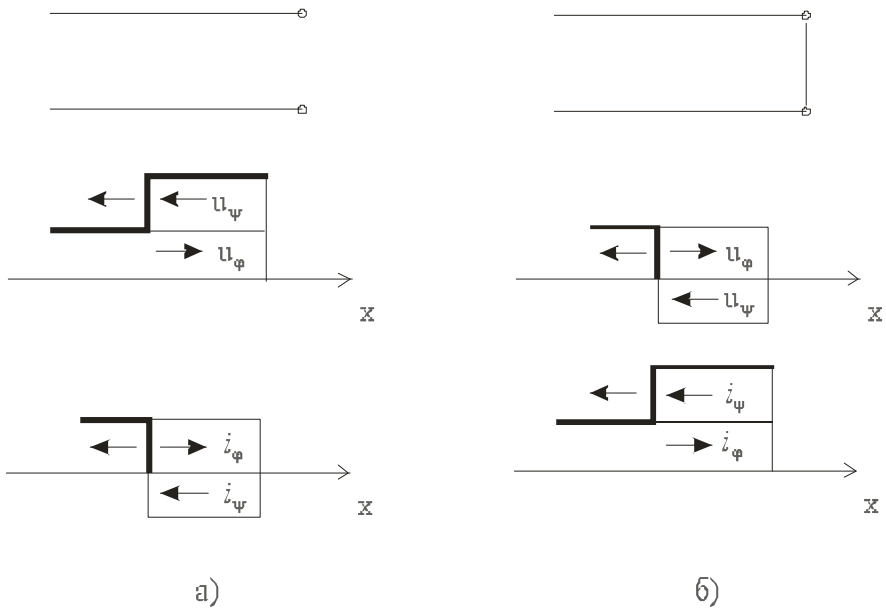
$$u_\psi = u_\varphi - z_c i = \frac{R_0 - z_c}{R_0 + z_c} u_\varphi ; \qquad (5.8.49)$$

$$i_\psi = -\frac{u_\psi}{z_c} = \frac{z_c - R_0}{z_c + R_0} i_\varphi . \qquad (5.8.50)$$

Следователно в този случай се получават аналогични съотношения между отразените и падащите вълни, както в случая на отражение на вълните в мястото на свързване на две линии, с тази разлика, че вместо вълновото съпротивление на втората линия тук участва съпротивлението R_0 на резистора, включен в края на разглежданата линия. При това за мощността p в края на линията се записва:

$$p = ui = \frac{(u_\varphi + u_\psi)(u_\varphi - u_\psi)}{z_c} = \frac{u_\varphi^2}{z_c} - \frac{u_\psi^2}{z_c} = p_\varphi - p_\psi . \qquad (5.8.51)$$

т.е. тази мощност се поглъща от товара и тя е равна на разликата от мощностите на падащата и отразената вълни. Ако съпротивлението R_0 е равно на вълновото съпротивление z_c на линията, то отразена вълна не възниква и цялата мощност се поглъща от товара.



Фиг. 5.8.3

От получените изрази за u_ψ и i_ψ може да се установи съотношението между падащите и отразените вълни в случай на отражение от края на отворена или дадена на късо линия. При отворена линия се полага $R_0 \to \infty$ и в края на линията се получава:

$u_\psi = u_\varphi$ и $i_\psi = -i_\varphi$.

При линия, дадена в края на късо ($R_0 = 0$), се получава:

$u_\psi = -u_\varphi$ и $i_\psi = i_\varphi$.

т.е. в тези случаи отразените вълни имат същите стойности както падащите, при което при отворена линия с променен знак се отразява вълната на тока, а при късо съединена – вълната на напрежението (фиг. 5.8.3). По такъв начин в резултат от наслагването на падащата и отразената вълни при отворена линия напрежението в края й нараства два пъти, а при дадена на късо линия токът в края й нараства също два пъти. Това може да се получи и при изследване отражението на вълните в мястото на свързване на две линии, полагайки в изразите съответно $z_{c_2} \to \infty$ и $z_{c_2} = 0$.

Това може да се поясни по следния начин: И при празен ход и при късо съединение в края на линията падащите вълни със съответната им енергия напълно се отразяват от края на линията, тъй като там енергия не се консумира.

Пример 2

В края на линията е включена последователна R_0, L_0 – верига.

В този случай еквивалентната схема се състои от последователно съединени резистор със съпротивление ($z_c + R_0$) и бобина с индуктивност L_0. При $u_\varphi = \text{const}$ за тока се получава:

$$i = \frac{2u_\varphi}{z_c + R_0}\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right), \qquad (5.8.53)$$

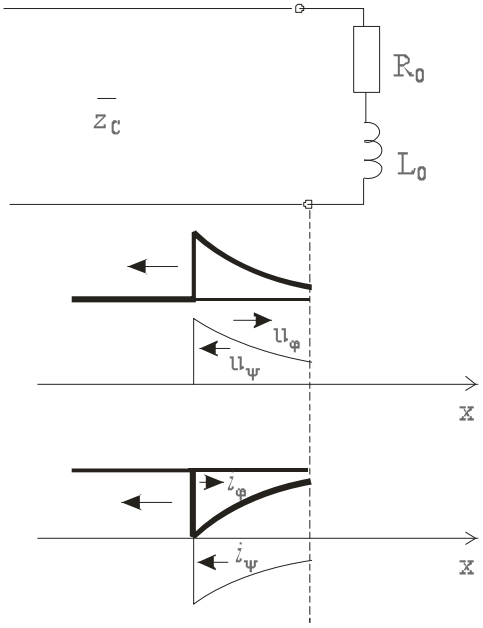
където

$$\tau = \frac{L_0}{(z_c + R_0)}.$$

За u_ψ и i_ψ се намират изразите:

$$\begin{cases} u_\psi = \left(\dfrac{R_0 - z_c}{R_0 + z_c} + \dfrac{2z_c}{R_0 + z_c}e^{-\frac{t}{\tau}}\right)u_\varphi; \\ i_\psi = \left(\dfrac{z_c - R_0}{R_0 + z_c} + \dfrac{2z_c}{R_0 + z_c}e^{-\frac{t}{\tau}}\right)i_\varphi. \end{cases} \qquad (5.8.53)$$

Ако в горните изрази се положи $t = 0$, е очевидно, че в първия момент отражението от последователна R_0, L_0 - верига се извършва така както при отворена линия. Полагайки $t \to \infty$(когато теоретично приключва преходният процес), токът и напрежението достигат стойности, както при линия, в края на която е включен резистор със съпротивление R_0.



Фиг. 5.8.4

На фиг.5.8.4 са показани падащите, отразените вълни на напрежението и тока за случая на включване в края на линията на последователна R_0, L_0 – верига.

Пример 3

В края на линията е включена последователна R_0, C_0 - верига.

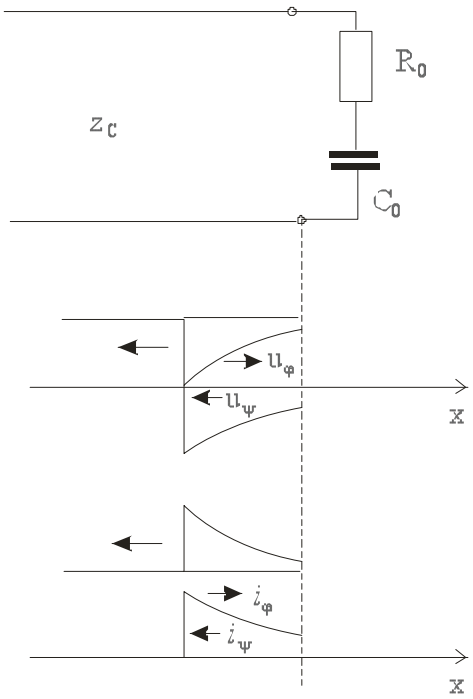
Тогава еквивалентната схема се състои от последователно съединени резистор със съпротивление ($z_c + R_0$) и кондензатор с капацитет C_0 и при $u_\varphi = \text{const}$ за тока i се получава:

$$i = \frac{2u_\varphi}{z_c + R_0}e^{-\frac{t}{\tau}}, \qquad (5.8.54)$$

където $\tau = (z_c + R_0)C_0$.

За u_ψ и i_ψ в този случай се намират изразите:

$$\begin{cases} u_\psi = \left(1 - \dfrac{2z_c}{R_0 + z_c} e^{-\frac{t}{\tau}}\right) u_\varphi ; \\ i_\psi = \left(-1 + \dfrac{2z_c}{R_0 + z_c} e^{-\frac{t}{\tau}}\right) i_\varphi . \end{cases} \qquad (5.8.55)$$



Фиг. 5.8.5

Ако в горните изрази се положи $t = 0$ се вижда, че в началния момент отражението от последователна R_0, C_0 - верига се извършва така както при линия, в края на която е включен резистор със съпротивление R_0.

При полагането $t \to \infty$, т.е. когато завършва преходният процес, токът и напрежението достигат стойности, както при линия, както в случая на отворена на края линия.

На фиг.5.8.4 са показани падащите и отразените вълни на напрежението и тока за случая на включване в края на линията на последователна R_0, C_0 – верига.

VI. НЕЛИНЕЙНИ ЕЛЕКТРИЧЕСКИ ВЕРИГИ

Встъпителни бележки

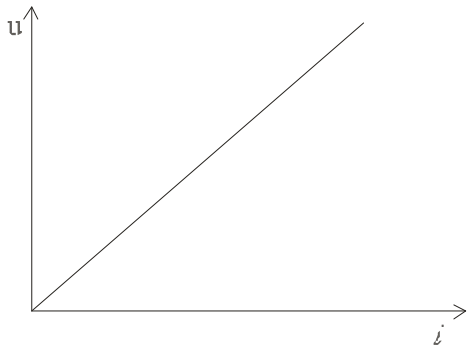
В раздела се дават основни понятия за нелинейни електрически вериги, а също така за нелинейни елементи и техните параметри и характеристики. Разглеждат се методите за анализ на постоянни и периодични режими и преходни процеси в нелинейни електрически вериги. В раздела се отделя внимание и на въпроси, свързани с устойчивостта на режимите в нелинейните електрически вериги.

6.1. Нелинейни електрически вериги. Елементи. Параметри

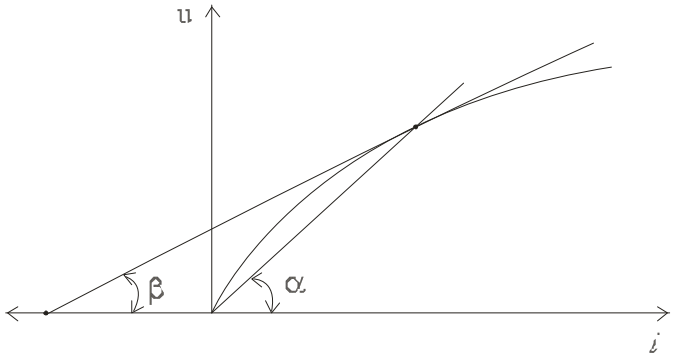
Нелинейни електрически вериги са такива електрически вериги, чиито елементи имат параметри, които зависят от режима, т.е. от тока и напрежението. При строго разглеждане всички електрически вериги са нелинейни. В повечето случаи тази нелинейност е слабо изразена и може да бъде пренебрегната, с което се облекчава анализът, без това да се отрази силно на резултатите. Съществуват обаче елементи, при който нелинейността е рязко изразена и пренебрегването ѝ е недопустимо. Свойствата на тези елементи позволяват създаването на нови устройства (изправители, усилватели, генератори и др.), които с линейни елементи не могат да бъдат реализирани.

Процесите в нелинейните електрически вериги се описват от системи нелинейни алгебрични и диференциални уравнения, които се съставят въз основа на законите на Кирхоф. За аналитичното решаване на тези уравнения е необходимо характеристиките на нелинейните елементи да бъдат изразени аналитично. Често пъти аналитичното описание на характеристиките е невъзможно или е много сложно. Поради това се използват аналитични изрази, описващи приблизително характеристиките (метод на аналитичната апроксимация), с което се намалява точността на получените резултати. По-голяма точност се получава при графичните и графоаналитичнте методи за анализ, тъй като при тях се използуват действителните характеристики на нелинейните елементи. Тези методи, обаче не позволяват да се изследват процесите във веригите при промяна на параметрите им.

Зависимостта между напрежението и тока за даден елемент се нарича волт-амперна (V-A) характеристика. На фиг.6.1.1 е показана V-A характеристика на линеен елемент, а на фиг.6.1.2 – на нелинеен елемент.



Фиг.6.1.1



Фиг.6.1.2

Характеристики, снети при постоянни режими, се наричат статични. При тях всяка точка дава стойността на постоянното напрежение при съответната стойност на постоянния ток. От тези характеристики се определят статични параметри – статично съпротивление $R_{ст}$ и статична проводимост $G_{ст}$:

$$R_{CT} = \frac{u}{i} = f_1(i); \quad G_{CT} = \frac{i}{u} = f_2(i). \qquad (6.1.1)$$

Статичното съпротивление $R_{ст}$ е пропорционално на тангенса на ъгъла α, който сключва лъчът, свързващ координатното начало с разглежданата точка от характеристиката, с абцисната ос (фиг.6.1.2), т.е. :

$$R_{ст} = к.tg\alpha . \qquad (6.1.2)$$

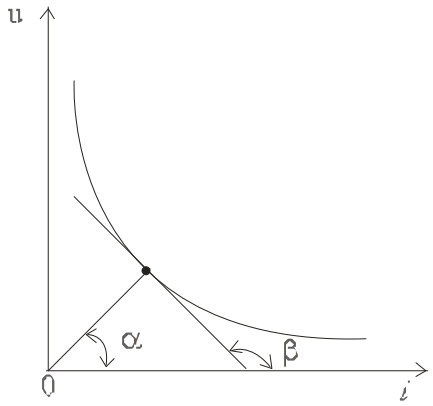
Статично съпротивление $R_{ст}$ и статичната проводимост $G_{ст}$ са реципрочни величини, т.е.:

$$R_{ст} . G_{ст} = 1. \qquad (6.1.3)$$

Характеристики, които дават връзката между напрежението и тока при достатъчно бързи изменения на тока, се наричат динамични. От тях се определят динамични параметри – динамично съпротивление $R_д$ и динамична проводимост $G_д$:

$$R_д = \lim_{\Delta i \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta i} = \frac{du}{di} = F_1(i); \qquad (6.1.4)$$

$$G_д = \lim_{\Delta u \to 0} \frac{\Delta i}{\Delta u} = \frac{di}{du} = F_2(i). \qquad (6.1.5)$$



Фиг.6.1.3

Динамичното съпротивление $R_д$ е пропорционално на тангенса на ъгъл β, който допирателната в разглежданата точка от характеристиката на елемента сключва с абцисната ос (фиг.6.1.2), т.е.:

$$R_д = к.tg\beta . \qquad (6.1.6)$$

Динамичното съпротивление $R_д$ и динамична проводимост $G_д$ са също реципрочни величини, т.е.:

$$R_д . G_д = 1. \qquad (6.1.7)$$

Статичните и динамичните параметри са различни в различните точки на характеристиката на нелинейния елемент. При пасивни елементи статичните параметри $R_{ст}$ и $G_{ст}$ са винаги положителни, докато динамичните параметри могат да бъдат и отрицателни, ако разглежданата точка е на падащ участък на характеристиката.Това е илюстрирано на фиг.6.1.3.

Ако V-A характеристика на нелинейния елемент за работния участък е практически линейна, то при анализа елементът може да бъде представен с еквивалентна заместваща схема, представляваща последователно съединени източник на ЕДН и резистор със съпротивление $R_д$. Така например, V-A характеристика на двата нелинейни елемента, показани на фиг.6.1.4 и 6.1.5, около работната точка a могат да бъдат заменени с прави линии, чиито уравнения са:

$$u_1 = e_{10} + (к.tg\alpha_1).i_1 \quad и \quad u_2 = e_{20} + (к.tg\alpha_2).i_2 . \qquad (6.1.8)$$

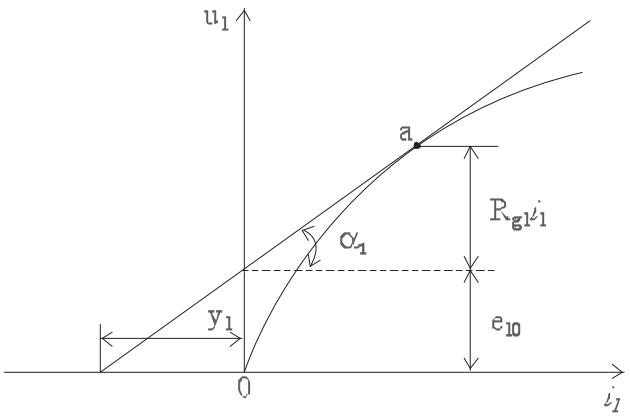
Тези уравнения могат да бъдат представени във вида:

$$u_1 = e_{10} + R_{g1}.i_1 \quad и \quad u_2 = e_{20} + R_{g2}.i_2 . \qquad (6.1.9)$$

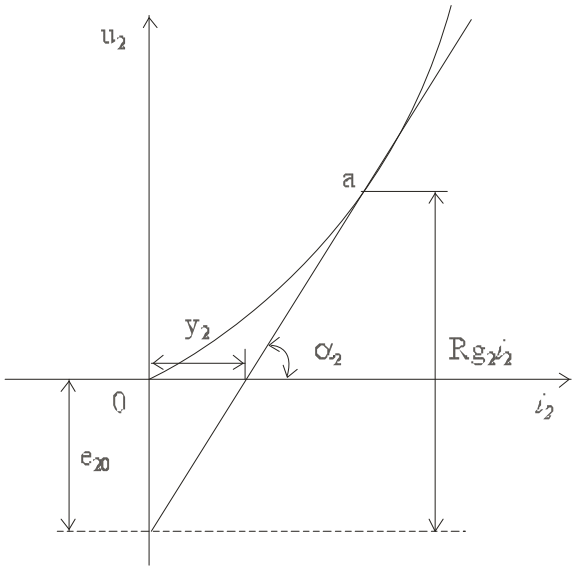
За първия нелинеен елемент (фиг.6.1.6а), чиято V-A характеристика е с насищане по напрежение и е дадена на фиг.6.1.4, напрежението u_1 и токът i_1 около работната точка a са свързани с първия от изразите (6.1.9). Еквивалентната заместваща схема на този нелинеен елемент за неголям участък около работната точка е представена на фиг.6.1.6б, като ЕДН e_{10} има посока, обратна на посоката на тока i_1. И действително, при

тази посока на ЕДН e_{10}, потенциалът на точка 1 (фиг.6.1.6) е по-висок от потенциала на точка 2 със стойност: $u_1 = e_{10} + R_{д1}.i_1$.

Ако последният израз се раздели на динамичното съпротивление $R_{д1}$, се получава



Фиг.6.1.4



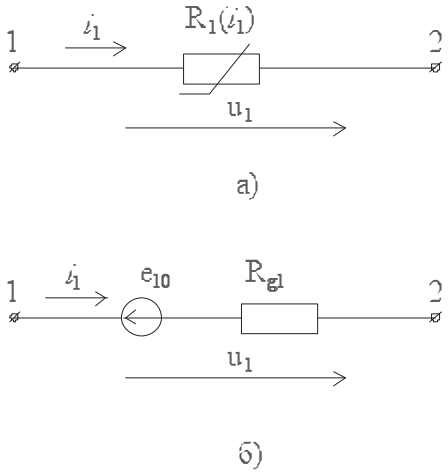
Фиг.6.1.5

уравнението:

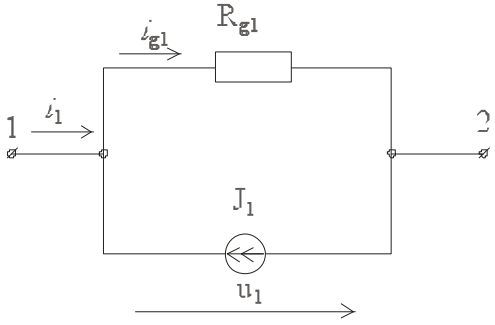
$$\frac{u_1}{R_{д1}} = \frac{e_{10}}{R_{д1}} + i_1 \ . \qquad (6.1.10)$$

На това уравнение съответствува еквивалентната заместваща схема на нелинейния елемент с източник на ток, представена на фиг.6.1.7, където с $i_{д1}$ е означен токът $i_{д1} = u_1 / R_{д1}$.

За втория нелинеен елемент, чиято V-A характеристика е с насищане по ток и е



Фиг.6.1.6



Фиг.6.1.7

показана на фиг.6.1.5, при същите положителни посоки на тока i_2 и напрежението u_2, както при тока i_1 и напрежението u_1 на първия нелинеен елемент (фиг.6.1.6а) в еквивалентните му заместващи схеми, посоките на източника на ЕДН и на тока на източника на ток са обратни. Това следва от втория от изразите (6.1.9).

Ако в някакъв участък на V-A характеристика на нелинейния елемент напрежението u намалява при увеличаване на тока i (фиг.6.1.3), то динамичното му

съпротивление в еквивалентните му заместващи схеми ще бъде отрицателно. Това означава, че в тези схеми такова съпротивление може да бъде представено с източник на ЕДН или източник на ток.

Освен динамични параметри $R_д$ и $G_д$ се разглеждат и диференциални параметри $R_{диф.}$ и $G_{диф.}$.Те се дефинират по аналогичен начин, както динамичните параметри (вж. формули (6.1.4) и (6.1.5)), но се определят от статичните характеристики.

Най-често използуваните класификации на нелинейните елементи са две:

Първата класификация се прави в зависимост от вида на характеристиката на нелинейните елементи. Според нея те биват симетрични и несиметрични. При симетричните нелинейни елементи съпротивлението им зависи от тока еднакво за двете му посоки. Такива елементи са лампите с нажежаема нишка, електрическата дъга между еднакви електроди. Повечето нелинейни елементи например, различните видове диоди са несиметрични.

Според втората класификация нелинейните елементи биват инерционни и безинерционни. Инерционността им се проявява при използуването им при променлив ток. Тя се изразява в невъзможност бързо да се изменя съпротивлението им. В действителност, всички нелинейните елементи са инерционни, но инерционността им се проявява при различни честоти. Например, лампата с нажежаема нишка е инерционен нелинейнен елемент още при честота 50 Hz, докато различните диоди в зависимост от типа си проявяват инерционността при честоти от няколко кHz до стотици MHz.

Освен нелинейни елементи с нелинейна V-A характеристика, т.е. нелинейни резистори, съществуват нелинейни бобини и кондензатори. Това са бобините с феромагнитна сърцевина и кондензаторите със сегнетодиелектрик.

При бобините се разглежда зависимостта на магнитния поток Ψ от тока i. Тази зависимост се нарича вебер-амперна (Wb–A) характеристика. При бобините с феромагнитна сърцевина Wb –A характеристика има хистерезисен характер. От Wb–A характеристика се определят статична и динамична индуктивности $L_{ст}$ и $L_д$:

$$L_{ст}(i) = \Psi(i)/i\,; \qquad (6.1.14)$$

$$L_д(i) = d\Psi(i)/di\,. \qquad (6.1.15)$$

При кондензаторите се разглежда зависимостта на заряда q от напрежението u. Тази зависимост се нарича кулон-волтова (C–V) характеристика. При кондензаторите със сегнетодиелектрик C–V характеристика, аналогично както при бобините с феромагнитна сърцевина, има хистерезисен характер. От C–V характеристика се определят статичен и динамичен капацитети:

$$C_{ст}(u) = q(u)/u\,; \qquad (6.1.16)$$

$$C_д(u) = dq(u)/du. \qquad (6.1.17)$$

В повечето случаи източниците на ЕДН и на ток са с нелинейни характеристики. Например, при постояннотоковите генератори при натоварване ЕДН намалява поради реакцията на котвата. При по-нататъшното разглеждане се приема, че ЕДН на източника е постоянно, а се изменя вътрешното му съпротивление. Същото се отнася и за вътрешната проводимост на източниците на ток.

6.2. Постоянни режими в нелинейни електрически вериги. Графични методи за анализ на вериги с последователно, паралелно и смесено съединение на участъци, съдържащи нелинейни елементи

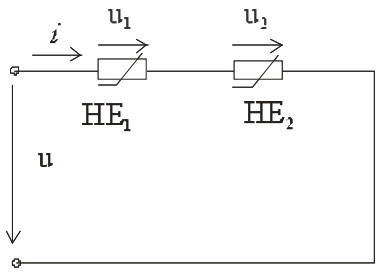
Както бе споменато в 6.1, процесите в нелинейните електрически вериги се описват от системи уравнения, които се съставят въз основа на законите на Кирхоф. Поради нелинейния характер на уравненията, аналитичното им решение се получава много сложно. Ето защо, често се използват графични и графоаналитични методи за анализ. По-долу тези методи ще бъдат приложени за анализ на постоянни режими във вериги с последователно, паралелно и смесено съединение на участъци, съдържащи нелинейни елементи.

1. Последователно съединение на пасивни нелинейни елементи

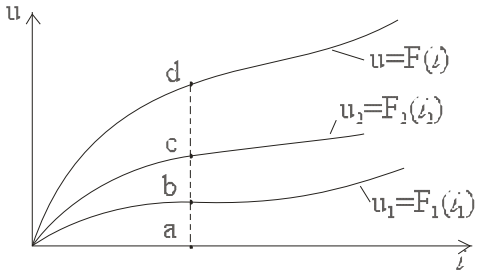
Разглежда се верига, съставена от два последователно съединени пасивни нелинейни елемента (фиг.6.2.1), чиито V-A характеристики $u_1 = F_1(i)$ и $u_2 = F_2(i)$ са показани на фиг.6.2.2.

Тъй като съединението е последователно, то може да се запише:

$$i = i_1 = i_2 \quad \text{и} \quad u = u_1 + u_2 . \tag{6.2.1}$$



Фиг.6.2.1



Фиг.6.2.2

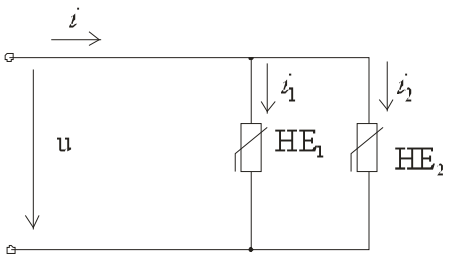
Въз основа на горните изрази може да се заключи, че за получаване на резултантната крива $u = F(i)$ е необходимо за всяка стойност на тока да бъдат сумирани ординатите на кривите $u_1 = F_1(i)$ и $u_2 = F_2(i)$, т.е.: ab + a.c = ad. Този метод е приложим при какъв да е брой последователно съединени нелинейни и линейни елементи.

2. Паралелно съединение на пасивни нелинейни елементи

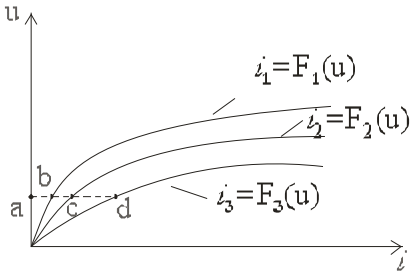
Разглежда се верига, съставена от два паралелно съединени пасивни нелинейни елемента (фиг.6.2.3), чиито V-A характеристики $u_1 = F_1(i)$ и $u_2 = F_2(i)$ са показани на фиг.6.2.4.

Тъй като съединението е паралелено, то може да се запише:

$$u = u_1 = u_2 \quad \text{и} \quad i = i_1 + i_2 . \tag{6.2.2}$$



Фиг.6.2.3



Фиг.6.2.4

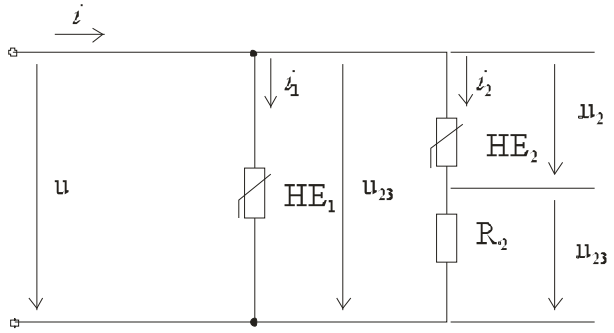
От горните изрази може да се заключи, че за намиране на резултантната крива $u = F(i)$ е необходимо за всяка стойност на напрежението да бъдат сумирани абцисите на кривите $u_1 = F_1(i)$ и $u_2 = F_2(i)$, т.е.: ab + ac = ad.

3. Смесено съединение на пасивни нелинейни елементи

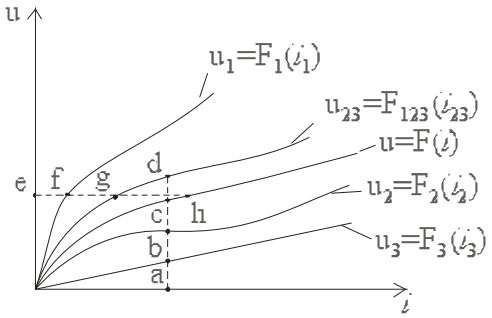
Разглежда се верига, съставена от три смесено съединени пасивни елемента, единият от които - R_3 е линеен (фиг.6.2.5). V-A характеристики са дадени на фиг.6.2.6.

Въз основа на схемата от фиг.6.2.5 могат да бъдат записани равенствата:

$u = u_1 = u_{23} = u_2 + u_3$; $i = i_1 + i_2$ и $i_2 = i_3$. (6.2.3)



Фиг.6.2.5



Фиг.6.2.6

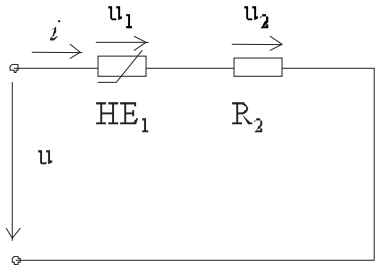
Като се изхожда от горните равенства, за намирането на резултантната V-A характеристика $u = (i)$ се процедира по следния начин:

1. Най-напред се сумират характеристиките $u_2 = F_2(i_2)$ и $u_3 = F_3(i_3)$ по ординати, както при последователно съединение, т.е.: ab + ac = ad. Така се получава характеристиката $u_{23} = F_{23}(i_2)$.

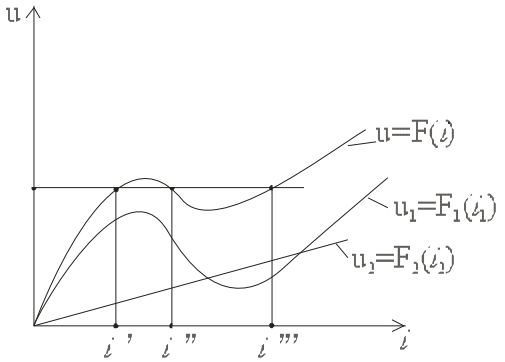
2. По-нататък се сумират характеристиките $u_1 = F_1(i_1)$ и $u_{23} = F_{23}(i_2)$ по абциси, както при паралелно съединение, т.е.: ef + eg = eh. Така се получава резултантната V-A характеристика $u = F(i)$на веригата.

Ако всички характеристики са известни, то при зададено едно от напреженията (u, u_2 или u_3) или един от токовете (i, i_1 или i_2), могат да бъдат намерени всички останали напрежения и токове.

При разгледаните по-горе вериги V-A характеристиките на нелинейните елементи са нарастващи, т.е.: динамичните им съпротивления във всичките им участъци са положителни. Тогава решението е еднозначно, т.е. при зададена стойност на входното напрежение се получава определени стойности на всички токове и напрежения. Ако някой от нелинейните елементи има V-A характеристика с падащи участъци, за които динамичното съпротивление е отрицателно, то може да се получи неоднозначно решение, т.е. при зададено входно напрежение се получават няколко съвкупности от токове и напрежения в клоновете, удовлетворяващи еднакво законите на Кирхоф. Такъв случай е показан на фиг.6.2.7 и 6.2.8. От фигурите може да се види, че при



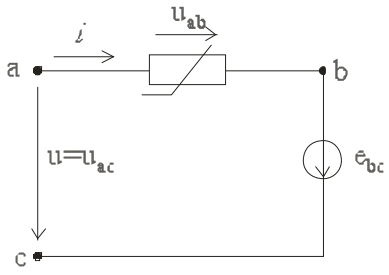
Фиг.6.2.7



Фиг.6.2.8

определени стойности на входното напрежение u се получават три стойности на тока i – i', i'', i'''. За стойностите i' и i''' режимът е устойчив, докато за стойността i'' е неустойчив.

4. Последователно съединение на нелинеен елемент и източник на ЕДН



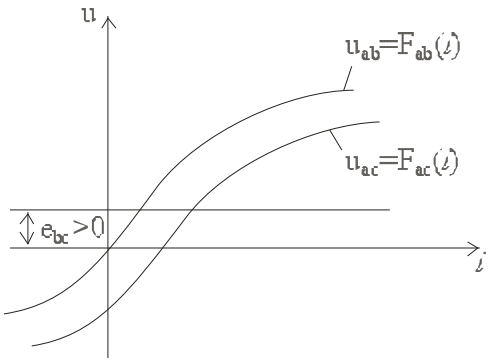
Разглежда се електрическата верига, чиято схема е показана на фиг.6.2.9. Приема се, че на V-A характеристика на нелинейния елемент $u_{ab} = F_{ab}(i)$ и големината и посоката на ЕДН e_{bc} са зададени. Съгласно втория закон на Кирхоф се записва:

$$e_{bc} = - u_{ac} + u_{ab}, \qquad (6.2.4)$$

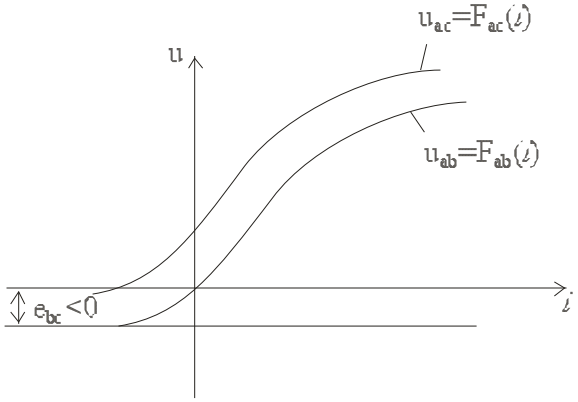
откъдето за входното напрежение u_{ac} се получава:

$$u_{ac} = u_{ab} - e_{bc} . \qquad (6.2.5)$$

Ако ЕДН $e_{bc} > 0$, т.е. действува по посоката на тока и ако $u_{ab} - e_{bc} > 0$, то напрежението u_{ac} ще намалява, а токът ще нараства. Това е показано на фиг.6.2.10. Ако обаче, ЕДН $e_{bc} < 0$, т.е. действува в посока, обратна на тази на тока, то напрежението u_{ac} ще нараства, а токът ще намалява – фиг.6.2.11.

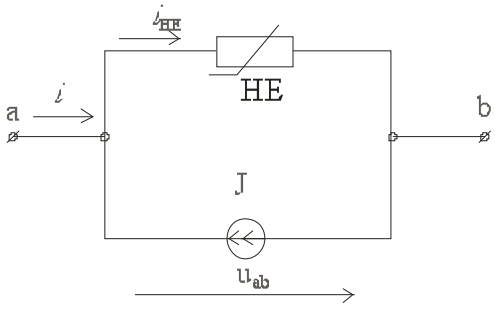


Фиг.6.2.10



Фиг.6.2.11

5. Паралелно съединение на нелинеен елемент и източник на ток



Фиг.6.2.12

Разглежда се електрическата верига, чиято схема е показана на фиг.6.2.12.

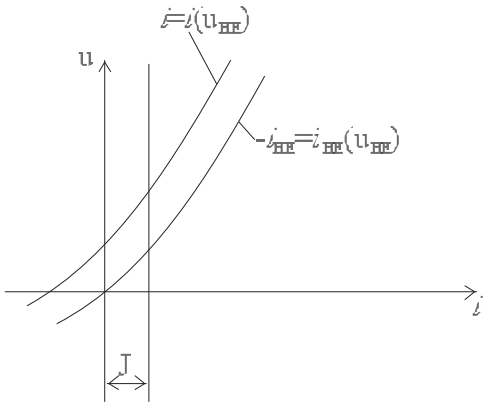
Приема се, че V-A характеристика на нелинейния елемент $i_{не} = i_{не}(u_{не})$ и големината и посоката на източника на ток J са зададени. Съгласно първия закон на Кирхоф се записва:

$$J = -i + i_{НЕ} , \qquad (6.2.6)$$

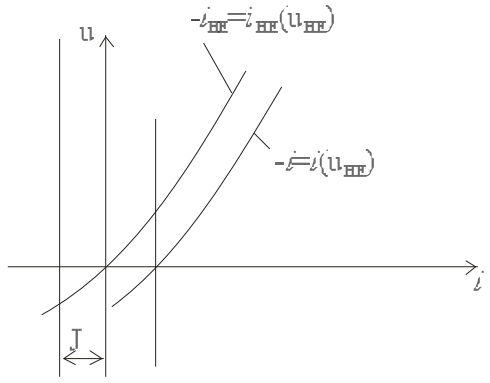
откъдето за входния ток i се получава:

$$i = -J + i_{НЕ} . \qquad (6.2.7)$$

Ако източникът на ток J действува в указаната на фиг.6.2.12 посока, то напрежението u_{ab} ще нараства, а входният ток i ще намалява. Това е показано на фиг.6.1.13. Ако обаче, източникът на ток J действува в посока, обратна на тази, указана на фиг.6.1.12, то напрежението u_{ab} ще намалява, а входният ток i ще нараства – фиг.6.1.14.



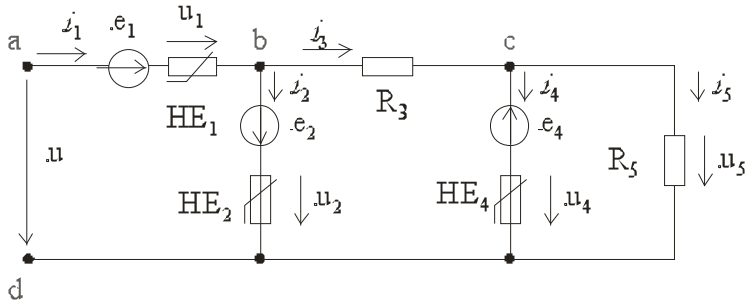
Фиг.6.2.13



Фиг.6.2.14

6. Смесено съединение на участъци, съдържащи нелинейни елементи и източници не ЕДН

Разглежда се електрическа верига, съставена от последователно и паралелно съединени участъци с линенйни и нелинейни елементи и източници на ЕДН

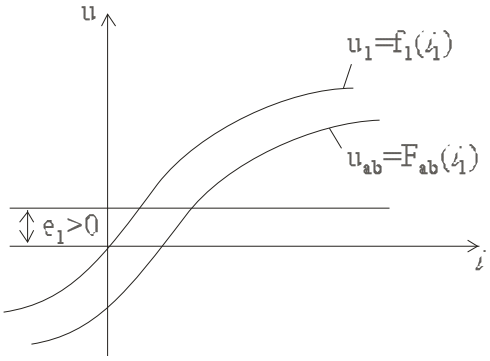


Фиг.6.2.15

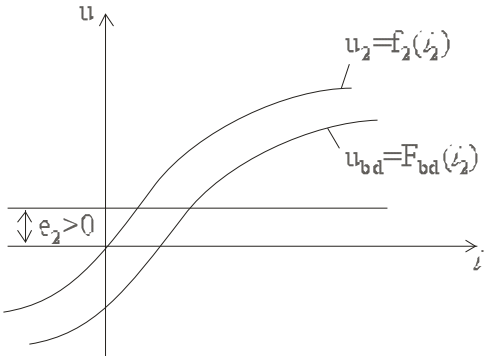
(фиг.6.2.15).

Зададени са посоките на всички токове, посоките и големините на всички ЕДН и V-A характеристики на всички елементи. Тези характеристики са показани на фиг. 6.2.16 … 6.2.20.

Отначало се намират резултантните характеристики на клоновете с нелинейни елементи и източници на ЕДН (фиг.6.2.16, 6.2.17 и 6.2.20).

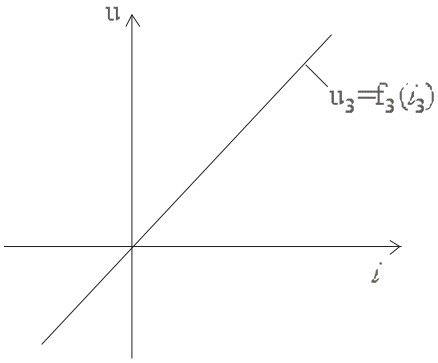


Фиг.6.2.16

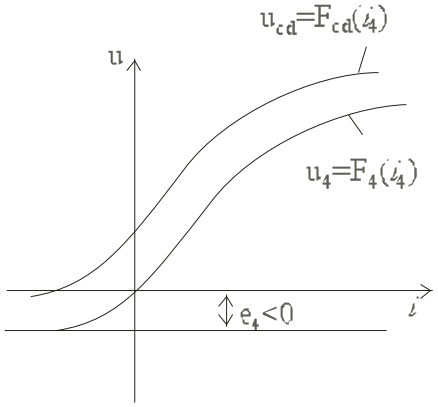


Фиг.6.2.17

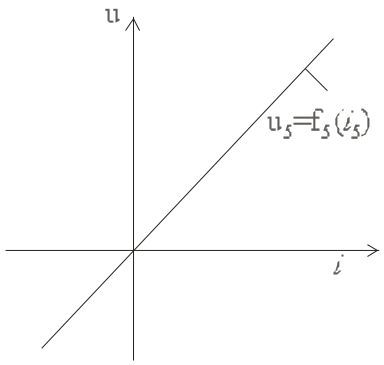
По-нататък се сумират абцисите на характеристиките $u_{cd} = f_{cd}(i_5)$ и $u_{cd} = f_{cd}(i_4)$ и се намира характеристиката $u_{cd} = f_{cd}(i_3)$ (фиг.6.2.21).



Фиг.6.2.18

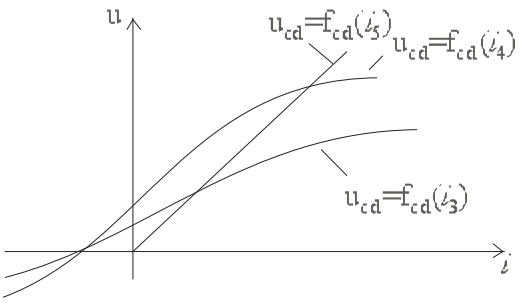


Фиг.6.2.19

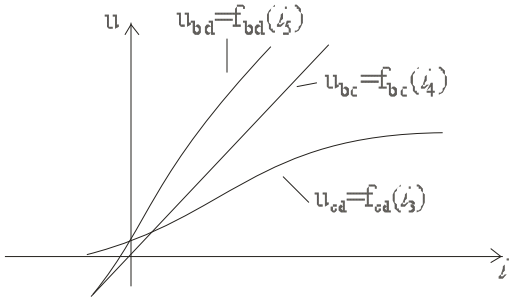


Фиг.6.2.20

За получаване на характеристиката $u_{bd} = f_{bd}(i_3)$ се сумират ординатите на характеристиките $u_{bc} = f_{bc}(i_3)$ и $u_{cd} = f_{cd}(i_3)$ (фиг.6.2.22).

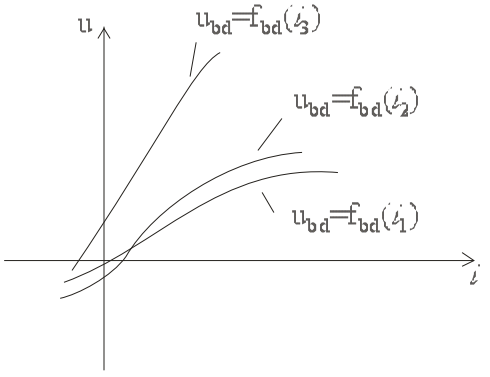


Фиг.6.2.21

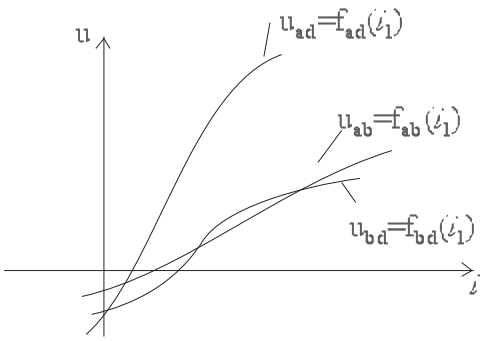


Фиг.6.2.22

След сумиране на абцисите на характеристиките $u_{bd} = f_{bd}(i_3)$ и $u_{bd} = f_{bd}(i_2)$ се намира характеристиката $u_{bd} = f_{bd}(i_1)$ (фиг.6.2.23), чиито ординати се сумират с ординатите на характеристиката $u_{ab} = f_{ab}(i_1)$ (фиг.6.2.24).Така се достига до резултантната характеристика на веригата $u_{ad} = f_{ad}(i_1)$.



Фиг.6.2.23



Фиг.6.2.24

Ако е зададено входното напрежение $u = u_{ad}$, то от така получените характеристики могат да бъдат определени всички токове и напрежения. В случай, че е

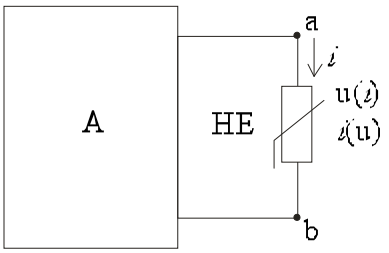
зададен някой от токовете или някое от напреженията, то от тези характеристики могат да бъдат намерени всички токове и напрежения.

6.3. Приложение на теорията на активните линейни многополюсници за анализ на постоянни режими в нелинейни електрически вериги

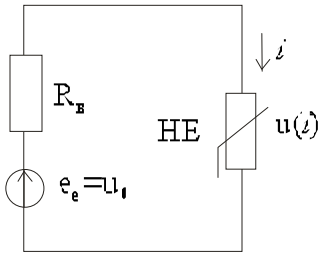
1. Анализ на сложни електрически вериги с един нелинеен елемент

При анализа на сложни електрически вериги с един нелинеен елемент може да бъде използувана теорията на активните линейни двуполюсници. И действително, по отношение на нелинейния елемент, останалата част от веригата може да бъде разглеждана като активен линеен двуполюсник (фиг.6.3.1).

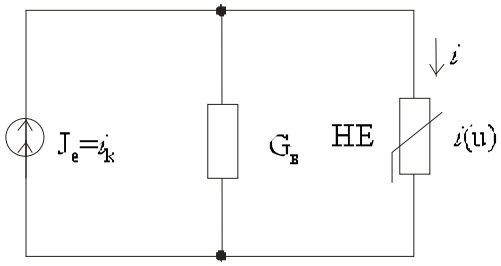
Известно е, че при анализ на режима в даден клон на сложна електическа верига,



Фиг.6.3.1



Фиг.6.3.2



Фиг.6.3.3

останалата част от веригата, разглеждана като активен двуполюсник, може да бъде представена чрез еквивалентен източник на ЕДН или на ток. Така се достига до схемите, показани на фиг.6.3.2 и 6.3.3.

Еквивалентният източник на ЕДН има напрежение, равно на напрежението на активния двуполюсник при режим на празен ход (при прекъсване на клона), т.е.: $e_e = u_0 = u_{ab0}$ и вътрешно съпротивление, равно на входното съпротивление на пасивния двуполюсник при режим на празен ход , т.е.: $R_e = R_{abвх.}$. Последният се получава от активния двуполюсник след даване на късо на източниците на ЕДН и изключване източниците на ток при запазване техните вътрешни съпротивления, респективно вътрешни проводимости.

В случай, че активният двуполюсник се заменя с еквивалентен източник на ток, този източник има ток, равен на тока на активния двуполюсник при режим на късо съединение (при даване на късо на клона),т.е.: $J_e = i_к = i_{abк}$. Вътрешната му проводимост G_e е равна на входната проводимост на пасивния двуполюсник при режим на празен ход, т.е.: $G_e = G_{abвх.}$.

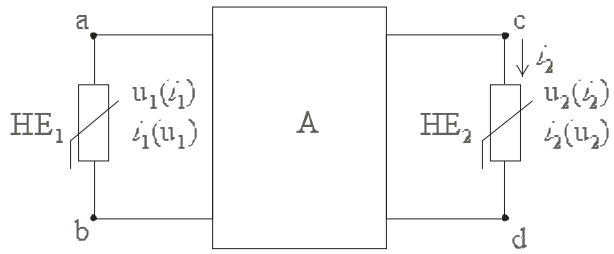
Известно е, че теоремата за активния двуполюсник се доказва въз основа на принципа на наслагването, а този принцип и всички произтичащи от него методи за анализ са невалидни при нелинейни електрически вериги. Тук обаче няма никакво противоречие. И действително, например при доказване на теоремата за еквивалентния източник на ЕДН (теоремата на Тевенен), принципът на наслагването се прилага за два режима на работа на разглеждания клон. При единия режим токът в клона е равен на нула, а при другия режим – на действителния му ток.

Веригата, чиято схема е показана на фиг.6.3.2, представлява последователно съединение на източник на ЕДН, линеен и нелинеен елемент, а веригата, чиято схема е дадена на фиг.6.3.3, представлява паралелно съединение на източник на ток, линеен и нелинеен елемент. Графичните методи за анализ на такива вериги са разгледани в 6.2. За прилагане на аналитични методи за анализ на тези вериги е необходимо V-A характеристика на нелинейния елемент да бъде зададена аналитично.

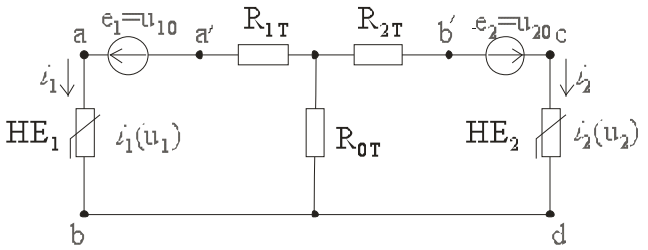
Съгласно втория закон на Кирхоф за схемата от фиг.6.3.2 се записва уравнението: $e_e = u(i) + R_в.i$, а съгласно първия закон на Кирхоф за схемата от фиг.6.3.3 – съответно уравнението: $J_e = i\,(u) + G_в.u$. От тези две уравнения може да бъде определен режимът в нелинейния елемент, т.е. токът му $i_{не} = i$ и напрежението му $u_{не} = u$. За намиране режима на останалите елементи на изходната схема (фиг.6.3.1) е необходимо за нея да се съставят уравнения съгласно законите на Кирхоф.

2. Анализ на сложни електрически вериги с два нелинейни елемента

При анализа на сложни електрически вериги с два нелинейни елемента може да бъде използувана теорията на активните линейни четириполюсници. Спрямо двата нелинейни елемента останалата част от веригата може да бъде разгледана като активен линеен четириполюсник (фиг.6.3.4). Известно е, че активният линеен четириполюсник може да бъде представен с пасивен четириполюсник и с два източника на ЕДН или на ток. Съществува представяне на активния линеен четириполюсник с пасивен четириполюсник и с два разнородни по тип източници – с един източник на ЕДН и с един на ток или обратно - с един източник на ток и с един на ЕДН.



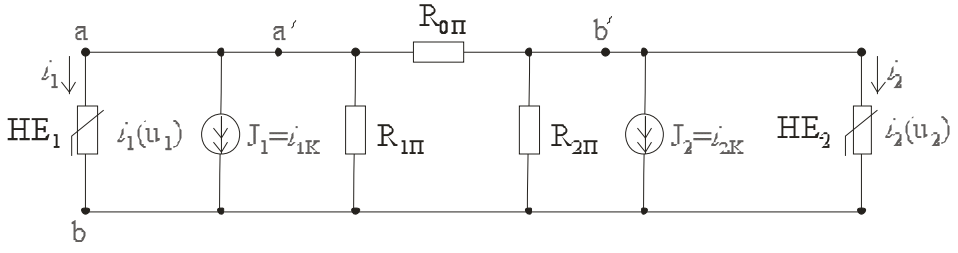
Фиг.6.3.4



Фиг.6.3.5

В случай, че активният линеен четириполюсник се представя с пасивен четириполюсник и два източника на ЕДН е удобно пасивния четириполюсник да бъде заменен с еквивалентен Т-образен четириполюсник (фиг.6.3.5). Напреженията на източниците на ЕДН e_1 и e_2 са равни на напреженията на празен ход при едновременно прекъсване на двата клона с нелинейните елементи, т.е.: $e_1 = u_{10} = u_{ab0}$ и $e_2 = u_{20} = u_{cd0}$.

Ако активният линеен четириполюсник се представя с пасивен четириполюсник и два източника на ток, то е удобно пасивният четириполюсник да бъде заменен с еквивалентен П - образен четириполюсник (фиг.6.3.6). Токовете на източниците на ток J_1 и J_2 са равни на токовете на късо съединение при едновременно даване на късо на двата клона с нелинейните елементи, т.е.: $J_1 = i_{1к} = i_{abк}$. и $J_2 = i_{2к} = i_{abк}$.



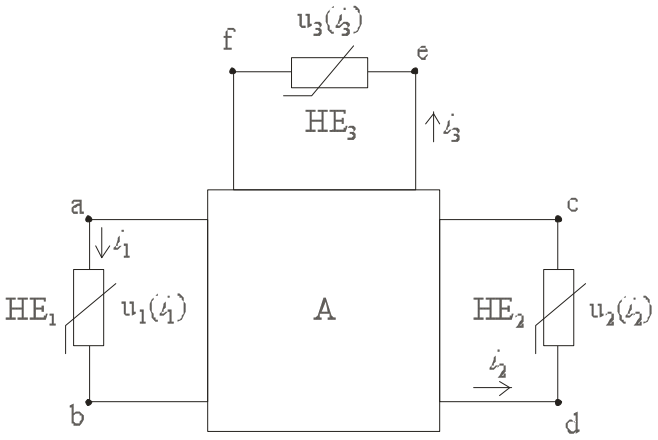
Фиг.6.3.6

Веригите, чиито схеми са дадени на фиг.6.3.5 и 6.3.6, представляват смесено съединение на клонове, съдържащи източници, линейни или нелинейни елементи. Графичните методи за анализ на такива вериги са разгледани в 6.2. И тук за прилагане на аналитични методи за анализ е необходимо V-A характеристики на нелинейните елементи да бъдат зададени аналитично.

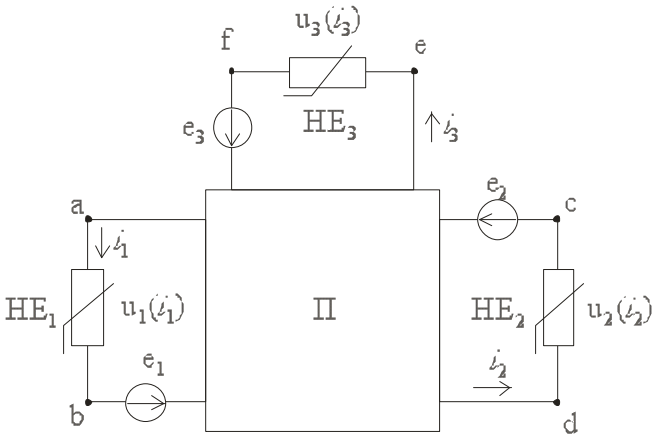
От решението на уравненията за веригите от фиг.6.3.5 или 6.3.6 могат да се намерят режимите на работа на двата нелинейни елемента, т.е. техните напрежения и токове u_1, i_1 и u_2, i_2. Чрез тях по законите на Кирхоф могат да бъдат изчислени всички останали токове и напрежения в изходната верига, ако това е необходимо.

3. Анализ на сложни електрически вериги с три нелинейни елемента

При анализа на сложни електрически вериги с три нелинейни елемента може да бъде използувана теорията на активните линейни шестполюсници. По отношение на трите нелинейни елемента останалата част от веригата може да бъде разгледана като активен линеен шестполюсник (фиг.6.3.7). Активният линеен шестполюсник може да бъде заменен с пасивен шестполюсник и три източника на ЕДН e_1, e_2 и e_3 (фиг.6.3.8). Напреженията на тези източници са равни на напреженията на празен ход при едновременно прекъсване на трите клона с нелинейните елементи, т.е.: $e_1 = u_{10} = u_{ab0}$; $e_2 = u_{20} = u_{cd0}$ и $e_3 = u_{30} = u_{ef0}$.



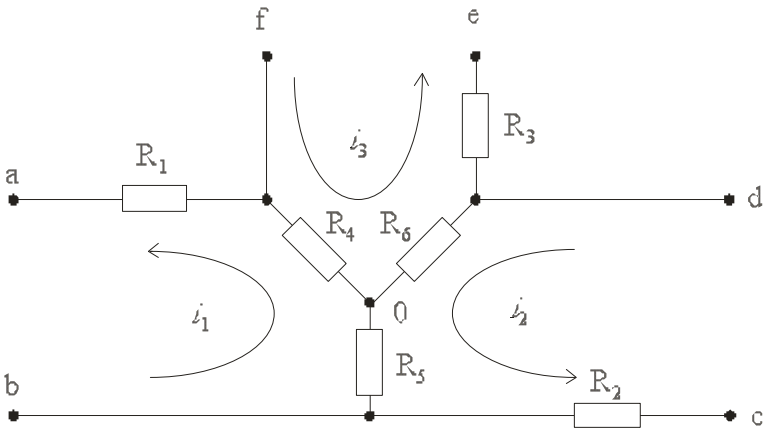
Фиг.6.3.7



Фиг.6.3.8

Пасивният шестполюсник може да бъде представен с еквевалентна заместваща схема с шест елемента. За целта се изхожда от системата уравнения с R - параметри на активния линеен шестполюсник. Тази система има следния вид:

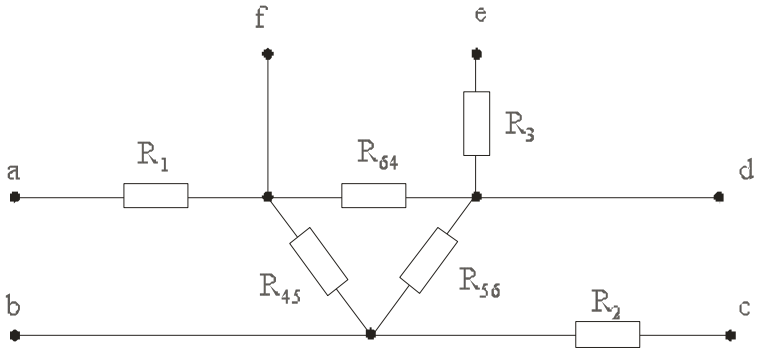
$$\begin{aligned} u_1 &= R_{11}.i_1 + R_{12}.i_2 + R_{13}.i_3 + u_{10}; \\ u_2 &= R_{21}.i_1 + R_{22}.i_2 + R_{23}.i_3 + u_{20}; \\ u_3 &= R_{31}.i_1 + R_{32}.i_2 + R_{33}.i_3 + u_{30}. \end{aligned} \qquad (6.3.1)$$



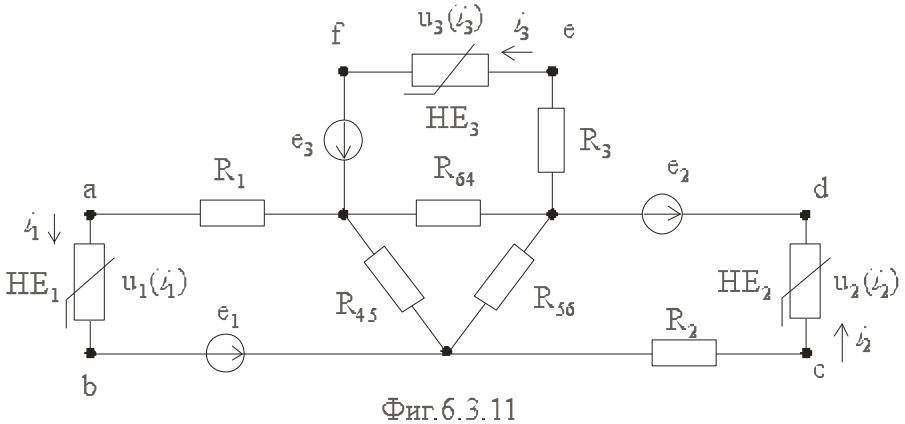
Фиг.6.3.9

Тъй като съгласно принципа на взаимността $R_{12} = R_{21}$; $R_{23} = R_{32}$ и $R_{13} = R_{31}$, то в горната система уравнения шест от деветте R - параметъра са независими. Следователно, пасивният шестполюсник може да бъде представен с еквивалентна заместваща схема, съставена от шест елемента. Тази схема може да има вида, показан на фиг.6.3.9. Въз основа на схемата от фигурата може да бъде записана следната система уравнения:

$$\begin{vmatrix} R_{11}=R_1+R_4+R_5; & R_{22}=R_2+R_5+R_6; \\ R_{33}=R_3+R_6+R_4; & R_{12}=R_{21}=-R_5; \\ R_{23}=R_{32}=-R_6 \text{ и } & R_{13}=R_{31}=-R_4. \end{vmatrix} \qquad (6.3.2)$$



Фиг.6.3.10

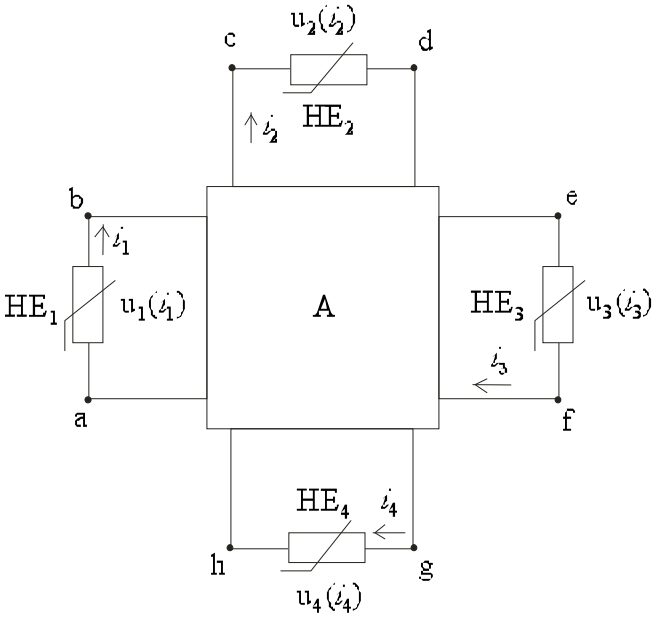


Фиг.6.3.11

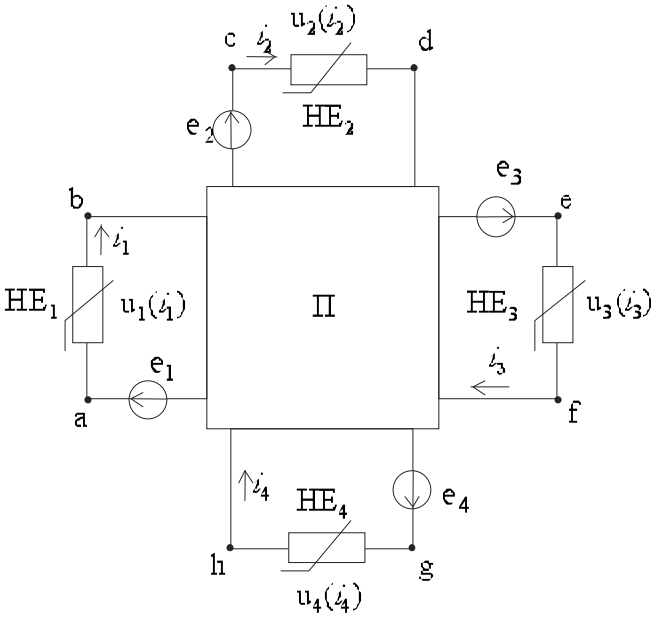
Отрицателните знаци в изразите за общите съпротивления съответстват на противоположните посоки на токовете i_1, i_2 и i_3 в общите клонове. При известни R - параметри на пасивния шестполюсник, въз основа на системата (6.3.2) могат да бъдат определени параметрите на еквивалентната му заместваща схема. Схемата от фиг.6.3.9 е удобно да бъде преобразувана. За целта звездата, съставена от резисторите R_4, R_5 и R_6, се преобразува в еквивалентен триъгълник, съставен от резисторите R_{45}, R_{56} и R_{64}. Така се достига до схемата, показана на фиг.6.3.10. В тази схема линейните резистори чрез нелинейните елементи са съединени по двойки паралелно, а именно R_1 с R_{45}; R_2 с R_{56} и R_3 с R_{64}. По този начин се получава паралелно свързване на пасивни линейни двуполюсници с активни нелинейни двуполюсници. Схемата от фиг.6.3.11 може да бъде разглеждана като смесено съединение на участъци, съдържащи линейни и нелинейни елементи и източници на ЕДН.

4. Анализ на сложни електрически вериги с четири нелинейни елемента

При анализа на сложни електрически вериги с четири нелинейни елемента може да бъде използувана теорията на активните линейни осемполюсници. И действително, спрямо клоновете с четирите нелинейни елемента останалата част от веригата може да бъде разглеждана като активен линеен осемполюсник (фиг.6.3.12).

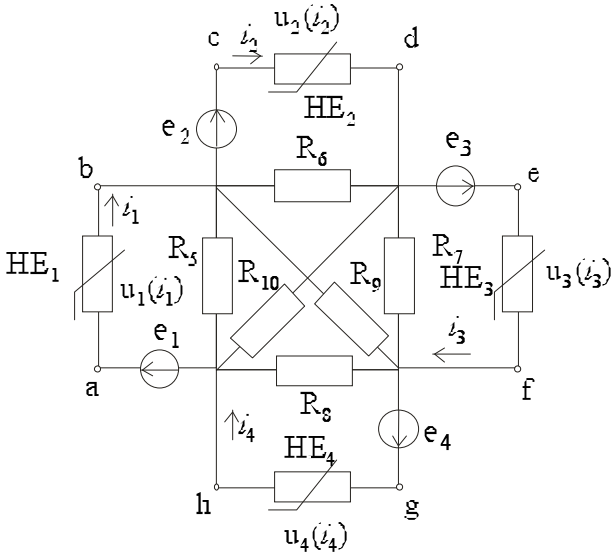


Фиг.6.3.12

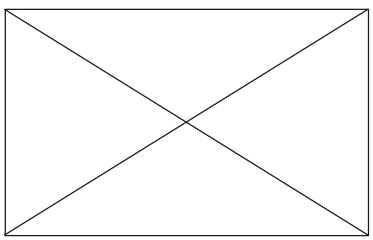


Фиг.6.3.13

Активният линеен осемполюсник може да бъде заменен с пасивен осемполюсник и четири източника на ЕДН (фиг.6.3.13).



Фиг.6.3.14



Фиг.6.3.15

Напреженията на тези източници са равни на напреженията на празен ход при едновременно прекъсване на четирите клона с нелинейни елементи, т.е.: $e_1 = u_{10} = u_{ab0}$; $e_2 = u_{20} = u_{cd0}$; $e_3 = u_{30} = u_{ef0}$ и $e_4 = u_{40} = u_{gh0}$.

Пасивният осемполюсник може да бъде представен с еквивалентна мостова заместваща схема, съставена от десет елемента. Тя обаче не може да бъде сведена до смесено съединение (фиг.6.3.14).

Ако в схемата от фиг.6.3.14 вместо паралените клонове се въведат съответни еквивалентни активни двуполюсници, се достига до верига, чийто схемен граф е показан на фиг.6.3.15. Такава верига се характеризира с две определящи величини, докато веригите със смесено съединение на участъци – само с една определяща величина. За анализа на вериги с две определящи величини се използува приблизителен метод, известен под наименованието метод с определящи величини. Тук този метод не се разглежда.

6.4. Периодични режими в нелинейни електрически вериги с инерционни нелинейни елементи. Метод на последователните приближения

1. Общи положения

Периодичните режими с нелинейни инерционни елементи и във вериги с безинерционни нелинейн елементи имат различен характер. Процесите във веригите с инерционни нелинейни елементи са по-прости, тъй като параметрите им не се изменят през периода на изменение на тока. Например, при лампите с нажежаема нишка при честота 50Hz поради топлинната инерция температурата на нишката не изменя, а следователно не се изменя и съпротивлението й. Ето защо при постоянна ефективна стойност на променливото периодично напрежение, приложено към лампата, тя се оказва линеен елемент по отношение на моментната стойност на тока. Това означава, че характеристиката, свързваща моментните стойности на напрежението u и тока i, т.е.: $u = f(i)$ е линейна. При синусоидален ток, напрежението, приложено към лампата, е синусоидално. При изменение на ефективната стойност на напрежението, се изменя ефективната стойност на тока през нишката, променя се температурата й, а оттам и съпротивлението й. Следователно, характеристиката, свързваща ефективните стойности на тока I и напрежението U, т.е.: $U = F(I)$ ще бъде нелинейна.

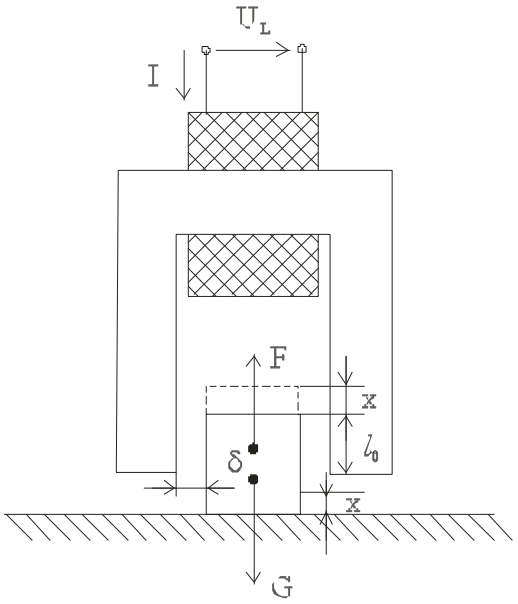
Ако всички нелинейни елементи във веригата са инерционни, то при установен режим параметрите им остават неизменени през периода на изменение на токовете и напреженията. Ето защо при зададен установен режим могат да бъдат използувани същите методи за анализ на тези вериги, както при линейните вериги. Ако подаденото към веригата напрежение е синусоидално, то може да бъде използуван комплексният метод. При периодичен несинусоидален режим, ако параметрите R, L и C не зависят от честотата, то приложеното напрежение може да бъде разложено в ред на Фурие, съдържащ синусоидални съставки и да бъде разгледано поотделно влиянието на всяка от тях.

При изменение на установения режим обаче, например, при изменение на ефективната стойност на приложеното към веригата напрежение или даже при запазване на ефективната му стойност, но при изменение на амплитудния спектър на хармоничните му съставки, се изменят ефективните стойности на токовете и напреженията в клоновете на веригата. Тъй като характеристиките $U = F(I)$ на нелинейните елементи са нелинейни, то ще се изменят параметрите им $R = U_R / I$; $\omega L = U_L / I$ и $1/\omega C = U_C / I$, което ще води до изменение на разпредлението на токовете и напреженията в цялата електрическа верига. Поради това не може да бъде използуван принципът на наслагването и всички методи за анализ на електрическите вериги, основани на този принцип. Остават в сила законите на Кирхоф, които при установен синусоидален режим, могат да бъдат записани в комплексна форма. Но в тези уравнения комлпексните съпротивления на нелинейните инерционни елементи, т.е. модулите и аргументите на тези съпротивления ще бъдат функции на ефективните стйности на токовете през елементите. И така, алгебричните уравнения, съставени въз основа на законите на Кирхоф, ще бъдат нелинейни. Дори да не се изменят аргументите на комплексните съпротивления на нелинейните елементи, а само модулите им, то изчислението е доста трудно.

2. Метод на последователните приближения

В случай, че към веригата, съдържаща инерционни нелинейни елементи е подадено синусоидално напрежение, може да бъде използуван следният метод на последователните приближения: Задават се предполагаеми стойности на комплексните съпротивления $Z_к = z_к e^{j\varphi_к}$ на нелинейните елементи и се приема, че те са постоянни.

Извършва се пресмятането на веригата и след определяне на токовете в нелинейните елементи от характеристиките им се проверява дали при тези стойности на токовете се получават приетите стойностти на съпротивленията $Z_к$. Ако има разлики, се задават нови стойности на съпротивленията $Z_к$ и отново се пресмята веригата. Този процес продължава до получаване на стойности на съпротивленията $Z_к$, достатъчно близки до приетите им стойности.



Фиг.6.4.1

Като пример за прилагане на метода на последователните приближения се разглежда индуктивен инерционен електромеханиничен елемент. Той представлява електромагнит, захранван от синусоидален ток с ефективна стойност I (фиг.6.4.1). Между полюсите му може да се движи вертикално масивна феромагнитна котва. За поддържане на постоянна въздушна междина δ между котвата и полюсите се използуват направляващи. Координатата x се отчита от началното положение на котвата, когато тя лежи на поставката.

Върху котвата действуват две сили: силата на теглото G, която действува надолу и електромагнитната сила на привличането F, която действа нагоре. Моментната стойност на f на втората сила се определя от израза:

$$f = \frac{1}{2} i^2 \frac{\partial L}{\partial x}, \qquad (6.4.1)$$

където L е индуктивността на електромагнита, а i е моментната стойност на тока му.

Ако се реализира линейна зависимост на индуктивността L от разстоянието x, т.е.: $L = ax + L_0$, се получава, че: $\partial L / \partial x = a = \text{const}$.

При достатъчно масивна котва, поради силата на инерцията, положението й през периода на изменение на тока остава практически неизменно. В такъв случай за средната стойност на електромагнитната сила F за един период на изменение на тока може да се запише:

$$F = \frac{1}{T}\int_0^T f dt = \frac{a}{2}\frac{1}{T}\int_0^T i^2 dt = \frac{1}{2} a I^2 . \qquad (6.4.2)$$

Тази сила се уравновесява със силата на теглото G и следователно:

$$G = \frac{1}{2} a I^2 .$$

Тъй като силата G е постоянна, т.е.: $G = \text{const}$, то и ефективната стойност на тока ще бъде постоянна, т.е.: $I = I_0 = \text{const}$. Това означава, че такова устройство ще осъществява стабилизиране на ефективната стойност на тока.

Зависимостта $L = L(x)$ би била линейна, т.е.: $L = ax + L_0$, ако въздушната междина δ между котвата и полюсите е постоянна. В такъв случай всички магнитни линии ще преминават през въздушната междина и магнитните съпротивления на сърцевината и котвата могат да бъдат пренебрегнати. Тогава за индуктивността L се записва:

$$L = \frac{\Psi_L}{i} = \frac{w\Phi}{i} = w^2 \frac{\Phi}{iw} = \frac{w^2}{\frac{2\delta}{\mu_0 S}} = \frac{w^2 \mu_0 S}{2\delta}. \qquad (6.4.3)$$

Сечението S, през което преминава магнитният поток Φ, е:

$$S = bl = b(x + l_0), \qquad (6.4.4)$$

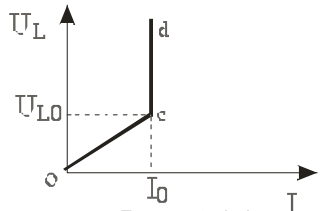
където b е ширината на котвата и полюсите.

Тогава за индуктивността L се получава:

$$L = \frac{w^2 \mu_0 b}{2\delta}(x + l_0) = ax + L_0, \qquad (6.4.5)$$

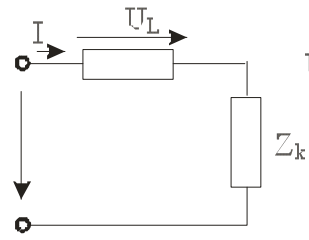
т.е. се осъществява линейна зависимост $L = L(x)$.

Докато котвата лежи на поставката, то индуктивността L е равна на L_0 , т.е.: $L = L_0$. Тогава токът $I < I_0$ и електромагнитната сила $F < G$. При увеличаване на напрежението U_L, приложено към бобината, токът I се увеличава пропорционално на напрежението U_L съгласно зависимостта $U_L = \omega L_0 I$. Това съответствува на началния участък на V-A характеристика на бобината, която е показана на фиг.6.4.2. Когато токът I достигне стойността I_0, то силата F се изравнява със силата на теглото G. Ако напрежението U_L превиши стойността си U_{L0}, то токът I ще стане по-голям от стойността си I_0, съответно електромагнитната сила F ще стане по-голяма от силата на теглото G и котвата се повдига. При повдигането ѝ обаче, се увеличава индуктивното съпротивление ωL и токът намалява до стойността I_0, при която двете сили са равни, т.е.: $F = G$. Следователно, на всяка стойност на напрежението U_L съответствува определена стойност на индуктивността L. В такъв случай след точка c V-A характеристика на бобината $U_L = U_L(I)$ е вертикална права (фиг. 6.4.2).

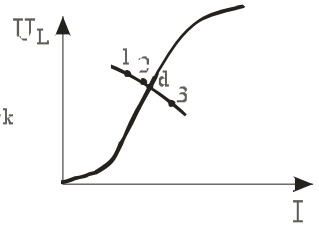


Фиг. 6.4.2.

В границите на участъка cd от V-A характеристика разглежданото устройство работи като стабилизатор на ефективната стойност на тока I. Ако устройството се включи последователно с консуматор (фиг.6.4.3), то при изменение в извесни граници на приложеното напрежение U, токът I през консуматора ще остава постоянен.



Фиг. 6.4.3.



Фиг. 6.4.4.

Реалната V-A характеристика на нелинейния елемент е показана на фиг.6.4.4. Пресмятането на режима във веригата от фиг.6.4.3 при зададено напрежение U се извършва по метода на последователните приближения. Задава се някаква предполагаема стойност L_1 на индуктивността на нелинейния елемент и се пресмята токът I_1, съответствуващ на тази стойност L_1, по формулата:

$$\dot{I} = \frac{\dot{U}}{j\omega L_1 + Z_к} = I_1 . e^{j\psi_{i1}}. \qquad (6.4.6)$$

За ефективната стойност на напрежението върху бобината се записва: $U_{L1} = \omega L_1 I_1$. Нанасят се стойностите U_{L1} и I_1 на фиг.6.4.4 и се получава точка 1. Ако тази точка не лежи върху V-A характеристика, то това означава, че стойността L_1 на индуктивността е избрана неправилно. Ето защо се задава нова стойност L_2 и се намира точка 2. След това се задава стойност L_3 и се определя точка 3 и т.н. След

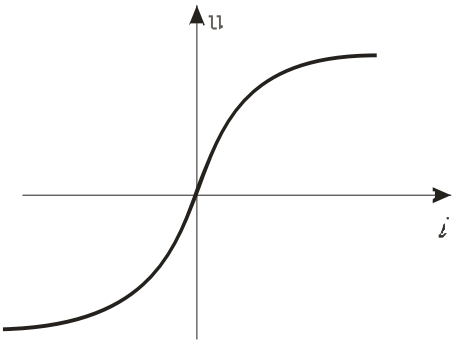
прекарване през тези точки на крива се намира пресечната точка d на тази крива с V-A характеристика (точката d определя търсения режим).

6.5. Периодични режими в електрически вериги с безинерционни нелинейни елементи. Метод на еквивалентните синусоиди

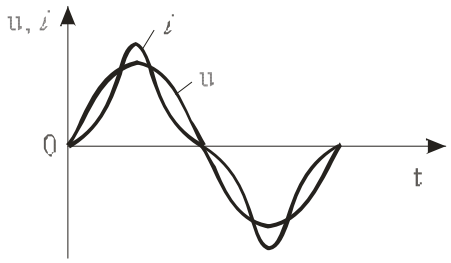
Ако в дадена електрическа верига поне един от неленейните й елементи е безинерционен, то периодичните токове и напрежения ще съдържат висши хармоници, даже ако приложеното към веригата напрежение е синусоидално. В потвърждение на това се разглежда нелинеен безинерционен елемент, чиято V-A характеристика е показана на фиг.6.5.1 и се изразява с уравнението: $i = au^3$. При синусоидално напрежение:

$u = U_m \sin \omega t$ (фиг.6.5.2), за тока i се получава:

$$i = aU_m^3 \sin^3 \omega t = \frac{3}{4} aU_m^3 \sin \omega t - \frac{1}{4} aU_m^3 \sin 3\omega t . \qquad (6.5.1)$$



Фиг. 6.5.1.



Фиг. 6.5.2.

От горния израз може да се установи, че токът i ще съдържа първи и трети хармоници. Кривата на тока $i = i(t)$ е показана на фиг.6.5.2. Тя има заострена форма поради наличието на трети хармоник. Кривата $i = i(t)$ може да бъде получена и като се използува V-A характеристика от фиг.6.5.1.

Въз основа на горния пример може да се заключи, че токът и напрежението върху безинерционния нелинеен елемент не могат да бъдат едновременно синусоидални. В такъв случай при анализа на електрически вериги с безинерционни нелинейни елементи не може да бъде използуван комплексният метод и не могат да се чертаят и използуват векторни диаграми. Пресмятането може да се извършва само за моментните стойности, но поради нелинейността е неприложим принципът на наслагването.

В случаите, когато формата на кривите на токовете и напреженията не представляват непосредствен интерес, може да бъде използуван приблизителен метод, при който действителните несинусоидални криви на тока и напрежението се заменят с еквивалентни синусоиди. Този метод носи названието метод на еквивалентните синусоиди. Такава замяна дава възможност за използуване на комплексния метод и чертане на векторни диаграми, независимо, че комплексните съпротивления си остават нелинейни и следователно алгебричните уравнения, записани в комплексна форма, остават нелинейни.

Изборът на еквивалентни синусоиди на напрежението и тока, т.е. на техните амплитуди и начални фази, се прави в зависимост от поставената задача. Ако интерес в случая представлява енергийната страна на процеса, то този избор трябва така да бъде направен, така че активната мощност във веригата или в отделни нейни части да се запази същата. Например, ако за разглеждания безинерционнен нелинеен елемент

е необходимо да се запази същата активна мощност върху елемента, то при замяната на несинусоидалния ток със синусоидален за еквивалентна синусоида трябва да се вземе първият хармоник на тока. И действително, при разглеждането на периодични несинусоидални режими е установено, че общата активна мощност P е равна на сума от активните мощности на постоянната съставка и на всички хармонични съставки на напрежението и тока, т.е.:

$$P = U_0 I_0 + U_1 I_1 \cos\varphi_1 + U_2 I_2 \cos\varphi_2 + ... + U_к I_к \cos\varphi_к + ... \qquad (6.5.2)$$

За разглеждания случай се записва: $U_0 = U_2 = \ldots = U_к = \ldots = 0$ и $\cos\varphi_1 = 1$. Следователно за мощността P се получава:

$$P = U_1 I_1. \qquad (6.5.3)$$

В други случаи е целесъобразно амплитудата на еквивалентната синусоида на тока или напрежението да бъде избрана така, че да се запази ефективната им стойност. Например, това е целесъобразно при последователно съединени линеен резистор със съпротивление R и нелинейна бобина без загуби. В този случай несинусодалният ток в бобината $i(t)$ се заменя със синусоидален, еквивалентен по ефективна стойност. За амплитудата на еквивалентната синусоида се записва:

$$I_{me} = \sqrt{2} I = \sqrt{2} \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T i^2(t)\,dt} \ . \qquad (6.5.4)$$

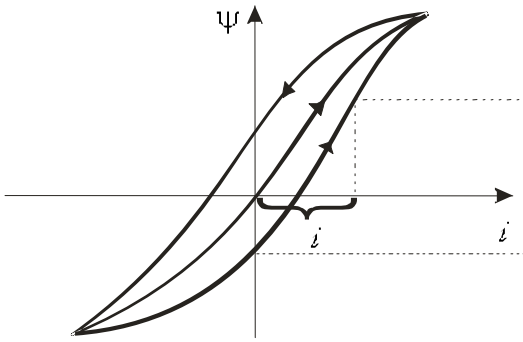
Действително, при такава замяна активната мощност P_R в линейния резистор R, която е $P_R = RI^2$, се запазва същата.

Методът на еквивалентните синусоиди намира приложение при пресмятането на периодичните режими в нелинейните радиотехнически устройства, например, при генераторите. При тях за еквивалентни синусоиди се приемат първите хармоници на тока и напрежението, тъй като на техните честоти се настройват резонансните контури.

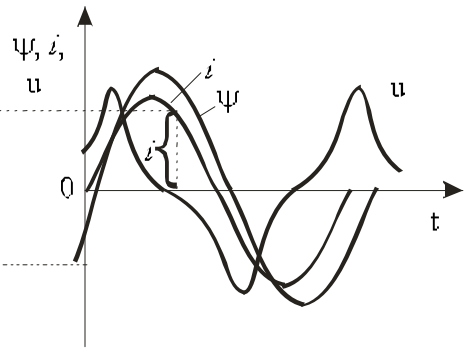
Методът на еквивалентните синусоиди намира широко приложение, при пресмятането на устройства, съдържащи феромагнитни сърцевини, например, трансформатори. Във връзка с това по-долу се разглеждат кривите на тока i и на магнитния поток Ψ при бобина с феромагнитна сърцевина.

Връзката между магнитния поток Ψ и тока i за бобина с феромагнитна сърцевина се дава с хистерезисната крива (фиг.6.5.3). Отначало се приема, че потокът Ψ, а следователно и ЕДН на самоиндукция: $e = -\frac{d\Psi}{dt}$ и нарежението $u = \frac{d\Psi}{dt}$ се изменят по синусоидален закон. В такъв случай токът i ще бъде несинусоидален и поради симетричния характер на хистерезисната крива спрямо абцисната ос ще съдържа само нечетни хармонични съставки – предимно 3, 5 и 7. Кривите на потока $\Psi = \Psi(t)$ и на тока $i = i(t)$ за този случай са показани на фиг.6.5.4.

Кривата на тока $i = i\,(t)$ може да бъде построена графично точка по точка като се използуват кривата на потока $\Psi = \Psi(t)$ и хистерезисната крива $\Psi = \Psi(i)$. Максимумите на тока i и потока Ψ съвпадат, но през нулата кривата на тока $i = i(t)$ преминава по-рано



Фиг. 6.5.3.



Фиг. 6.5.4.

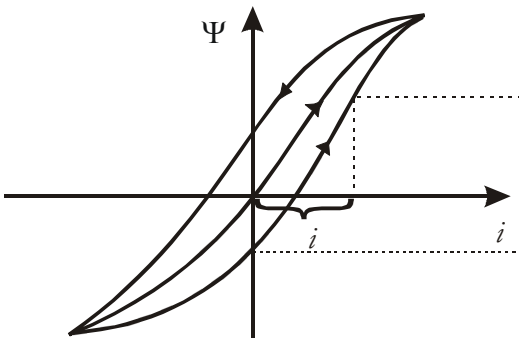
в сравнение с кривата на потока $\Psi = \Psi(t)$. В този случай поради насищането на сърцевината кривата на тока $i = i(t)$ има заострена форма.

При втория граничен случай, когато се приема, че токът $i = i(t)$ се изменя по синусоидален закон, то потокът Ψ ще бъде несинусоидален (фиг.6.5.6). Поради насищането на сърцевината кривата на потока $\Psi = \Psi(t)$ има сплесната форма. Кривата на напрежението има заострена форма. Кривата на потока $\Psi = \Psi(t))$ може да бъде построена графично точка по точка като се използуват кривата на тока $i = i(t)$ и хистерезисната крива $\Psi = \Psi(i)$. Кривата на напрежението $u = u(t)$ може да бъде получена чрез графично диференциране на кривата на потока $\Psi = \Psi(t)$.

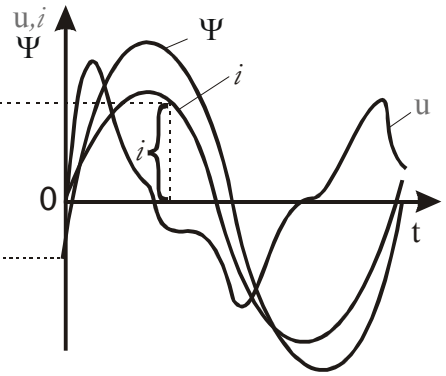
В общия случай както кривата на тока $i = i(t)$, така и кривите на потока $\Psi = \Psi(t)$ и на напрежението $u = u(t)$ са несинусоидални.

При избора на еквивалентни синусоиди на напрежението и тока за бобина с феромагнитна сърцевина е необходимо загубите в сърцевината P_0 да останат неизменни. Тези загуби са от хистерезис P_x и от вихрови токове $P_{вт}$. В такъв случай за ефективните стойности на еквивалентните синсуиди на напрежението U и на тока I се записва:

$$U.I.\cos\varphi = P_x + P_{вт} = P. \qquad (6.5.5)$$



Фиг. 6.5.5



Фиг. 6.5.6

Необходими са още две условия за определяне на трите величини: фазова разлика φ и амплитуда на напрежението $U_m = \sqrt{2}.U$ и на тока $I_m = \sqrt{2}.I$. Тези условия могат да бъдат: амплитудите U_m и I_m да бъдат равни на амплитудите на първите хармоници на напрежението и тока или ефективните стойности U и I да бъдат равни на ефективните стойности на несинусоидалните напрежение и ток.

Замяната на действителните криви на тока и напрежението с еквивалентни синусоиди води до това, че връзката между магнитния поток ψ и тока i за бобината с феромагнитна сърцевина, т.е.: $\Psi = \Psi(i)$ се изразява чрез уравнение на елипси, която загражда площ, равна в съответния мащаб на загубите в сърцевината. В зависимост от избора на амплитудите U_m и I_m на еквивалентните синусоиди се получават различни елипси, но всички елипси трябва да заграждат една и съща площ.

В случай, че се вземат предвид само загубите от хистерезис P_x, то площта заграждана от елипсите трябва да бъде равна на площта, заградена от действителната хистерезисна крива $\Psi = \Psi(i)$. Това е илюстрирано на фиг.6.5.7 и 6.5.8, като фиг.6.5.7 се отнася за случая на синусоидални напрежение u и поток Ψ, а фиг.6.5.8 – за случая на синусоидален ток. Наличието на вихрови токове доближава действителната крива $\Psi = \Psi(i)$ до елипса. Площта, затворена от еквивалентната елипса, в този случай

трябва бъде равна на площта, заградена от действителната хистерезисна крива и равна в съответния мащаб на сумарните загуби в сърцевината.

6.6. Бобина с феромагнитна сърцевина. Векторна диаграма и еквивалентна заместваща електрическа схема. Комплексно магнитно съпротивление и комплексна магнитна проницемост

1. Уравнение на бобина с феромагнитна сърцевина

Разглежда се бобина със затворена феромагнитна сърцевина, чиято намотка е с w навивки. Процесът в бобината се описва с уравнението:

$$u = Ri + \frac{d\Psi}{dt} , \qquad (6.6.1)$$

където R е съпротивлението на намотката;

Ψ - пълният магнитен поток.

Пълният магнитен поток ψ може да бъде представен като сума от две съставки Ψ_0 и Ψ_s, т.е.: $\Psi = \Psi_0 + \Psi_s$. Потокът Ψ_0 се определя от линиите на магнитната индукция, които се затварят изцяло през сърцевината. Този поток може да се представи по следния начин: $\Psi_0 = w.\Phi_0$, където Φ_0 е основният магнитен поток.

Потокът Ψ_s се определя от линиите на магнитната индукция, които се затварят частично или изцяло през въздуха, т.е. това е потокът на разсейването. Тъй като магнитното съпротивление на пътя, по който се затваря този поток, практически не зависи от тока i, то той е пропорционален на тока, т.е.: $\Psi_s = L_s i$, където $L_s = const$ е индуктивността на разсейването.

Тъй като магнитната проницаемост и магнитното съпротивление на сърцевината зависят от интензитета на магнитното поле H, а оттам и от тока i, то магнитният поток ψ_0 е свързан с тока i с нелинейна зависимост.

След заместване на съставките на потока ψ в уравнение (6.6.1) се получава:

$$u = Ri + L_s \frac{di}{dt} + w\frac{d\Phi_0}{dt} = Ri + L_s \frac{di}{dt} + u_0 . \qquad (6.6.2)$$

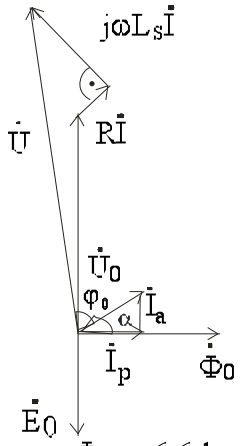
Горното уравнение е нелинейно и поради това, даже ако приложеното напрежение u е синусоидално, то токът i ще бъде несинусоидален. След замяна на несинусоидалнните криви на тока и на потока с еквивалентни синусоиди, уравнение (6.6.2) може да бъде записано в комплексна форма за комплексните амплитуди:

$$\dot{U}_m = R\dot{I}_m + j\omega L_s \dot{I}_m + j\omega w\dot{\Phi}_{0m} = R\dot{I}_m + j\omega L_s \dot{I}_m + \dot{U}_{0m} . \qquad (6.6.3)$$

2. Векторна диаграма и еквивалентна заместваща електрическа схема

Поради загубите в сърцевината $P_c = P_x + P_{BT} = U_0 I\cos\varphi_0$, то еквивалентната синусоида на тока i ще изостава от еквивалентната синусоида на напрежението u_0 на ъгъл $\varphi_0 < \frac{\pi}{2}$. Тъй като еквивалентната синусоида на тока ψ_0 изостава от еквивалентната синусоида на напрежението $u_0 = d\Psi_0/dt$ на ъгъл $\pi/2$, то тя ще изостава от еквивалентната синусоида на тока i на ъгъл $\alpha = \pi/2 - \varphi_0$.

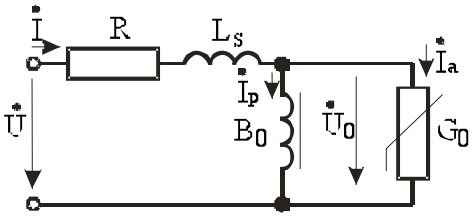
На фиг.6.6.1 е показана векторната диаграма на бобината, съответстваща на уравнението ѝ, записано в комплексна форма (уравнение (6.6.3), разделено на $\sqrt{2}$). На диаграмата е показан и векторът $\dot{E}_0$ на ЕДН на самоиндукция, индуктирано в намотката от потока Φ_0, което се дава с израза: $e_0 = -w\frac{d\Phi_0}{dt}$.



Фиг. 6.6.1

Токът $\dot{I}$ може да бъде разложен на две съставки: реактивна съставка $\dot{I}_p$, изоставаща от напрежението $\dot{U}_0$ на ъгъл $\pi/2$ и съвпадаща по фаза потока $\dot{\Phi}_0$ и активната съставка $\dot{I}_a$, съвпадаща по фаза с напрежението $\dot{U}_0$ и изпреварваща потока $\dot{\Phi}_0$ на ъгъл $\pi/2$.

Въз основа на разгледаното по-горе, бобината може да бъде представена с еквивалентна заместваща електрическа схема, която е показана на фиг.6.6.2. За проводимостите на двата й паралелни клона могат да бъдат записани изразите:



Фиг. 6.6.2.

$$B_0 = \frac{I_p}{U_0} \quad \text{и} \quad G_0 = \frac{I_a}{U_0} = \frac{U_0.I_a}{U_0^2} = \frac{P_c}{U_0^2} = \frac{2.P_c}{U_{om}^2}. \qquad (6.6.4)$$

3. Комплексно магнитно съпротивление и комплексна магнитна проницаемост

Обстоятелството, че магнитният поток $\dot{\Phi}_0$ във феромагнитната сърцевина на бобината изостава от намагнитващия ток $\dot{I}$, а следователно и от магнитовъзбудителното напрежение $\dot{F} = w\dot{I}$ на ъгъл α може да бъде взето предвид, ако в закона на Ом за разглежданата магнитна верига се въведе комплексно магнитно съпротивление на сърцевината Z_μ, т.е.:

$$\dot{\Phi}_{0m} = \frac{w\dot{I}_m}{Z_\mu}. \qquad (6.6.5)$$

За комплексното магнитно съпротивление Z_μ се записва:

$$Z_\mu = z_\mu e^{j\alpha} = R_\mu + jX. \qquad (6.6.6)$$

Съпротивлението Z_μ може да бъде изразено чрез дължината l, сечението S и магнитната проницаемост μ на сърцевината, т.е.:

$$Z_\mu = \frac{w\dot{I}_m}{\dot{\Phi}_{0m}} = \frac{\dot{H}_m l}{\dot{B}_m S} = \frac{l}{\dot{\mu} S}, \qquad (6.6.7)$$

където $\dot{\mu}$ е комплексната проницаемост на съцевината, отчитаща и загубите в сърцевината.

Между комплексното магнитно съпротивление на сърцевината Z_μ и комплексното електрическо съпротивление $Z_{oe} = 1/(G_0 - jB_0)$ на бобината, определяно чрез тока $\dot{I}_m$ и напрежението $\dot{U}_{om} = j\omega w\dot{\Phi}_{om}$, съществува връзка. За съпротивлението Z_{oe}, което

съгласно схемата от фиг.6.6.2, представлява еквивалентното съпротивление на двата й паралелни клона с параметри G_0 и B_0, може да се запише:

$$Z_{oe} = \frac{\dot{U}_{0m}}{\dot{I}_m} = \frac{j\omega w \dot{\Phi}_{0m}}{\dot{I}_m}\frac{w}{w} = \frac{j\omega w^2}{Z_\mu}. \qquad (6.6.8)$$

Може да се докаже, че имагинерната съставка X_μ на комплексното магнитно съпротивление Z_μ е пропорционална на загубите в сърцевината P_c. И действително, може да се запише:

$$\frac{1}{Z_{oe}} = Y_{oe} = G_0 - jB_0 = \frac{Z_\mu}{j\omega w^2} = \frac{R_\mu + jX_\mu}{j\omega w^2} = \frac{X_\mu}{\omega w^2} - j\frac{R_\mu}{\omega w^2}. \qquad (6.6.9)$$

Като се имат предвид изрази (6.6.4) и (6.6.9), може да се установи, че:

$$X_\mu = \omega w^2 G_0 = \frac{2P_c}{\omega \Phi_{0m}^2}. \qquad (6.6.10)$$

Последният израз показава, че съставката X_μ е пропорционална на загубите в сърцевината P_c.

Въз основа на разглежданото по-горе, може да се заключи, че чрез въвеждането на комплексно магнитно съпротивление и комплексна магнитна проницаемост се получава възможност за използуване на комплексния метод за описване на периодичните режими в магнитните вериги. Тук трябва да се има предвид обаче, че съставките на комплексното магнитно съпротивление R_μ и X_μ са нелинейни фукции на магнитновъзбудителното напрежение $F = wI$ или на потока Φ_0.

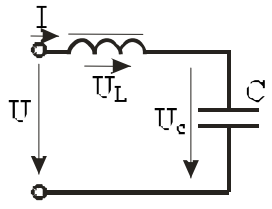
6.7. Ферорезонанс при последователно и паралелно съединени бобина с феромагнитна сърцевина и кондензатор

Процесите във вериги, съдържащи бобини с феромагнитна сърцевина и други елементи, като кондензатори и резистори са доста сложни. Тези процеси могат да бъдат разглеждани приблизително, ако несинусоидалните токове и напрежения се заменят с еквивалентни синусоиди. Тогава резултантната нелинейна характеристика на веригата може да се получи чрез графично сумиране на характеристиките на отделните елементи. При това трябва да се има предвид, че при последователно съединение на активни и реактивни елементи, еквивалентните синусоиди на напреженията върху тях са дефазирани на ъгъл $\pi/2$, а при паралелно съединение на активни и реактивни елементи еквивалентните синусоиди на токовете през тях са дефазирани на ъгъл $\pi/2$.

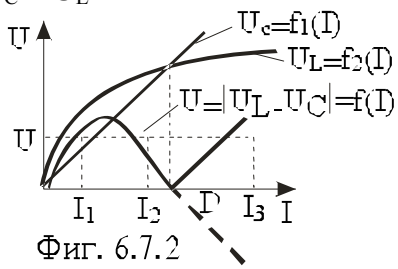
1. Ферорезонанс при последователно съединени съединени бобина с феромагнитна сърцевина и кондензатор

Разглежда се верига, съставена от последователно съединени бобина с феромагнитна сърцевина и линеен кондензатор (фиг.6.7.1.). Предполага се, че във веригата отсъствуват загуби. Несиносуидалните криви на напреженията и тока се заменят с еквивалентни синусоидални, за които се приема, че са равни на първите хармоници на действителните криви, т.е. се пренебрегва наличието на висши хармоници. При тези условия напреженията върху бобината U_L и върху кондензатора U_C са дефазирани на ъгъл π и приложеното напрежение U е равно на абсолютната стойност на разликата им, т.е.: $U = |U_L - U_C|$. При това е възможно да преобладава

индуктивното напрежение U_L, т.е.: $U_L > U_C$ или да преобладава капацитивното напрежение U_C, т.е.: $U_C > U_L$.



Фиг. 6.7.1

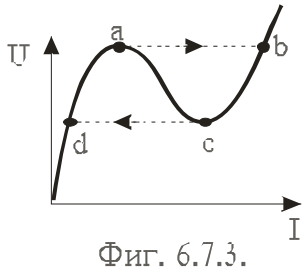


Фиг. 6.7.2

На фиг.6.7.2 са показани V-A характеристики на двата елемента: на кондензатора $U_c = f_1(I) = (1/\omega C)I$, която е линейна (права линия) и на бобината $U_L = f_2(I)$, която е нелинейна. На фигурата е показана и резултантната V-A характеристика $U = |U_L - U_C| = f(I)$, която като разлика от двете характеристики е също нелинейна.

Графиката на зависимостта $U = f(I)$ се намира, като от ординатата на кривата $U_L = f_2(I)$ се извади съответната ордината на правата $U_c = I/\omega C$. При зададено напрежение U токът може да бъде определен чрез намиране на пресечните точки на кривата $U = f(I)$ с правата, успоредна на абцисната ос, намираща се на разстояние U от нея. От Фиг.6.7.2 може да се види, че за някои напрежения могат да се получат три пресечни точки, т.е. при едно и също напрежение U, приложено към веригата, в нея могат да се получат три установени режима.

Такава неопределеност при линейните електрически вериги не може да бъде получена и в разглежданата верига би отсъствувала ако V-A характеристика $U_L = f_2(I)$ не се пресича с V-A характеристика на кондензатора $U_c = f_1(I)$. При пресичането на двете характеристики тази неопределеност е налице само ако стойността на напрежението U е по-малка от стойността му, при която правата на напрежението U е допирателна към кривата $U = (I)$. В първите две точки, т.е. за стойностите на тока I_1 и I_2 преобладава индуктивното напрежение U_L, а в третата точка, т.е. за стойността на тока I_3 преобладава капацитивното напрежение U_c. В точката D, за която двете напрежения са равни, т.е.: $U_L = U_c$ се получава резонанс на напреженията, който се нарича ферорезонанс на напреженията. За разлика от линейните вериги, резонансът в разглежданата верига се постига чрез изменение на приложеното напрежение. Това се обяснява с обстоятелството, че индуктивността на бобината с феромагнитна сърцевина зависи от тока и следователно се изменя при изменение на приложеното напрежение.



Фиг. 6.7.3.

Поради наличието на загуби във веригата реалната й V-A характеристика има вида, показан на фиг.6.7.3. При плавно повишаване на напрежението U, токът I също плавно нараства докато достигне точка a, в която токът със скок нараства до стойността си в точка b, а след това нараства плавно в съответствие с кривата $U = f(I)$.

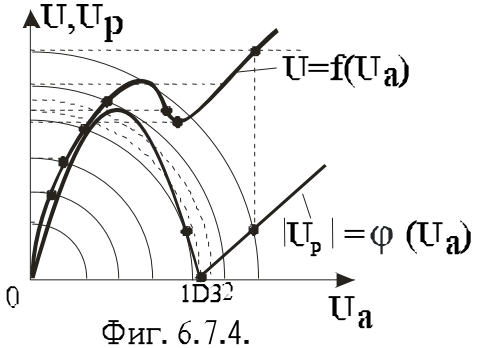
При намаляване на напрежението U, токът I спада плавно до точка c, в която със скок намалява до стойността си, съответствуваща на точка d, след която плавно спада до нулата.

При тези скокове се променя и знакът на фазовата разлика.

Участъкът ac от кривата $U = f(I)$ е с отрицателно динамично съпротивление. Режимите на работа на веригата в този участък са неустойчиви, тъй като най-малкото случайно увеличаване на тока I води до намаляване на напрежението U, а оттам до по-нататъшното увеличаване на тока I до достигане на точка c. Обратно най-малкото случайно намаляване на тока I води до увеличаване на напрежнието U, което води до по-нататъшно намаляване на тока I до достигане на точка a. За тези две точи a и c

режимът е устойчив. За получаване на устойчив режим на работа в участъка ac е необходимо последователно във веригата да се включи линеен резистор с достатъчно голямо съпротивление.

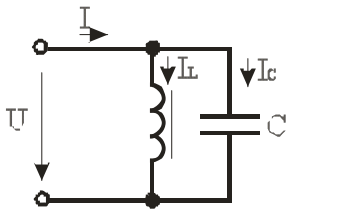
По-нататък се разглежда графичното получаване на резултантната V-A хапактеристика на верига, съставена от последователно съединени бобина с феромагнитна сърцевина и кондензатор при отчитане на активното съпротивление R на веригата. В този случай приложеното към веригата напрежение U има активна съставка $U_a = RI$ и реактивна съставка $|U_p| = | U_L - U_c |$. Зависимостта на реактивната съставка $|U_p|$ от тока I при верига без загуби, т.е. при $R = 0$ бе разгледана по-горе (вж. фиг.6.7.1). Тъй като ктивната съставка е $U_a = RI$ и съпротивлението е постоянно, т.е.: $R = const$, то реактивната съставка $|U_p|$ може да бъде представена като функция на активната съставка U_a вместо на тока I. Двете зависимости $|U_p| = f(I)$ и $|U_p| = \varphi(U_a)$ са аналогични. На фиг.6.7.4 е показана зависимостта $|U_p| = \varphi(U_a)$, като по абцисната ос вместо тока I се нанася напрежението U_a. Мащабите по двете оси са еднакви. Тъй като напреженията U_a и $|U_p|$ са дефазирани на ъгъл $\pi/2$, то за общото напрежение U може да се запише:



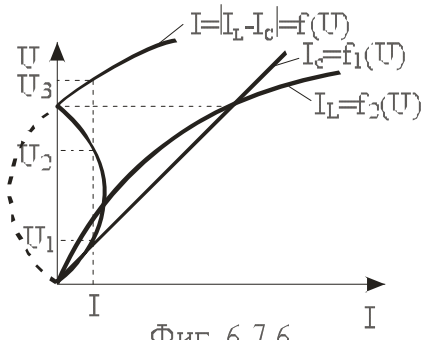
Фиг. 6.7.4.

$$U^2 = U_a^2 + U_p^2. \qquad (6.7.1)$$

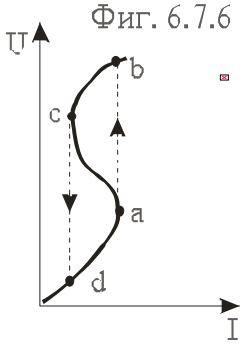
Последното равенство показва, че за напреженията U_a и $|U_p|$ освен връзката $|U_p| = \varphi(U_a)$, показана на фиг.6.7.4, съществува връзка, която се дава с уравнение на окръжност с център координатното начало O и с радиус, равен на приложеното напрежение U. Тези две условия за напреженията U_a и $|U_p|$ се изпълняват в пресечните точки на съответната окръжност с радиус U с кривата $|U_p| = \varphi(U_a)$. При това броят на тези пресечни точки съответствува на броя на възможните режими във веригата при зададена стойност на напрежението U. При всички напрежения по-малки от напрежението, определено с окръжност 1 и по-големи от напрежението, определено с окръжност 2, пресечната точка е една. За окръжност 3 обаче, се получават три пресечни точки. През пресечната точка на съответната окръжност с ординатната ос се прекарва права, успоредна на абцисната ос (фиг.6.7.4). По тази права се нанася напрежението U_a, което съответствува на пресечната точка на окръжността на даденото напрежение U с характеристиката $|U_p| = \varphi(U_a)$. След съединяване на точките се получава търсената характеристика $U = f(U_a)$, която поради пропорционалността между напрежението U_a и тока I дава V-A характеристика на веригата $U = f(I)$. Със знака * е отбелязана точката, съответстваща на резонанса, която не е най-ниската точка на



Фиг. 6.7.5



Фиг. 6.7.6



Фиг. 6.7.7

характеристиката $U = f(U_a)$. Най-ниската точка на тази характеристика се получава за окръжност 1.

2. Ферорезонанс при паралено съединение бобина с феромагнитна сърцевина и кондензатор

Разглежда се верига, съставена от паралелно съединени бобина с феромагнитна сърцевина и кондензатор. И тук отначало се пренебрегват загубите във веригата и висшите хармоници. В такъв случай токът през бобината I_L е дефазиран на ъгъл, равен на π спрямо тока през кондензатора I_c и общият ток I в неразклонената част от веригата ще бъде равен на абсолютната стойност на разликата им. При това са възможни случаи, когато токът I_L е по-голям от тока I_c, както и случаи, когато токът I_c е по-голям от тока I_L.

На фиг.6.7.6 са показани характеристиките на кондензатора $I_c = f_1(U)$ (права линия) и на бобината $I_L = f_2(U)$, която е нелинейна, поради което резултантната характеристика на веригата $I = | I_L - I_c | = f(U)$ е също нелинейна.

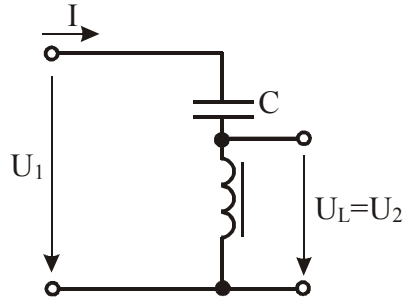
При зададен ток I, напрежението U се получава като се прекара права, успоредна на ординатната ос на разстояние от нея, равно на тока I. Ако токът има стойност по-малка от тази, при която правата е допирателна към характеристиката $I = f(U)$, се получават три пресечни точки. За точките, определящи напрежения U_1 и U_2 преобладава капацитивният ток, а за точката, определяща напрежние U_3 – индуктивният ток. Точка D е точка на резонанса на токовете, който се нарича ферорезонанс на токовете.

Поради наличието на загуби във веригата и на висши хармоници, то реалната й характеристика има вида, показан на фиг.6.7.7. Ако плавно се увеличава или намалява токът, се получават скокове на напрежението, свързани с промяна на знака на фазовата разлика. Това е възможно да се получи в устройство, в което се регулира не напрежнието, а токът. Това на практика може да се изпълни като веригата се включи към източник на изменящо се напрежние посредством резистор с голямо съпротивление R, много по-голямо от съпротивлението на контура на паралелно съединените бобина и кондензатор. В такъв случай, при плавно изменение на напрежението на източника U, то токът $I = U/R$ ще се изменя също плавно, при което върху контура ще се получават скокове на напрежението. Ако веригата, съставена от паралелно съединени бобина с феромагнитна сърцевина и кондензатор, се включи към източник на напрежение с малко вътрешно съпротивление, то при изменение на напрежението U на източника може да бъде получена цялата крива от фиг.6.7.7 без скокове.

6.8. Феромагнитни стабилизатори на напрежение и усилователи на мощност

1. Феромагнитни стабилизатори на напрежение

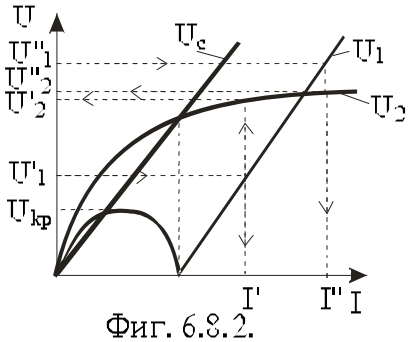
Особеностите на веригите, съдържащи бобини с феромагнитна сърцевина и кондензатори, се използуват при устройствата, наречени феромагнитни стабилизатори на напрежение. Тези устройства служат за поддържане на постоянно по ефективна стойност напрежение на консуматора при изменение на напрежението на захранващата мрежа.



Фиг. 6.8.1.

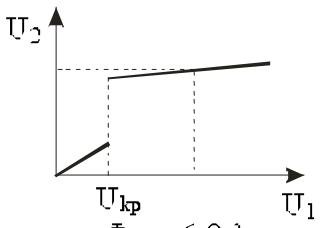
На фиг.6.8.1 е показано схемата на най-простия стабилизатор на напрежение, който е съставен от последователно съединени конзензатор с капацитет C и бобина с феромагнитна сърцевина.

Към стабилизатора се подава напрежение U_1 от захранващата мрежа, а напрежението върху бобината му L е изходното му напрежение, т.е.: $U_L = U_2$.



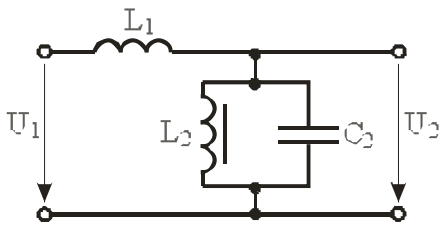
Фиг. 6.8.2.

Разглежда се работата на стабилизатора при режим на празен ход. При известни капацитет на кондензатора C и V-A характеристика на бобината $U_L = f_2(I)$ може да се построи зависимостта на входото напрежение U_1 от тока I, т.е.: $U_1 = | U_L - U_c | = f_1(I)$. Съответните криви са показани на фиг.6.8.2. Приема се, че входното напрежение U_1 се е изменило от U'_1 до U''_1. Като се използуват кривите $U_1 = f_1(I)$ и $U_2 = U_L = f_2(I)$ се намират съответните стойности на изходното напрежение U'_2 и U''_2. При това на стойностите на U'_1 и U'_2 съответствува ток във веригата на стабилизатора I', а на стойностите – U''_1 и U''_2 – ток I''.



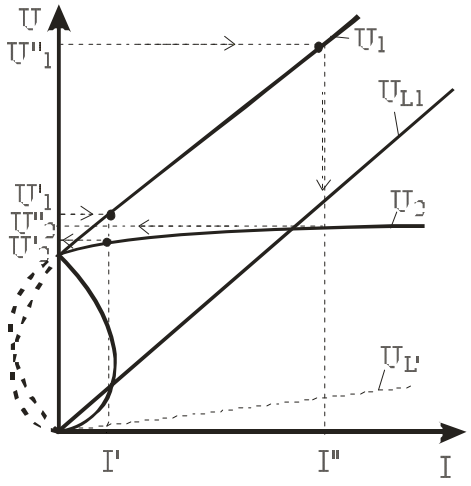
Фиг. 6.8.3.

Ако се зададат стойности на напрежението U_1 и от фиг.6.8.2 се намерят съответните им стойности на напрежението U_2, може да се построи зависимостта $U_2 = f(U_1)$, която е показана на фиг.6.8.3. От фигурата може да се види, че разглежданата верига може да стабилизира напрежението U_2 само при напрежение на захранващата мрежа U_1, по-голямо от критичното напрежение $U_{кр}$, т.е.: $U_1 > U_{кр}$. От фиг.6.8.3 може да се установи още, че стабилизацията ще бъде толкова по-добра, колкото е по-полегат крайният участък на V-A характеристика на бобината.



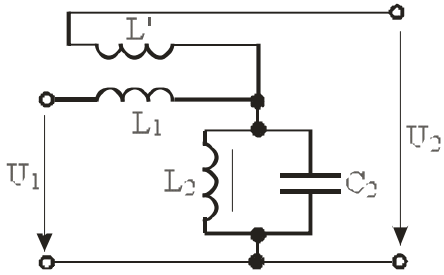
Фиг. 6.8.4

В практиката често се използва стабилизатор, основната част на схемата, на който е представена на фиг.6.8.4. В тази схема линеен елемент е бобината с феромагнитна сърцевина L_1, работеща в линеен режим, а нелинеен елемент верига, съставена от паралелно съединени линеен кондензатор C_2 и бобина с феромагнитна сърцевина L_2, работеща в режим на насищане. Съответните характеристики на бобината L_1 - $U_{L1} = f(I)$, на паралелно съединените клонове L_2,C_2 - $U_2 = f_2(I)$ и на общото напрежение $U_1 = f_1(I)$ са показани на фиг.6.8.5.



Фиг. 6.8.5

По-нататъшно усъвършенствуване на стабилизатора от фиг.6.8.4, може да се постигне, ако от напрежението U_2 на контура L_2,C_2 се извади напрежението $U_{L'}$, представляващо част от напрежението U_{L1} на бобината L_1 (фиг.6.8.6). Така се получава почти пълна стабилизация на изходното напрежение U_2 .



Фиг. 6.8.6

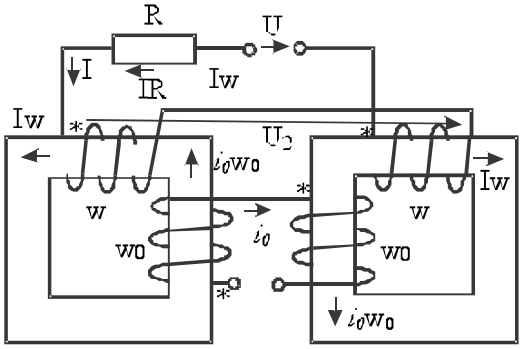
При включване на товар към стабилизатора се влошава характеристиката му, която става по-малко полегата. Трябва да се има предвид още, че

номиналната мощност на елементите на стабилизатора значително превишава допустимата мощност на натоварване.

Като недостатъци на феромагнитните стабилизатори на напрежение може да се посочи зависимостта на изходното напрежение от честотата, а също така, че при синусоидално входно напрежение изходното напрежение е несинусоидално.

2. Феромагнитни усилватели на мощност

Ако върху феромагнитната сърцевина на бобина се постави допълнителна намотка, през която преминава постоянен ток, то чрез изменение на този ток може да се изменя характеристиката на основната бобина. Така се получава управляем индуктивен елемент. Такива управляеми индуктивни елементи се използуват в така наречените феромагнитни усилватели на мощност.



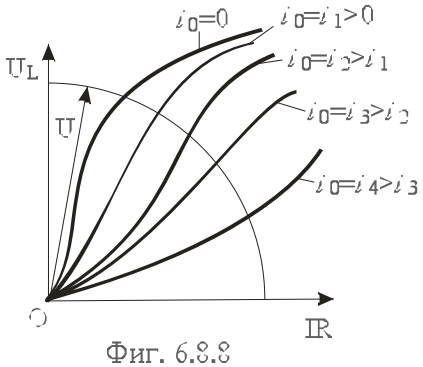
Фиг. 6.8.7

На фиг.6.8.7 е показана схемата на феромагнитен усилвател на мощност. Усилвателя се състои от две еднакви феромагнитни сърцевини, върху които са поставени две намотки с брой на навивките w и w_0. Намотките с w навивки са съединени последователно с консуматор със съпротивление R. Тази част от веригата се захранва от източник на променливо напрежение U с честота f. Намотките с w_0 навивки са на управляващата верига. През тях преминава постоянен ток i_0. При увеличаване на този ток, нараства подмагнитването на сърцевините и намалява индуктивното съпротивление на бобините с w навивки за променливия ток I, а съответно намалява напрежението U_L върху тези бобини.

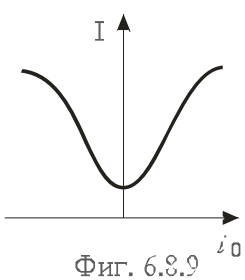
На фиг.6.8.8 е представена фамилия характеристики на напрежението U_L върху бобините с w навивки от напрежението върху консуматора, т.е.: $U_L = f(I.R)$ при различни стойности на подмагнитващия ток i_0. Ако се работи с еквивалентни синусоиди и се пренебрегнат загубите в сърцевините и в намотките, то може да се смята, че напреженията U_L и $I.R$ са дефазирани на ъгъл $\pi/2$. В такъв случай може да се запише:

$$U_L^2 + (I.R)^2 = U^2 . \qquad (6.8.1)$$

Това уравнение при зададено напрежение U, т.е.: $U = \text{const}$ определя окръжност с радиус R и с център координатното начало. Пресечните точки на окръжността с характеристиките при различни стойности на тока i_0 дават зависимостта на напрежението върху консуматора $U_R = RI$, а следователно и на тока I през него от тока i_0 (фиг.6.8.9). При условие че, мощността в управляващата верига е много по-малка от мощността в управляваната верига с консуматора, т.е.: $i_0^2 R_0 << I^2 R$, то се дава възможност със сравнително малка мощност в управляващата верига да се управлява значителна мощност в консуматора, т.е. се получава усилвател на мощност.



Фиг. 6.8.8



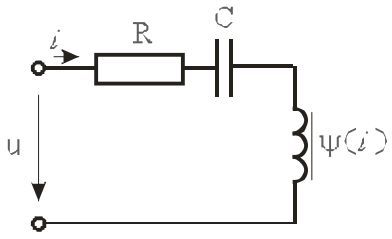
Фиг. 6.8.9

На фиг.6.8.7 намотките с навивки w и w_0 са така навити и свързани помежду си, че в консуматора да се компенсират четните хармоници, дължащи се на подмагнитването с ток i_0 .По този начин се осигурява и компенсирането на ЕДН, индуктирани в управляващите намотки от тока I с честота f.

6.9. Метод на хармоничния баланс

1. Общи сведения и основни положения

Методът на хармоничния баланс, известен още под названието честотен метод на неопределените коефициенти, се използува при анализа на периодичните режими в нелинейните електрически вериги. При този метод търсеното решение се представя като сума от хармонични съставки. При определени условия се отчита и постоянната съставка. Това решение се замества в системата нелинейни диференциални уравнения на веригата и се изравняват коефициентите пред еднаквите тригонометрични функции. Корените на получената по този начин система нелинейни уравнения позволяват да се определи приблизително установеният режим. Методът на хармоничния баланс намира приложение при изследване на устройства от типа на умножители и делители на честота.



Фиг. 6.9.1

Същността на метода на хармоничния баланс ще бъде изяснена със следния пример (фиг.6.9.1) – анализ на установения режим във верига от последователно съединени линейни резистор и кондензатор и нелинейна бобина. Приема се, че загубите в магнитопровода могат да бъдат пренебрегнати. В такъв случай зависимостта на пълния магнитен поток Ψ от тока i, т.е.: $\Psi = \Psi(i)$ ще бъде еднозначна. Удобно е тя да бъде апроксимирана с полином от вида:

$$\Psi(i) = a_1 i - a_3 i^3. \qquad (6.9.1)$$

При това апроксимиране за индуктивното напрежение $d\psi/dt$ се получава:

$$\frac{d\Psi}{dt} = a_1 \frac{di}{dt} - 3a_3 i^2 \frac{di}{dt} = (a_1 - 3a_3 i^2)\frac{di}{dt}. \qquad (6.9.2)$$

По втория закон на Кирхоф се записва уравнението на веригата:

$$\frac{d\Psi}{dt} + Ri + \frac{1}{C}\int i dt = u(t). \qquad (6.9.3)$$

При синусоидално входно напрежение $u(t)$ след отчитане на израза за напрежението $d\Psi/dt$ се получава:

$$(a_1 - 3a_3 i^2)\frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{C}\int i dt = U_m \sin(\omega t + \psi_u). \qquad (6.9.4)$$

Търси се установеният ток във веригата. Съгласно метода на хармоничния баланс се приема, че търсеното решение обхваща основен хармоник и един или повече висши хармоници. За случая се приема участието на първи и трети хармоник, т.е.:

$$i(t) = I_{m1} \sin(\omega t + \psi_{i1}) + I_{m3} \sin(3\omega t + \psi_{i3}). \qquad (6.9.5)$$

Решение (6.9.5) се замества в уравнение (6.9.4), извършват се съответните тригонометрични преобразувания и се изравняват коефициентите пред еднаквите тригонометрични функции $\sin \omega t$, $\cos \omega t$, $\sin 3\omega t$ и $\cos 3\omega t$ от двете страни на равенството. Така се получава система от четири нелинейни уравнения с четири неизвестни – амплитудите I_{m1} и I_{m3} и началните фази ψ_{i1} и ψ_{i3}.

Периодичният ток $i(t)$ може да се представи още и по следният начин:

$$i(t) = I_{m_{1S}} \sin \omega t + I_{m_{1C}} \cos \omega t + I_{m_{3S}} \sin 3\omega t + I_{m_{3C}} \cos 3\omega t. \qquad (6.9.6)$$

В този случай неизвестните величини са амплитудите I_{m1s}, I_{m1c}, I_{m3s} и I_{m3c}.

В повечето случаи решението на системата уравнение, получена по метода на хармоничния баланс, се определя само по числен път. Понякога системата може да бъде решена аналитично и графоаналитично.

1. Изчислителни трудности, свързани с прилагането на метода на хармоничния баланс

Първата трудност се отнася до броя на уравненията, които трябва да се решат.

Ако се отчитат само две хармонични съставки на установените величини, а веригата се описва от система от N на брой уравнения, то по метода на хармоничния баланс трябва да е реши система от $4N$ уравнения. При отчитане на r хармоника, броят на уравненията става $2rN$. Това означава, че методът на хармоничния баланс е целесъобразно да се прилага тогава, когато поради резонансни явления освен основния хармоник е достатъчно да се отчита още само един хармоник.

Втората трудност възниква при прилагането на тригонометричните преобразувания.

Определянето на коефициентите пред различните тригонометрични функции може да бъде осъществено сравнително лесно при положение, че характеристиките на нелинейните елементи се апроксимират с полиноми. При такива преобразувания се появяват членове с честота, по-висока от честотата на отчетения в решението висш хармоник. Влиянието на тези членове се пренебрегва.

Тук трябва да се отбележи, че ако n е най-високата степен в апроксимиращите полиноми, а r е номерът на най-висшия хармоник, то при развитието се получават хармоници с честоти до $rn\omega$ включително. За разглеждания пример се пренебрегват нечетните хармоници с номера 5, 7 и 9.

Ако характеристиките на нелинейните елементи са представени графично, таблично или пък апроксимиращите изрази не са полиноми, то тогава численият подход трябва да се приложи още при съставянето на системата уравнения на хармоничния баланс. За илюстрация на това положение се разглежда същата верига. Уравнението й в този случай се записва по следния начин:

$$\frac{d\psi}{di}\frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{C}\int i dt = U_m \sin(\omega t + \psi_u). \qquad (6.9.7)$$

Приема се, че търсеното решение има вида (6.9.6). Замества се израз (6.9.6) в уравнение (6.9.7). Отчита се зависимостта:

$$\frac{1}{C}\int i dt = -\frac{1}{\omega C} I_{m_{1S}} \cos\omega t + \frac{1}{\omega C} I_{m_{1C}} \sin\omega t - \frac{1}{3\omega C} I_{m_{3S}} \cos 3\omega t + \frac{1}{3\omega C} I_{m_{1C}} \sin 3\omega t. \qquad (6.9.8)$$

Извършва се хармоничният баланс и се получава следната система уравнения:

$$\begin{cases} RI_{m_{1S}} + \dfrac{1}{\omega C} I_{m_{1C}} + f_{1_S}(I_{m_{1S}}, I_{m_{1C}}, I_{m_{3S}}, I_{m_{3C}}) = U_m \cos\psi_u; \\ RI_{m_{1C}} - \dfrac{1}{\omega C} I_{m_{1S}} + f_{1_C}(I_{m_{1S}}, I_{m_{1C}}, I_{m_{3S}}, I_{m_{3C}}) = U_m \sin\psi_u; \\ RI_{m_{3S}} + \dfrac{1}{3\omega C} I_{m_{3C}} + f_{3_S}(I_{m_{1S}}, I_{m_{1C}}, I_{m_{3S}}, I_{m_{3C}}) = 0; \\ RI_{m_{3C}} - \dfrac{1}{3\omega C} I_{m_{3S}} + f_{3_C}(I_{m_{1S}}, I_{m_{1C}}, I_{m_{3S}}, I_{m_{3C}}) = 0. \end{cases} \qquad (6.9.9)$$

В последната система с f_{rs} и f_{rc} за $r = 1, 3$ са означени коефициентите в реда на Фурие на следната периодична функция:

$$\varphi(t) = \frac{d\Psi}{di}\frac{di}{dt}. \qquad (6.9.10)$$

Съответните изрази за тези коефициенти са:

$$\left|\begin{array}{l} f_{rs} = \dfrac{2\omega}{T}\int_0^T \dfrac{d\Psi}{di}\left(I_{m1s}\cos\omega t - I_{m1c}\sin\omega t + 3I_{m3s}\cos 3\omega t - 3I_{m3c}\sin 3\omega t\right)\sin r\omega t dt; \\ f_{rc} = \dfrac{2\omega}{T}\int_0^T \dfrac{d\Psi}{di}\left(I_{m1s}\cos\omega t - I_{m1c}\sin\omega t + 3I_{m3s}\cos 3\omega t - 3I_{m3c}\sin 3\omega t\right)\cos r\omega t dt. \end{array}\right. \quad (6.9.11)$$

за r = 1, 3. В действителност коефициентите f_{1S}, f_{1C}, f_{3S} и f_{3C} не могат да бъдат определени, тъй като амплитудите I_{m1s}, I_{m1c}, I_{m3s} и I_{m3c} са неизвестни. Това налага използуването на подходящ числен метод.

От математична гледна точка задачата се свежда до решаване на линейна система уравнения, чийто матричен запис е:

$$\underline{A}.\underline{X} + \underline{f}(\underline{X}) = \underline{B}, \quad (6.9.12)$$

където $\underline{A}$ е квадратна постоянна матрица;

$\underline{X}$ - вектор, чиито елементи съвпадат с търсените амплитуди на отделните хармоници;

$\underline{B}$ – вектор на свободните членове, където са отразени амплитудите на хармониците на външните сигнали.

Описаният подход се отнася за процеса в умножителите на честота. Там освен основния хармоник се взема в предвид и един висш хармоник на периодичния ток.

По аналогичен начин методът на хармоничния баланс може да бъде приложен при разглеждане на режима на деление на честотата. В този случай се предполага, че външният сигнал е от вида:

$$u(t) = U_m \sin(3\omega t + \psi_{u3}). \quad (6.9.13)$$

Уравнението, описващо процеса в същата верига, е следното:

$$\frac{d\Psi}{di}\frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{C}\int i dt = U_m \sin(3\omega t + \psi_{u3}). \quad (6.9.14)$$

Приема се, че търсеният периодичен ток $i(t)$ освен основен хармоник:

$$I_{m3}\sin(3\omega t + \psi_{i3}) = I_{m3S}\sin 3\omega t + I_{m3C}\cos 3\omega t \quad (6.9.15)$$

съдържа и субхармоник:

$$I_{m1}\sin(\omega t + \psi_{i1}) = I_{m1S}\sin\omega t + I_{m1C}\cos\omega t. \quad (6.9.16)$$

Следователно, отново се допуска, че изразът за тока $i(t)$ е от вида (6.9.6). След извършване на хармоничния баланс се достига до система уравнения, подобна на системата уравнения (6.9.9). Единствената промяна в дясната част на равенствата, т.е. се променя векторът $\underline{B}$, който има вида:

$$\underline{B} = \left[0 \;\; 0 \;\; U_m\cos\psi_{u3} \;\; U_m\sin\psi_{u3}\right]_t$$

Може да се види още, че първите две уравнения на новата система ще бъдат еднородни.

Докато възникването на висши хармоници в нелинейните вериги е естествен процес, то възникването на субхармоници е явление, свързано с допълнителни условия.

2. Умножители на честота

Възникването на висши хармоници в дадена електрическа верига, в която действуват синусоидални източници, се дължи на наличието в нея на нелинейни елементи. Приема се, че характеристиката на нелинейния елемент е от вида:

$$y = y(x), \quad (6.9.17)$$

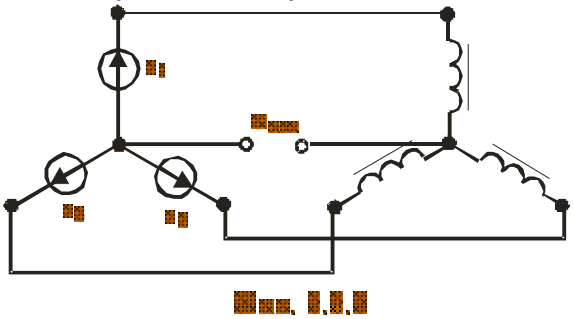
където y може да бъде ток, пълен магнитен поток или напрежение, а независимата променлива x е напрежение, ток или заряд.

Ако се приеме, че променливата x се изменя във времето по синусоидален закон, т.е.:

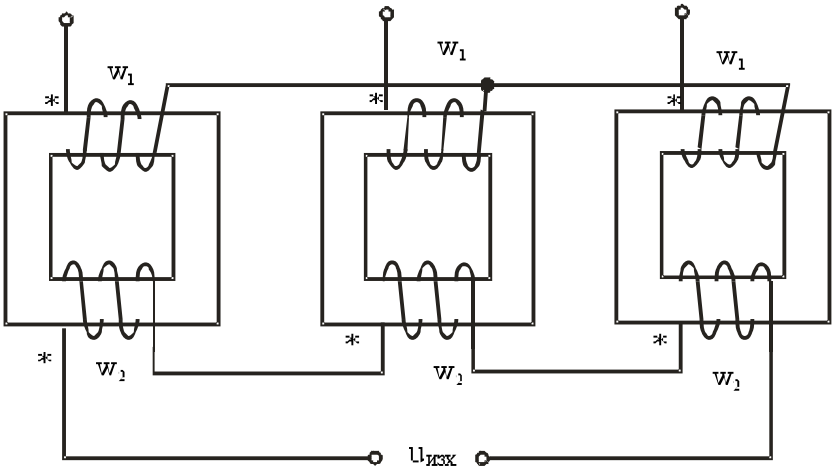
$$x(t) = X_m \sin(\omega t + \psi),$$

то за променливата y ще се получи:

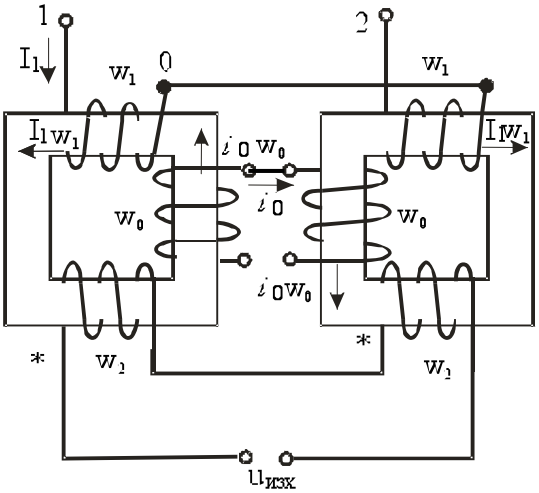
$$y = y\,[\,x(t)] = y(t) = \quad = y\,(t + kT).$$



Фиг. 6.9.1



Фиг. 6.9.3



Фиг. 6.9.4

Последният израз показва, че променливата y е периодична несинусоидална функция на времето t със същия период $T = 2\pi/\omega$, както и променливата t. От периодичността следва, че несинусоидалната променлива y може да бъде разложена в ред на Фурие, в който участвуват и висши хармоници. Това означава, че нелинейният елемент може да бъде разглеждан като източник на такива хармоници.

Умножителите на честота са статични устройства, в които поради нелинейността на участвуващите елементи възникват интензивни хармонични колебания. Тези колебания, с честота кратна на основната честота, представляват изходния сигнал.

Режим на трикратно умножение на честотата може да се реализира в трифазните нелинейни вериги. На фиг.6.9.2 е показана една от възможните схеми на утроител на честота. В схемата три нелинейни бобини са включени към трифазен генератор на синусоидално напрежение. Нелинейните бобини съществено деформират периодичния режим. При това линейните токове са практически синусоидални, а фазните напрежения – несинусоидални. В резултат на това възниква напрежение $U_{изх}$, съдържащо хармоници с номер, кратен на 3. При съответен подбор на характеристиките на нелинейните бобини, третият хармоник ще преобладава и устройството ще работи като утроител на честота.

На фиг.6.9.3 е представена втора схема на утроител на честотата. Тя е съставена от три еднакви трансфораматора с феромагнитни сърцевини. Първичните им намотки са свързани в звезда, а вторичните – в отворен триъгълник. Поради отсъствието на неутрален проводник фазните токове в първичната верига ще съдържат основен хармоник и висш хармоник с номер, кратен на 3. Ако се пренебрегне влиянието на висшите хармоници, то може да се приеме, че първичните токове са почти синусоидални. Ако работният режим е режим на насищане на сърцевините, то вторичните напрежения ще бъдат несинусоидални. При това кратните на 3 хармоници сумират действието си в напрежението $U_{изх}$. Основното предимство на тази схема е в това, че чрез избор на броя на навивките w_1 и w_2 може да се получи необходимата ефективна стойност на изходния сигнал при утрояване на честотата.

На фиг.6.9.4 е показана схемата на удвоител на честотата. Той е съставен от две еднакви бобини с три намотки: първична w_1, вторична w_2 и подмагнитваща w_0. Захранването на първичната верига се осъществява от синусоидален източник на еднофазно напрежение U_{12}. Напреженията U_{01} и U_{02} между неутралната точка 0 и изводите 1 и 2 на първичните намотки образуват симетрична двуфазна система с фазов ъгъл равен на π. В последователно съединените вторични намотки би трябвало да се получат хармоници с номер кратен на 2, т.е. четни хармоници.

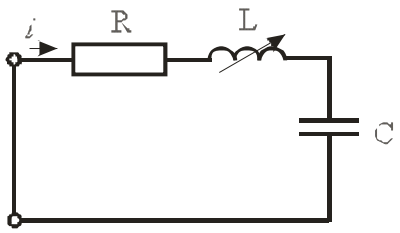
Тъй като кривата на намагнитване е симетрична, то четни хармоници не могат да съществуват. Ето защо за създаване на несиметрия в кривата на намагнитване се използуват подмагнитващите намотки, чрез които се пропуска постоянен ток i_0.

3. Делители на честота

Делителите на честота са статични устройства, в които при определени условия възникват интензивни субхармонични колебания с честота, която цяло число пъти е по-малка от честотата на сигнала на външния енергиен източник f_C.

Възникването на субхармонични колебания от типа 1/2, т.е. честота два пъти по-малка от честотата f_C може нагледно да бъде обяснено чрез разлюляване на една люлка. Това се постига, когато люлеещият се кляка и се изправя с два пъти по-голяма честота от честотата на собствените механични колебания на люлката. Така двукратно за един период се изменя положението на центъра на тежестта на системата човек-люлка и следователно двукратно за същия период от време се изменя дължината на еквивалентното махало. Ако притокът на енергия се осъществява в точно определени моменти от периода, то люлката се разлюлява.

Подобни колебания могат да възникнат и в електрическите вериги. За целта е необходимо индуктивните или капацитивните им параметри да се изменят периодично. Това може да се осъществи по механичен начин, например, чрез периодична промяна на елементите или размерите не магнитопровода на дадена бобина или чрез въртене на подвижните електроди на променлив кондензатор. Такива устройства се наричат параметрични генератори, а съответните колебания – параметрични. На практика се предпочита изменението на патаметрите да се постига не по механичен, а по електрически или електромагнитен начин.



Фиг. 6.9.5

За илюстация на параметричното възбуждане на колебания се разглежда последователна RLC верига (фиг.6.9.5), като бобината е с променлива индуктивност L, която се изменя по закона:

$$L = L_0[1 + m_L \sin(2\omega_L t + \psi_L)\,. \qquad (6.9.20)$$

За тока i във веригата се приема, че е от вида:

$$i = \mathrm{I_m}\sin(\omega t + \psi_i)\,. \qquad (6.9.21)$$

По втория закон на Кирхоф за веригата се записва следното уравнение:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}(\mathrm{L}i) + \mathrm{R}i + \frac{1}{\mathrm{c}}\int i\mathrm{dt} = 0\,. \qquad (6.9.22)$$

За да се поддържа процеса, е необходимо разсеяната активна мощност, определяна като средна стойност на моментната мощност $p_R = R.i^2$ за един период на свободните колебания $T = 2\pi/\omega$, да бъде компенсирана от средната стойност на доставяната мощност поради изменението на индуктивността на бобината. Моментната мощност p_L, свързана с това изменение, се определя по следния начин:

$$\mathrm{p_L} = \frac{\mathrm{d_L W_M}}{\mathrm{dt}} = \frac{\mathrm{d_L}}{\mathrm{dt}}(\frac{1}{2}\mathrm{L}i^2) = \frac{1}{2}i^2\frac{\mathrm{dL}}{\mathrm{dt}}\,. \qquad (6.9.23)$$

Средната стойност на тази мощност P_L се намира по формулата:

$$\mathrm{P_L} = \frac{1}{\mathrm{T}}\int_0^{\mathrm{T}}\frac{1}{2}i^2\frac{\mathrm{dL}}{\mathrm{dt}}\mathrm{dt} = \frac{1}{2\mathrm{T}}\int_0^{\mathrm{T}} i^2\mathrm{dL}\,. \qquad (6.9.24)$$

След заместване на индуктивността L съгласно израз (6.9.18) и на тока i съгласно израз (6.9.19), се получава:

$$\mathrm{P_L} = \frac{1}{2\mathrm{T}}\int_0^{\mathrm{T}}\frac{\mathrm{I_m^2}}{2}[1-\cos(2\omega t + \psi_i)].[2\mathrm{L}_0\mathrm{m_L}\omega_{\mathrm{L}}\cos(2\omega_{\mathrm{L}} + \psi_{\mathrm{L}})]\mathrm{dt}\,. \qquad (6.9.25)$$

Анализът на последния израз показва, че ако честотите ω и ω_L са различни, т.е.: $\omega \neq \omega_L$, то величината $P_L = 0$. Това означава, че случайно възникналите колебания с честота $\omega \neq \omega_L$ ще затихват бързо. Ще се поддържат колебания само с честота $\omega = \omega_L$, тъй като само в този случай е изпълнено условието $P_L \neq 0$. На практика параметричните колебания възникват и имат устойчив характер в известна, макар и ограничена честотна област.

Ако изменението на параметрите на веригата се постига благодарение на външен източник с честота, кратна на собствената честота на веригата, колебанията се наричат субхармонични и се говори за деление на честотата. В някои случаи субхармоничните колебания могат да бъдат много интензивни и да представляват опасност за електрическите съоръжения. Тогава се цели да се създадат такива работни условия, които да възпрепятстват развитието на установен режим на деление на честотата. В други случаи субхармоничните колебания са полезните сигнали и съответният делител на честота се проектира така, че да се осигури максималното им възможно развитие.

Процесът на деление на честота възниква при спазване на редица условия, по-съществените от които са следните:

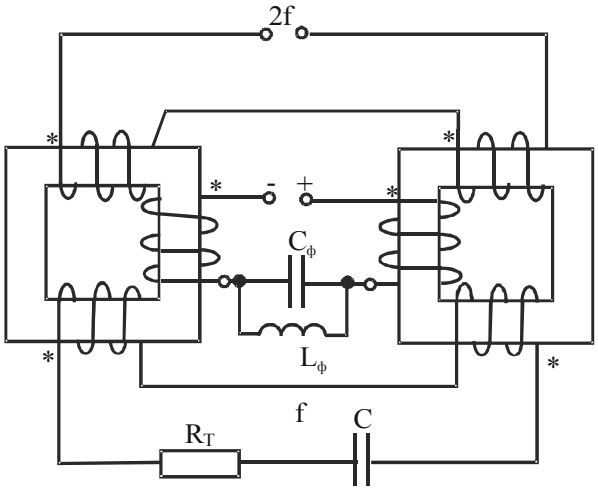
1. Енергийните загуби не тряба да превишават определена стойност. Ето защо най-простият начин за премахването на субхармоничните колебания е чрез увеличаване на съпротивлението на веригата. За целта се свързват последователно допълнителни резистори или се увеличава съпротивлението на товара.

2. При зададени характеристика на нелинейния елемент и честота на външния източник, параметрите на линейните елементи на веригата могат да бъдат изменяни в сравнително тесни граници. Същото важи и за амплитудата на външния сигнал.

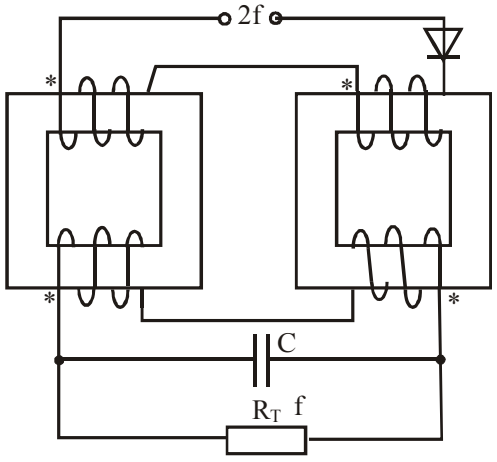
3. Субхармоничните колебания възникват във вериги, които съдържат обикновено нелинейни бобини или кондензатори. В случай, че нелинейният елемент е

резистор, то харктеристиката му трява да има участък с отрицателно динамично съпротивление.

Под област на съществуване на субхармоничните колебания се разбира областта, в която може да се изменя дадена величина, например, амплитуда или честота на сигнала, параметър на веригата.



Фиг. 6.9.6



Фиг. 6.9.7.

Субхармоничните колебания от тип 1/2 се възбуждат “меко”.Това означава, че ако са осъществени условията на деление на честотата, то режимът на двукратно деление ще възникне независимо от началните условия на съответния преходен процес. При субхармоничните колебания тип 1/3 възбуждането е “твърдо”, т.е. появата на режим на трикратно деление е свързана с началните условия на преходния процес, като при определени начални условия е възможно деление, а при други – деление липсва (честотата на периодичния режим съвпада с честотата на външния сигнал).

На фиг.6.9.6 е показана схемата на делител за двукратно деление на честотата от трансформаторен тип. С филтровата група $C_ф L_ф$ във веригата на постояннотоковия източник се цели да се премахне вредното влияние на променливия сигнал. В този делител товарът е включен последователно във веригата, в която възникват субхармонични колебания с честота f. Честотата на източника в първичната страна е 2f.

Възможни са схеми на делители на честота от тип 1/2, при които във входната верига има изправител, а товарът се включва паралелно (фиг.6.9.7). Ако напрежението на субхармоничните колебания не е подходящо за нормалната работа на товара, могат да се поставят допълнителни намотки с подходящо избран брой навивки, свързани последователно или насрещно (аналогично на вторичните намотки на делителя от предната схема (фиг.6.9.6)).

6.10. Метод с отрезово-линейна апроксимация

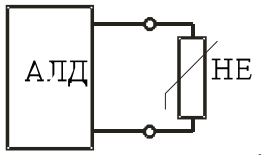
1. Същност на метода

При редица нелинейни елементи характеристиките им могат да бъдат апроксимирани достатъчно точно с два или повече праволинейни отреза. Като примери могат да се посочат изправителните елементи, елементите с характеристики от релеен тип, магнитните елементи с феромагнитна сърцевина с малки хистерезисни загуби и с правоъгълна форма на хистерезисния цикъл.

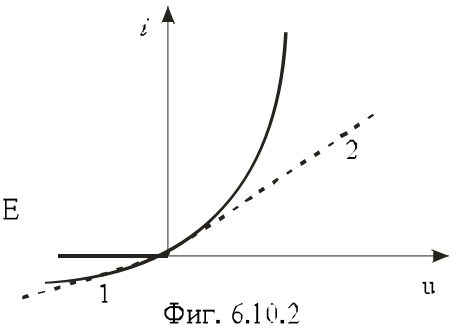
За изследване на периодичните режими в електрически вериги с такива нелинейни елементи може да бъде използуван методът с отрезово-линейната апроксимация (нарича се още метод на напасването).

За изясняване същността на метода с отрезово-линейна апроксимация се разглежда верига, в която само един елемент е нелинеен и е с еднозначна характеристика $i = i(u)$. Всички останали елементи, включително и източниците, са линейни. Те се представят с активен линеен двуполюсник (фиг.6.10.1).

Отначало се апроксимира характеристиката на нелинейния елемент. При изправителните елементи се използуват два отреза. Единият отрез е за участъка на характеристиката за посоката на пропускане на тока, а другият - за посоката на непропускане. Обикновено тези отрези съвпадат с тангента или секуща за разглеждания участък на характеристиката.



Фиг. 6.10.1



Фиг. 6.10.2

За всеки отрез процесът във веригата се описва от съответна система линейни диференциални уравнения с постоянни коефициенти. Решенията на тази система уравнения зависят от началните условия. При определянето на началните условия за конкретна постановка се отчита, че напреженията върху кондензаторите и токовете през бобините са непрекъснати функции на времето. С $t_к$ се означава моментът на преминаване на работната точка от к-тия праволинеен участък на характеристиката на нелинейния елемент в к+1-вия. За началните условия на развитие на процеса в к+1-вия подинтервал се записва:

$$\begin{cases} u_{Cк+1}(0_+) = u_{Cк}(t_к); \\ i_{Lк+1}(0_+) = i_{Lк}(t_к), \end{cases} \qquad (6.10.1)$$

където к = 1 … N - 1 (N е броят на подинтервалите).

За да бъде процесът периодичен е необходимо при к = N формално да се положи: N + 1 ≡ 1. В такъв случай периодът T ще бъде равен на сумата от величините $t_к$:

$$T = \sum_{к=1}^{N} t_к . \qquad (6.10.2)$$

Моментите на превключване $t_к$, когато се преминава от един праволинеен участък в друг, са решения на система трансцедентни уравнения, в които участвуват експоненциални функции. Намирането на решението на тази система е една от най-съществените трудности при прилагане на метода с отрезово-линейна апроксимация.

Другата трудност се състои в това, че предварително не е известна последователността на преминаване на работните точки по отделните праволинейни участъци на характеристиката. Тази трудност нараства, когато броят на нелинейните елементи е по-голям, а също така ако характеристиките им се заместват с повече отрези.

Изследването се усложнява при условие, че във веригата са възможни не един, а няколко различни периодични режима. В такъв случай по физически или други съображения се приема типът на режима, т.е. последователността, в която се преминава от един участък на характеристиката на нелинейния елемент в друг. Решава се съответната система трансцедентни уравнения и се определат токовете и напреженията в отделните клонове на веригата. Построяват се тези величини и се проверява дали в развитието си те отговарят на приетия режим на работа, т.е. дали са спазени условията:

1. Моментите на включване $t_к$ да са положителни.

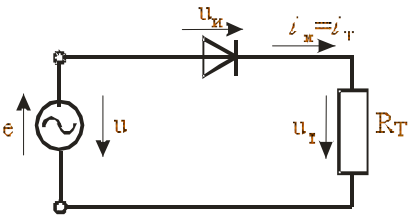
2. Променливите, характеризиращи състоянието на нелинейния елемент в даден интервал, да се изменят в границите на съответния линеен участък на характеристиката.

Предимствата на метода с отрезово-линейна апроксимация са следните:

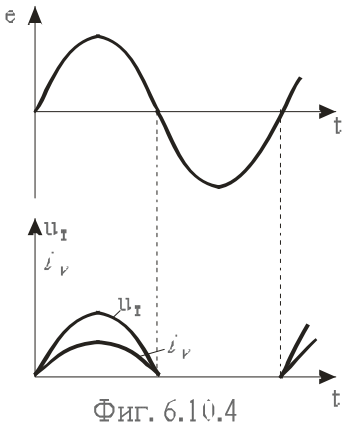
1. При прилагането му няма занчение дали нелинейността на веригата е малка или голяма. Единственото ограничение е да бъде допустимо апроксимирането на характеристиките на нелинейните елементи с праволинейни отрези.

2. Периодичното решение се определя пряко, без да е необходимо да се изследва целият преходен процес до установяването му.

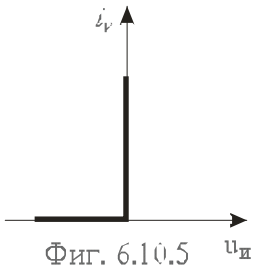
3. Формата на периодичните величини се определя сравнително точно, въпреки че тя може да се отличава съществено от синусоида.



Фиг. 6.10.3



Фиг. 6.10.4



Фиг. 6.10.5

2. Еднофазен еднополупериоден изправител

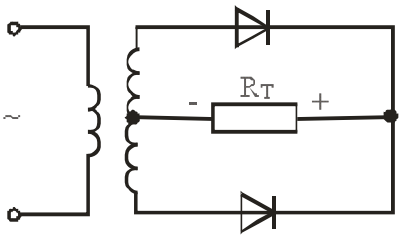
Изправителите съдържат неуправляеми или управляеми нелинейни елементи с несиметрична характеристика. Поради тази несиметричност при синусоидален входен сигнал се получава изходен сигнал с постоянна съставка. На фиг.6.10.3 е показана схемата на еднофазен еднополупериоден изправител. При този изправител се използува само единият полупериод на ЕДН e на еднофазния генератор на входа (фиг.6.10.4).

Отначало се приема, че характеристиката на изправителния елемент е идеална, т.е. съпротивлението на елемента в посока на пропускане е нула, а в обратна посока - безкрайно голямо. Тази характеристика е представена на фиг.6.10.5 с два праволинейни отреза с ограничени размери. Ограничението в права посока е свързано с допустимия ток, превишаването на който води до топлинно разрушаване на елемента, а ограничението в обратна посока – с допустимото обратно напрежение, превишаването на което предизвиква електрически пробив.

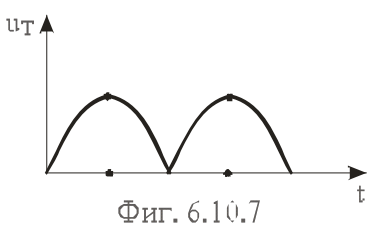
На фиг.6.10.4 са показани кривите на входното ЕДН e, напрежението върху товара $u_т$ и тока през изправителния елемент $i_и$. През изправителния елемент преминава ток, когато напрежението му $u_и$ е положително, т.е.: $u_и = e - u_т > 0$. В случая това се получава за целия интервал (един полупериод).

Постоянната съставка u_0 на напрежението $u_т$ съвпада със средната му стойност за период. За нея се записва:

$$u_0 = \frac{1}{T}\int_0^T u(t)dt = \frac{1}{T}\int_0^{0,5T} u(t)dt = \frac{1}{T}\int_0^{0,5T} E_m \sin \omega t dt = \frac{E_m}{\pi}. \qquad (6.10.3)$$



Фиг. 6.10.6

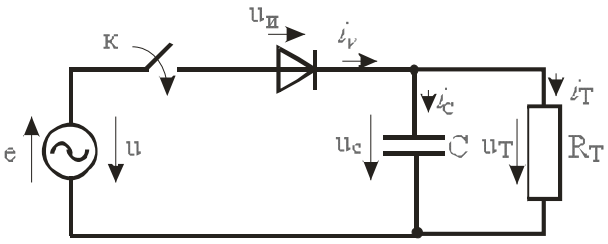


Фиг. 6.10.7

Качествата на изправителя се характеризират чрез пулсациите на изходния сигнал $p_и$. Величината $p_и$ се определя с отношението:

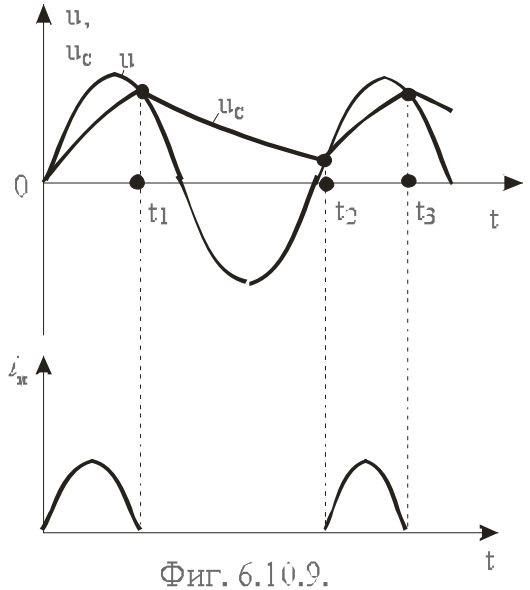
$$p_и = (u_{max} - u_{min})/u_0, \qquad (6.10.4)$$

където u_{max} и u_{min} са съответно максималната и минималната стойност на изходния сигнал. Пулсациите на еднополупериодния изправител от фиг.6.10.3 са големи - $p_и = \pi$.



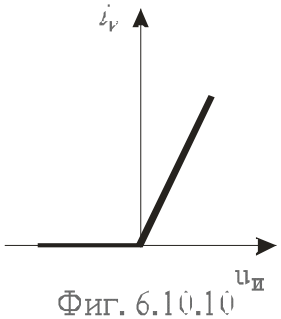
Фиг. 6.10.8

При двуполупериодния изправител (фиг.6.10.6) пулсациите намаляват два пъти поради двойно по-голямата постоянна съставка u_0 (фиг.6.10.7). Пулсациите могат да бъдат съществено намалени чрез паралелно включване към товара на кондензатор със значителен капацитет (фиг.6.10.8).



Фиг. 6.10.9.

За изясняване влиянието на кондензатора върху работата на изправителя се приема, че ключът к се затваря в момента $t = 0$, когато напрежението $u = U_m \sin\omega t$ започва да нараства. Приема се също, че кондензаторът не е бил предварително зареден, т.е.: $u_c(0-) = u_c(0+) = 0$. В такъв случай напрежението върху изправителния елемент $u_И$ също ще нараства при преминаване на тока $i_и$, който в началния момент е ограничен от съпротивлението на елемента и от вътрешното съпротивление на източника. В резултат на това кондензаторът започва да се зарежда. В момента t_1 напрежението върху кондензатора $u_c = u_т$ се изравнява с входното напрежение $u(t)$, при което напрежението върху изправителния елемент $u_и$ става равно на нула, т.е.: $u_и = u - u_т = 0$ и токът $i_и$ се прекъсва. Тогава кондензаторът C започва да се разрежда през товара $R_т$, което продължава през останалата част на положителния полупериод на напрежението $u(t)$ и през целия му отрицателен полипериод до момента t_2, когато напрежението на кондензатора отново се изравни с положителното напрежение $u(t)$. Кривите на отделните величини са дадени на фиг.6.10.9. Въз основа на връзката $u_c = R_т\, i_т$ може да се заключи, че токът през товара $i_т$ се изменя във времето аналогично на напрежението u_c.



Фиг. 6.10.10

За изследване процесите в изправителя от фиг.6.10.8 ще бъде приложен методът с отрезово-линейна апроксимация. За целта характеристиката на изправителния елемент се апроксимира с два отреза, като за съпротивлението в посоката на пропускане се приема, че има стойност $R_и$, а в обратна посока, че то е безкрайно голямо (фиг.6.10.10).

Периодичният процес се описва от две различни системи уравнения: едната система за състоянието на пропускане на изправителния елемент, а другата – за състоянието на непропускане.

Състояние на пропускане

За това състояние се записва следната система уравнения:

$$\begin{cases} R_{и} i_{и} + u_C = U_m \sin(\omega t + \psi_1); \\ C\dfrac{du_C}{dt} + \dfrac{u_C}{R_т} - i_{и} = 0. \end{cases} \qquad (6.10.5)$$

От второто уравнение на тази система се определя токът $i_{и}$ и се замества в първото й уравнение и се получава:

$$R_{и} C\frac{du_C}{dt} + \left(1 + \frac{R_{и}}{R_т}\right) u_C = U_m \sin(\omega t + \psi_1). \qquad (6.10.6)$$

Уравнение (6.10.6) може да бъде записано във вида:

$$R_e C\frac{du_C}{dt} + u_C = \frac{R_т}{R_т + R_{и}} U_m \sin(\omega t + \psi_1), \qquad (6.10.7)$$

където $R_e = \dfrac{R_{и} R_т}{R_{и} + R_т}$.

Това диференциално уравнение е в сила за интервала: $0 < t \le t_1$. То трябва да се реши при начално условие $u_C(0+) = u_C(t_2 -) = u_{C0}$.

Тук с t_2 е означен краят на разряда на кондензатора във втория подинтервал, когато изправителният елемент е в състояние на непропускане.

Посоченото начално условие осигурява периодичността на процеса. Фазата ψ_1 не е произволна. Тя се определя от изискването състоянието на пропускане да се започне $(t = 0+)$ тогава, когато входното напрежение $u(t) = u(0)$ се изравни с напрежението на кондензатора $u_C(0)$, а напрежението върху изправителния елемент след преминаване през нулата започне да се увеличава. В резултат на това се записва :

$$R_{и} i_{и}(0) = 0;\ u(0) = U_{mC} \sin\psi_1 = u_C(t_2 -) = u_C(0) = u_{C0}, \qquad (6.10.8)$$

откъдето за фазата ψ_1 се записва:

$$\psi_1 = \arcsin\frac{u_{C0}}{U_m}. \qquad (6.10.9)$$

Решението на диференциалното уравнение (6.10.7) е от вида:

$$u_C(t) = U_{mC} \sin(\omega t + \psi_C) + Ae^{-\frac{t}{\tau}}. \qquad (6.10.10)$$

Тук са въведени следните означения:

$$U_{mC} = \frac{1}{\omega C z}\frac{R_т U_m}{R_т + R_{и}};\ z = \sqrt{R_e + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2};\ \varphi_C = \psi_1 + \operatorname{arctg}\frac{1}{\omega C R_e} - \frac{\pi}{2};\ \tau = R_e C.$$

За интеграционната константа A се намира: $A = -U_{mC} \sin\psi_C + u_{C0}$ и след заместване се получава:

$$u_C(t) = U_{mC} \sin(\omega t + \psi_C) + (u_{C0} - U_{mC} \sin\psi_C)e^{-\frac{t}{\tau}}. \qquad (6.10.11)$$

Този израз за напрежението на кондензатора u_C се отнася за първия подинтервал, когато изправителният елемент е в състояние на пропускане.

Краят на подинтервала t_1 съвпада с момента на превключване и се определя от условието токът в изправителния елемент $i_и$ да се анулира.Тогава работната точка върху характеристиката преминава от наклонения и към хоризонталния й участък. Това анулиране се постига при спазване на изискването $u_C(t_1) = u(t_1)$.

В този момент и напрежението върху измервателния елемент $u_и(t) = u(t) - u_C(t)$ се анулира, т.е.: $u_и(t_1) = 0$. След това $(t > t_1)$, то става отрицателно, т.е.: $u_и(t) < 0$ и изправителният елемент преминава в състояние на непропускане. От поставеното изискване се получава:

$$U_{mC}\sin(\omega t_1 + \psi_C) + (-U_{mC}\sin\psi_C + u_{C0})e^{-\frac{t}{\tau}} = U_m\sin(\omega t + \psi_1). \qquad (6.10.12)$$

Състояние на непропускане

За това състояние връзката между източника и товара е прекъсната тъй като е прието, че съпротивлението на изправителния елемент е безкрайно голямо. Извършва се разряд на заредения кондензатор. Процесът се описва с уравнението:

$$R_т C\frac{du_C}{dt} + u_C = 0. \qquad (6.10.13)$$

При начално условие $u_C(0+) = u_C(t_1)$ решението му е от вида:

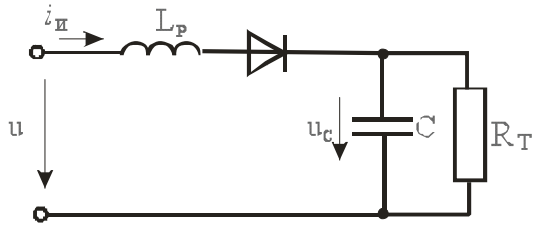
$$u_c(t) = u_c(t_1)e^{-\frac{t}{\tau}}. \qquad (6.10.14)$$

Разрядът се прекратява в момента t_2, когато напрежението на кондензатора u_C спадне до стойността u_{C0}, т.е.: $u_C(t_2) = u_{C0}$. В този момент напрежението върху изправителния елемент $u_и$ променя знака си, работната точка преминава от хоризонталния към наклонения участък на характеристиката и започва отново състояние на пропускане.

Поради периодичността на процеса може да се положи: $t_1 + t_2 = T$ или $t_2 = T - t_1$ (T е периодът на напрежението u на източника). Оттук за величната u_{C0} се получава:

$$u_{C0} = u_C(t_1)e^{-\frac{T-t_1}{R_т C}}. \qquad (6.10.15)$$

При заместване на този израз за величината u_{C0}, както и на съответната зависимост за началната фаза ψ_1, в израза (6.10.12) се достига до трансцедентното уравнение по отношение на момента на превключване t_1. Това уравнение може да се реши по графичен или числов начин.



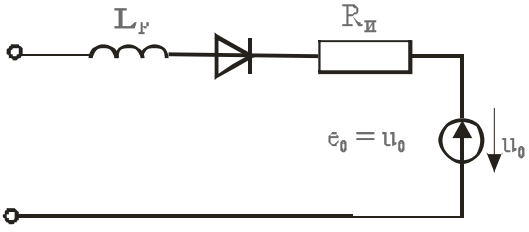
Фиг. 6.10.11

Обикновено изправителните устройства се състоят от три звена: трансформатор, група изправителни елементи и филтър.

Трансформаторът се въвежда, тъй като обикновено амплитудата на входното синусоидално напрежение не отговаря на необходимото постоянно напрежение.

При отчитане на индуктивността на разсейвана на трансформатора $L_р$ се достига до еквивалентна схема на изправителното устройство от фиг.6.10.11. За състоянието на пропускане процесът във веригата се описва със системата уравнения:

$$\begin{cases} L_р\dfrac{di_и}{dt} + R_и i_и + u_C = U_m\sin(\omega t + \psi); \\ C\dfrac{du_C}{dt} + \dfrac{u_C}{R_т} - i_и = 0. \end{cases} \qquad (6.10.16)$$



Фиг. 6.10.12

Характеристичното уравнение на горната система е от втора степен и има два корена, което усложнява анализа. Тъй като при подходящо избран капацитет на кондензатора C пулсациите $p_и$ са малки, то може да бъде използуван приблизителен начин за анализ. Приема се, че напрежението на кондензатора u_C е неизменно, т.е. $u_C = u_0$. Това дава възможност за въвеждане на нова еквивалентна схема (фиг.6.10.12). На тази схема с $R_и$ е означено съпротивлението на изправителния елемент при пропускане, а $e_0 = u_0$ е постоянното напрежение на товара.

За интервала на пропускане по втория закон на Кирхоф се записва уравнението:

$$L_р \frac{di_и}{dt} + R_и i_и = U_m \sin(\omega t + \psi) - u_0 . \qquad (6.10.17)$$

Решението му е от вида :

$$i(t) = \frac{U_m}{z}\sin(\omega t + \psi - \varphi) - \frac{u_0}{R_и} + Ae^{-\frac{t}{\tau}}, \qquad (6.10.18)$$

където $\tau = L_р/R_и$; $z = \sqrt{R_и^2 + \omega^2 L_р^2}$; $\varphi = \text{arctg}\frac{\omega L_р}{R_и}$.

Въз основа на началното условие $i(0+) = 0$ за интеграционната константа A се получава:

$$A = \frac{u_0}{R_и} - \frac{U_m}{z}\sin(\psi - \varphi), \qquad (6.10.19)$$

откъдето след заместването ѝ в израз (6.10.18) за тока i се записва:

$$i(t) = \frac{U_m}{z}\sin(\omega t + \psi - \varphi) - \frac{u_0}{R_и} + \left[\frac{u_0}{R_и} - \frac{U_m}{z}\sin(\psi - \varphi)\right]e^{-\frac{t}{\tau}}. \qquad (6.10.20)$$

За да се използува този израз за тока е необходимо да се знае началната фаза ψ на входното синусоидално напрежение при периодичен режим на работа на изправителя. Тази фаза може да се определи въз основа на предположението, че изправителният елемент започва да пропуска в момента $t = 0+$, когато дясната част на диференциалното уравнение (6.10.18) се анулира, т.е.: $U_m\sin\varphi - u_0 = 0$.

Оттук се получава:

$$\psi = \arcsin\frac{u_0}{U_m}. \qquad (6.10.21)$$

От физична гледна точка горният резултат за началната фаза ψ означава, че в началния момент $(t = 0+)$ липсва индуктивно напрежение:

$$u_L(0+) = \left(L\frac{di}{dt}\right)_{t=0+} = 0, \qquad (6.10.22)$$

При което се намира:

$Ri(0+) = 0$ или $i(0+) = 0$.

Състоянието на пропускане се прекратява в момента t_1 при анулиране на тока през изправителя, т.е.: $i(t_1) = 0$. Така се достига до следното трансцедентно уравнение за определяне на величината t_1:

$$\frac{U_m}{z}\sin(\omega t + \psi - \varphi) - \frac{u_0}{R_и} + \left[\frac{u_0}{R_и} - \frac{U_m}{z}\sin(\psi - \varphi)\right]e^{-\frac{t}{\tau}} = 0, \qquad (6.10.23)$$

което може да бъде решено по числен или графичен път.

Направените дотук разглеждания се отнасят за изправители с неуправляеми изправителни елементи. При тези устройства средната стойност на тока зависи от типа на изправянето – еднополупериодно и двуполупериодно, еднофазно или многофазно. При управляемите изправителни елементи началото на периодичното състояние на пропускане се избира чрез допълнителен електрод. Така може да се регулира продължителността на процеса на пропускане, а оттам да се управлява средната стойност на изходния сигнал. Анализът на подобни изправителни схеми е облекчен, защото началото на пропускането се задава от управляващото устройство.

6.11. Преходни процеси в нелинейни електрически вериги. Метод на графичното интегриране

Анализът на преходните процеси в нелинейните електрически вериги е свързан със значителни трудности, тъй като процесите в тези вериги се описват от нелинейни диференциални уравнения. Ето защо се използуват графични или приблизителни аналитични методи. По-долу се разглежда методът на графичното интегриране.

При този метод се използува действителната характеристика на нелинейния елемент. Ето защо в това отношение методът е най-точен. Той обаче не дава общи връзки, от които да се съди как се изменя процесът при изменение на някой от параметрите на веригата.

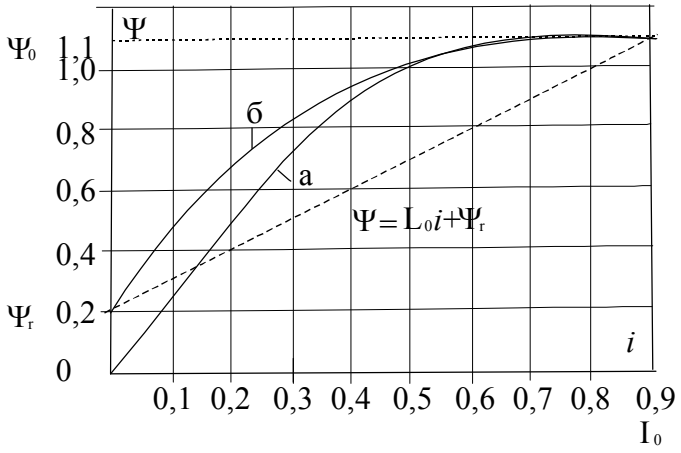
Методът на графичното интегриране ще бъде разгледан при преходните процеси за случаите: даване накъсо на бобина с феромагнитна сърцевина и включване на такава бобина към постоянно напрежение.

1. Късо съединение на бобина с феромагнитна сърцевина

Уравнението, описващо преходния процес, е от вида:

$$\frac{d\Psi}{dt} + Ri = 0, \qquad (6.11.1)$$

където $\Psi = \Psi(i)$ е пълният магнитен поток на бобината, зависещ нелинейно от тока i,



Фиг.6.11.1

R - съпротивлението на намотката.

От уравнение (6.11.1) се получава :

$$dt = -\frac{d\Psi}{Ri}, \qquad (6.11.2)$$

откъдето за интервала от време t, за който се разглежда преходния процес, се записва:

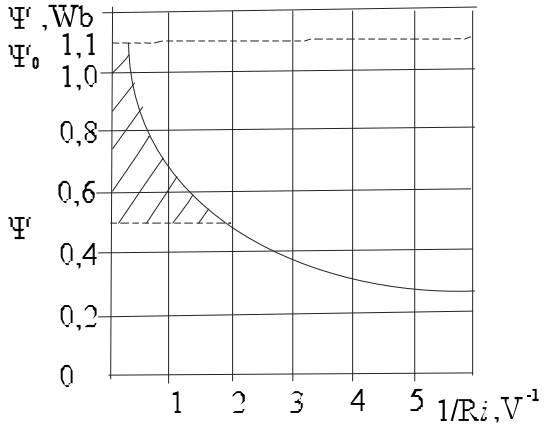
$$t = -\int_{\Psi_0}^{\Psi}\frac{d\Psi}{Ri} = \int_{\Psi}^{\Psi_0}\frac{d\Psi}{Ri}, \qquad (6.11.3)$$

където Ψ_0 е стойността на магнитния поток в началния момент $t = 0$.

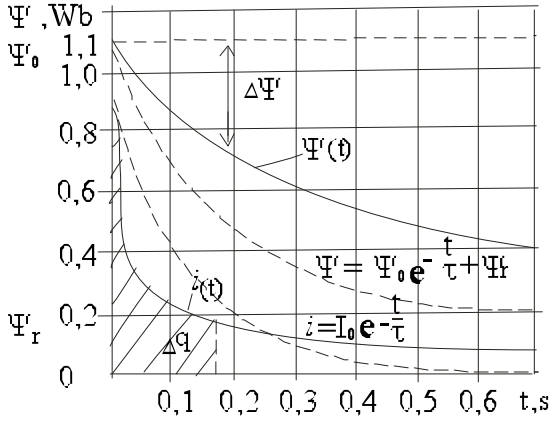
На фиг.6.11.1 са показани кривите на намагнитване на конкретна бобина със затворен магнитопровод от листова трансформаторна стомана. Крива a е началната

крива на намагнитване, а кривата б - при намаляване на магнитния поток от стойността $\Psi_0 = 1{,}1$ Wb, съответстваща на началната стойност на тока $I_0 = 0{,}9$ A, до остатъчната стойност $\Psi_r = 0{,}2$ Wb. Съпротивлението на намотката на разглежданата бобина е $R = 8{,}5\ \Omega$.

Като се използува крива б от фиг.6.11.1 се строи зависимостта $1/Ri = \varphi(\Psi)$. Съответната крива е представена на фиг.6.11.2. Въз основа на кривата $1/Ri = \varphi(\Psi)$ може да бъде намерена зависимостта $\Psi = \Psi(t)$. И действително, съгласно израз (6.11.3), интервалът от време t, за който потокът изменя от началната си стойност Ψ_0 до стойност Ψ, се определя от защрихованата на фиг.6.11.2 площ.



Фиг.6.11.2



Фиг.6.11.3

На фиг.6.11.3 е показана получената крива $\Psi = \Psi(t)$, а също и кривата $i = i(t)$. При построяването на последната крива стойностите на тока i са определяни по крива б (фиг.6.11.1) за съответните стойности на потока Ψ. За сравнение на фиг.6.11.3 са показани кривите на потока Ψ и тока i, които се получават, ако се приеме, че индуктивността на бобината е постоянна и равна на $L_0 = (\Psi_0 - \Psi_r)/I_0 = 1$ H, която съответствува на намаляване на потока от началната му стойност ψ_0 до остатъчната му стойност Ψ_r по линеен закон: $\Psi_0 - \Psi_r = L_0.i$. Правата $\Psi_0 - \Psi_r = L_0.i$ е показана с пунктирана линия на фиг.6.11.1.

На фиг.6.11.3 с пунктирни линии са показани кривите на тока $i = I_0.e^{-\frac{t}{\tau_0}}$ и на потока $\Psi = (\Psi_0 - \Psi_r).e^{-\frac{t}{\tau_0}} + \Psi_r$, където $\tau_0 = L_0/R = 0{,}118$s. На фигурата е въведено означението $\Psi_0 - \Psi_r = \psi_0$.

Поради нелинейната зависимост на потока Ψ от тока i , т.е.: $\Psi = \Psi(i)$ (крива б на фиг.6.11.1), токът i в началото на преходния процес намалява по-бързо, а потокът Ψ по-бавно в сравнение със случая на линейна зависимост между тях. Това може да се поясни от уравнението на процеса, записано във вида:

$$L_д di/dt + Ri = 0, \qquad (6.11.4)$$

където $L_д = di/dt = \varphi(i)$ е динамичната индуктивност.

Тъй като в началния момент $L_д < L_0$ (фиг.6.11.1), то токът i съгласно уравнение (10.11.4) в началото на преходния процес намалява по-бързо, отколкото при постоянна индуктивност $L = L_0 = \text{const}$. Обстоятелството, че в същите моменти от време t токът i е по-малък води до получаване на по-малко ЕДН на самоиндукция: $e = - d\Psi/dt = Ri$, а това означава , че потокът Ψ намалява по-бавно, отколкото при постоянна индуктивност $L = L_0 = \text{const}$.

От уравнение (6.11.1) може да се запише:

$$\Delta\Psi = -Ri\mathrm{d}t = -R\mathrm{d}q\,,\ \text{т.е.}:\Delta\Psi = -R\Delta q\,, \qquad (6.11.5)$$

където $\Delta\Psi$ е намалението на магнитния поток;

Δq - електрическият заряд, пренасян през веригата за интервала от време $0 \ldots t$.

Стойността на заряда Δq се определя от защрихованата площ на фиг.6.11.3. Тя е по-малка в сравнение със случая при постоянна индуктивност $L = L_0 = \text{const}$. Съответно по-малко се получава намалението на потока $\Delta\Psi_\infty$.

Тъй като стойността на заряда $q = \int_0^\infty i\mathrm{d}t = \frac{\Psi_0 - \Psi_r}{R}$ и в двата случая трябва да бъде една и съща, то кривата $i = i(t)$ се пресича в някакъв момент от време с експонентата $i = I_0 e^{-\frac{t}{\tau_0}}$. Забавянето на намалението на тока при по-големите стойности на времето t е свързано с по-голямата динамична индуктивност $L_д$ в стръмната част на кривата на размагнитването (крива б от фиг.6.11.1).

2. Включване на бобина с феромагнитна сърцевина към източник на постоянно напрежение

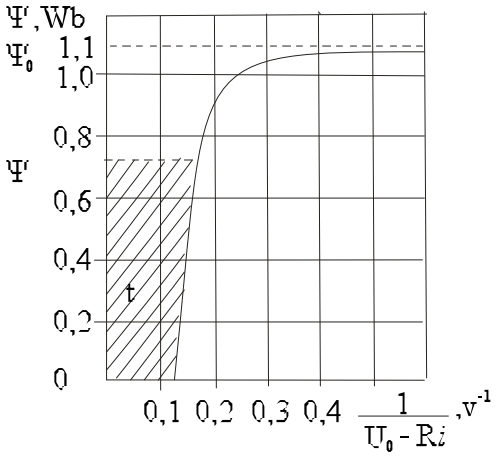
Като пример се разглежда същата бобина с феромагнитна сърцевина, както при преходния процес даване накъсо. Приема се, че преди включването на източника на постоянно напрежение U_0 сърцевината на бобината е била размагнитена. В такъв случай връзката между магнитния поток Ψ и тока i се дава с началната крива на намагнитване (крива а на фиг.6.11.1). Преходният процес се описва от диференциалното уравнение:

$$\frac{\mathrm{d}\Psi}{\mathrm{d}t} + Ri = U_0\,. \qquad (6.11.6)$$

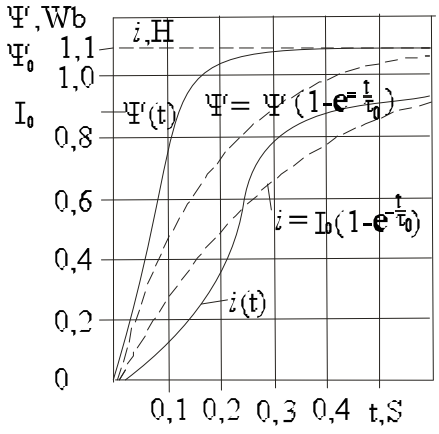
Оттук за интервала от време t, за който се разглежда преходният процес, се получава:

$$t = \int_0^t \mathrm{d}t = \int_0^\Psi \frac{\mathrm{d}\Psi}{U_0 - Ri}\,. \qquad (6.11.7)$$

Като се използува зависимостта $\Psi = \Psi(i)$ (крива а от фиг.6.11.1), се строи кривата $\Psi = \varphi[1/(U_0 - Ri)]$. Тя е показана на фиг.6.11.4. Защрихованата площ от тази фигура дава в съответния мащаб интервала от време t, за който потокът нараства от 0 до Ψ, т.е. позволява да се намери зависимостта $\Psi = \Psi(t)$.



Фиг.6.11.4



Фиг.6.11.5

Напрежението U_0 е избрано, така че установеният ток I_0, както и при предния преходен процес, да бъде равен на 0,9 А, т.е. е прието, че $U_0 = I_0.R = 7{,}65$ V.

На фиг.6.11.5 е показана получената крива $\Psi = \varphi(t)$, а също и кривата $i = i(t)$. За построяване на последната крива стойностите на тока i за всеки момент от време се отчитат от кривата $\Psi = \varphi(i)$, (крива а на фиг.6.11.1) за съответните на тези моменти от време стойности на потока Ψ. На фиг.6.11.5 с пунктирни линии са показани кривите на потока $\Psi = \Psi_0(1 - e^{-\frac{t}{\tau_0}})$ и на тока $i = I_0(1 - e^{-\frac{t}{\tau_0}})$, които се получават при линейна зависимост между потока Ψ и тока i, т.е.: $\Psi = L'_0 i$, където $L'_0 = \Psi_0 / I_0 = 1{,}22$ H, а $\tau'_0 = L'_0/R = 0{,}144$ s.

Ходът на кривата $i = i(t)$ може да бъде пояснен, ако се изходи от уравнението на процеса, записано във вида:

$$L_д \frac{di}{dt} + Ri = U_0 . \qquad (6.11.8)$$

В началото на преходния процес динамичната индуктивност $L_д > L'_0$ и токът i нараства по-бавно, в сравнение със случая на постоянна индуктивност $L = L'_0 = \text{const}$. При големите стойности на тока динамичната индуктивност $L_д < L'_0$ и токът i нараства по-бързо, отколкото при $L = L'_0 = \text{const}$. Кривите на тока $i = i(t)$ и $i = I_0(1 - e^{-\frac{t}{\tau'_0}})$ в някакъв момент от време трябва да се пресекат. И действително, независимо от закона на изменение на тока във времето, се записва:

$$d\Psi = (U_0 - Ri)dt . \qquad (6.11.9)$$

Като се изходи от равенството: $U_0 = I_0.R$ се получава:

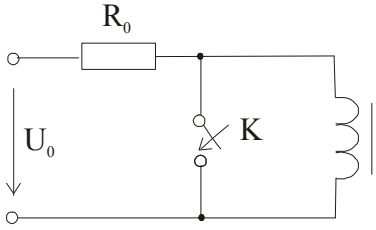
$$\int_0^{\infty} (I_0 - i)dt = \frac{1}{R}\int_0^{\Psi_0} d\Psi = \frac{\Psi_0}{R}, \qquad (6.11.10)$$

т.е. площта на фиг.6.11.5, ограничена от кривата $i = i(\Psi)$ или $i = I_0(1 - e^{-\frac{t}{\tau'_0}})$, ординатната ос и хоризонталната линия I_0, не зависи от закона на изменение на тока във времето.

Магнитният поток Ψ нараства значително по-бързо, отколкото при постоянна индуктивност $L = L'_0 = \text{const}$ и практически към момента от време $t \approx 0{,}25$ s добива установената си стойност Ψ_0.

6.12. Метод на аналитичната апроксимация

При този метод действителните характеристики на нелинейните елементи се заместват в системата диференциални уравнения на веригата с приблизителни аналитични изрази. Точността на метода се определя от избора на приблизителните аналитични изрази на характеристиките. В случай, че не може да се подбере прост аналитичен израз за цялата характеристика на нелинейния елемент, то тя се разбива на участъци, за всеки от които се търси прост аналитичен израз.



фиг.6.12.1

Методът на аналитичната апроксимация ще бъде разгледан при преходния процес за случая даване накъсо на бобината с феромагнитна сърцевина (фиг.6.12.1). За целта кривата на намагнитване (крива б на фиг.6.11.1) се представя със следния приблизителен израз:

$$i = a'(\Psi - \Psi_r) + b'(\Psi - \Psi_r)^{n+1}, \qquad (6.12.1)$$

където Ψ_r е остатъчният магнитен поток (вж. фиг.6.11.1), а a', b' и n са параметри на апроксимиращия израз.

За краткост на записа се въвеждат означенията:

$$\Psi - \Psi_r = \psi;\ \Psi_0 - \Psi_r = \psi_0 \text{ и } \frac{\Psi - \Psi_r}{\Psi_0 - \Psi_r} = \frac{\psi}{\psi_0} = x. \quad (6.12.2)$$

В такъв случай израз (6.12.1) добива вида:

$$i = ax + bx^{n+1}, \quad (6.12.3)$$

където $a = a'\psi_0$ и $b = b'\psi_0^{n+1}$ като $\dim a = A$ и $\dim b = A$.

Прави се полагането $x = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}y$ в уравнение (6.12.3) и се получава:

$$i = a.\sqrt[n]{\frac{a}{b}}y + a.\sqrt[n]{\frac{a}{b}}y^{n+1} = Ay(1 + y^n), \quad (6.12.4)$$

където $A = a.\sqrt[n]{\frac{a}{b}}$.

Записва се диференциалното уравнение на разглеждания преходен процес:

$$\frac{d\Psi}{dt} + Ri = 0. \quad (6.12.5)$$

Като се има предвид израз (6.12.4), уравнение (6.12.5) добива вида:

$$\frac{d\Psi}{dt} + RAy(1 + y^n) = 0. \quad (6.12.6)$$

Тъй като $\psi = x\psi_0 = \psi_0\sqrt[n]{\frac{a}{b}}y = \psi_0\frac{A}{a}y$, то уравнение (6.12.6) може да се запише по следния начин:

$$\frac{dy}{dt} + \frac{aR}{\psi_0}y(1 + y^n) = 0. \quad (6.12.7)$$

От последното уравнение се получава :

$$-\frac{dy}{y(1 + y^n)} = \frac{aR}{\psi_0}dt. \quad (6.12.8)$$

Уравнението (6.12.8) се интегрира:

$$-\int\frac{dy}{y(1 + y^n)} = \frac{1}{n}\ln(1 + y^n) + C. \quad (6.12.9)$$

При изчисление на времето t в диапазона $0 \ldots t$, то потокът Ψ се изменя в диапазона $\Psi_0 \ldots \Psi$. Съответно величината x се изменя от 1 до $x = \psi/\psi_0 = (\Psi - \Psi_r)(\Psi_0 - \Psi_r)$, а величината y от $\sqrt[n]{\frac{a}{b}}$ до $\sqrt[n]{\frac{a}{b}}x$.

След интегриране на уравнение (6.12.7) в разгледаните по-горе граници, се получава:

$$\frac{1}{n}\left|\ln(1 + y^{-n})\right|_{\sqrt[n]{\frac{a}{b}}}^{\sqrt[n]{\frac{a}{b}}\frac{\psi}{\psi_0}} = \frac{aRt}{\psi_0}. \quad (6.12.10)$$

Оттук може да се запише:

$$\ln\left[\frac{1 + \frac{a}{b}\left(\frac{\psi}{\psi_0}\right)^{-n}}{1 + \frac{a}{b}}\right] = n\frac{aRt}{\psi_0}. \quad (6.12.11)$$

Окончателно се получава:

$$\psi = \frac{\psi_0}{\sqrt[n]{\left(1+\frac{a}{b}\right)e^{\frac{naR}{\psi_0}t} - \frac{b}{a}}}. \qquad (6.12.12)$$

Предимството на метода на аналитичната апроксимация е, че позволява да се разгледа влиянието на параметрите на веригата върху преходния процес. И действително, полученият израз (6.12.12) за потока $\psi = \Psi - \Psi_r$ дава възможност да се установи влиянието на параметрите: b, a, n, R, Ψ_0 и Ψ_r върху кривата $\Psi = \Psi(t)$.

Методът на аналитичната апроксимация може да бъде приложен и за преходния процес - включване на бобина с феромагнитна сърцевина към постоянно напрежение U_0. За целта е необходимо да се избере подходящ аналитичен израз за кривата на намагнитване (крива a от фиг.6.11.1). Тук намирането на решението се усложнява от наличието на постоянен член $(U_0 \neq 0)$ в диференциалното уравнение на преходния процес. По-долу се дава общ подход на такова решение на нелинейно диференциално уравнение от първи ред, описващо преходния процес във веригата при включването й към постоянно напрежение.

Съгласно този подход нелинейната зависимост (за случая $i = i(t)$) се представя чрез ред:

$$i = a_0 + a_1\Psi + a_2\Psi^2 + ... + a_n\Psi^n = \sum_{\kappa=0}^{n} a_\kappa \Psi^\kappa. \qquad (6.12.13)$$

За частния случай на кривата на намагнитване a от фиг.6.11.1 коефициентът $a_0 = 0$. За преходния процес включване на бобина с феромагнитна сърцевина към постоянно напрежение U_0 се записва:

$$U_0 - Ri = U_0 - R\sum_{\kappa=0}^{n} a_\kappa \Psi^\kappa = G(\Psi). \qquad (6.12.14)$$

Уравнението на преходния процес $\frac{d\Psi}{dt} + Ri = U_0$ може да бъде представено по следния начин:

$$\frac{d\Psi}{G(\Psi)} = dt \text{ или } \int_{\Psi_0}^{\Psi} \frac{d\Psi}{G(\Psi)} = t - t_0, \qquad (6.12.15)$$

където Ψ_0 е стойността на потока за момента от време $t = t_0$.

Ако полиномът $G(\Psi)$ няма кратни корени, то ако се разложи $1/G(\Psi)$ на прости дроби се записва:

$$\int_{\Psi_0}^{\Psi} \frac{d\Psi}{G(\Psi)} = \sum_{s=1}^{n} \frac{A_s d\Psi}{\Psi - \Psi_s} = \sum_{s=1}^{n} A_s \ln\frac{\Psi - \Psi_s}{\Psi_0 - \Psi_s}, \qquad (6.12.16)$$

където Ψ_s са корените на уравнението $G(\Psi) = 0$, а константите A_s се определят по следния начин:

$$A_s = \frac{1}{G'(\Psi_s)}, \text{ а } G'(\Psi_s) = \left[\frac{dG(\Psi)}{d\Psi}\right]_{\Psi=\Psi_s}. \qquad (6.12.17)$$

Като се задават стойности на потока Ψ могат да се намерят съответните им стойности на времето t.

С увеличаване броя на членовете в израз (6.12.13) характеристиката на нелинейния елемент се представя по-точно, но се усложнява решението. При това основната трудност е свързана с намирането на корените на уравнението $G(\Psi) = 0$, което е от висока степен.

В някои конкретни случаи се оказва по-целесъобразно зависимостта $i = i(\psi)$ да се представи не чрез ред, а с подходяща функция, която позволява сравнително лесно да се реши интегралът $\int_{\Psi_0}^{\Psi} \frac{d\Psi}{G(\Psi)}$.

6.13. Метод на последователните интервали

При този метод интервалът от време t, за който се разглежда преходният процес, се разбива на достатъчно малки и равни помежду си интервали от време Δt. По този начин диференциалите на всички величини в уравненията на преходния процес се заменят с крайни нарастъци на тези величини за интервалите Δt. След определяне на стойността в края на даден интервал на едната от двете величини, свързани с нелинейна зависимост, стойността на втората величина се намира от нелинейната характеристика. Тези стойности на величините се приемат за начални за следващия интервал от време.

Методът на последователните интервали ще бъде приложен за преходния процес включване на бобина с феромагнитна сърцевина към източник на постоянно напрежение U_0.

За целта интервалът от време, за който се разглежда преходния процес, се разбива на достатъчно малки и равни помежду си интервали Δt. За оценяване избора на големината на интервала Δt се пресмята времеконстантата τ'_0, която би характеризирала процеса при постоянна индуктивност $L = L'_0 = \text{const}$. Тази времеконстанта се дава с израза:

$$\tau'_0 = \frac{L'_0}{R} = \frac{\Psi_0}{I_0 R}, \qquad (6.13.1)$$

където Ψ_0 и I_0 са стойностите на потока и тока в края на преходния процес.

За разглежданата конкретна бобина $\tau'_0 = 1{,}1/0{,}9.8{,}5 = 0{,}144$ s. За големината на интервала Δt може да се избере $\Delta t = 0{,}01$ s.

Означава се с к номерът на интервала. Всички величини получават стойностите си в края на к-тия интервал. В такъв случай техните стойности в началото на к-тия интервал са равни на стойностите им в края на предходния интервал и имат индекс к-1.

Диференциалното уравнение на разглеждания преходен процес е:

$$\frac{d\Psi}{dt} = U_0 - Ri. \qquad (6.13.2)$$

То може с приближение да се запише във вида:

$$(\Delta\Psi)_к = \Psi_к - \Psi_{к-1} \approx (U_0 - Ri_{к-1})\Delta t. \qquad (6.13.3)$$

В началото на първия интервал к = 1, т.е. при t = 0 се получава:

$$\Psi_{к-1} = \Psi_0 \text{ и } i_{к-1} = i_0 = 0, \qquad (6.13.4)$$

тъй като бобината се включва към постоянно напрежение при нулеви начални условия.

Следователно за нарастъка на потока за първия интервал се записва:

$$(\Delta\Psi)_1 = \Psi_1 \approx U_0 \Delta t. \qquad (6.13.5)$$

По получената стойност на потока Ψ_1 от кривата на намагнитване (крива а от фиг.6.11.1) се намира стойността на тока i_1.

Нарастъкът на потока за втория интервал е:

$$(\Delta\Psi)_2 = \Psi_2 - \Psi_1 \approx (U_0 - Ri_1)\Delta t. \qquad (6.13.6)$$

Оттук се намира стойността на потока $\Psi_2 = \Psi_1 + (\Delta\Psi_2)$, а по тази стойност от кривата $i = i(\Psi)$ се намира токът i_2 и т.н.

Удобно е резултатите от пресмятанията да се бъдат поместени в таблица. Моментът от време $t_к$ за края на интервала е равен на $к\Delta t$.

Точността на метода на последователните интервали нараства при намаляване големината на интервала Δt. Това обаче, води до нарастване на броя на изчисленията, които се извършват с определена точност. Може да се окаже даже, че грешките ще нарастват.

6.14. Метод на условната линеаризация на уравнението на верига

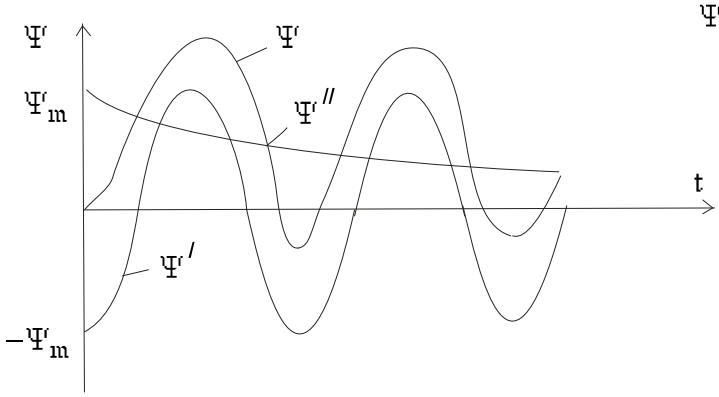
При този метод се приема, че в нелинейното диференциално уравнение, описващо преходния процес в дадена електрическа верига, членът, съдържащ коефициент, зависещ от интензивността на процеса, има второстепенно значение в сравнение с другите членове в уравнението, съдържащи постоянни коефициенти. Това означава, че максималната стойност на този член през време на преходния процес е значително по-малка от максималните стойности на другите членове.

В такъв случай коефициентът на нелинейният член може с приближение да бъде приет за постоянен, със стойност, равна на някаква негова средна стойност. Така уравнението става линейно и може сравнително лесно да бъде решено спрямо търсената величина.

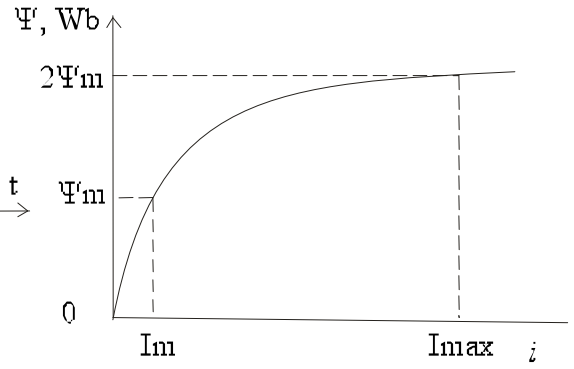
Този метод ще бъде приложен при преходния процес включване на бобина с феромагнитна сърцевина към източник на синусоидално напрежение. Уравнението на процеса е от вида:

$$\frac{d\Psi}{dt} + Ri = U_m \sin(\omega t + \psi_u). \qquad (6.14.1)$$

Приема се, че членът Ri има второстепенно значение спрямо члена $d\Psi/dt$.



Фиг.6.14.1



Фиг.6.14.2

Такова условие се изпълнява, например, при включване на мощни ненатоварени във вторичната си намотка трансформатори, тъй като съпротивлението R на намотките им е обикновено незначително.

Зависимостта $\Psi = Li$ е нелинейна тъй като индуктивността L зависи от тока i. Ако в уравнение (6.14.1) потокът Ψ се изрази чрез тока i, то уравнението по отношение на тока i ще съдържа нелинейност в главния член. Ето защо токът i се изразява чрез потока Ψ и се получава следното уравнение:

$$\frac{d\Psi}{dt} + \frac{R}{L}\Psi = U_m \sin(\omega t + \psi_u). \qquad (6.14.2)$$

В това уравнение нелинейният член е $\frac{R}{L}\Psi$ има второстепенно значение и в него може с приближение да се приеме, че индуктивността е постоянна, т.е.: $L = \text{const}$. Така уравнението става линейно. Решението му е от вида:

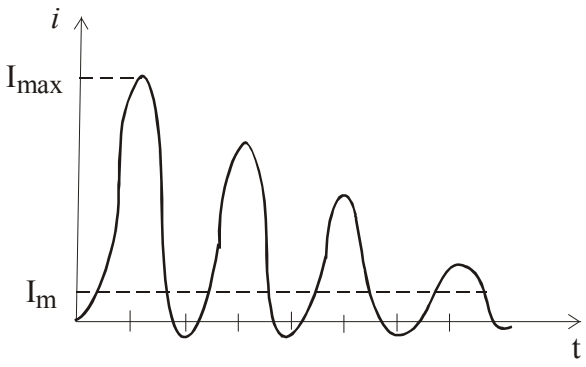
$$\Psi(t) = \Psi_m \sin(\omega t + \psi_u - \varphi) + A.e^{-\frac{R}{L}t}. \qquad (6.14.3)$$

Ако се приеме нулево начално условие, т.е.: $\Psi(0) = 0$, то за интеграционната константа A се получава: $A = \Psi_m \sin(\psi_u - \varphi)$. Преходният процес се проявява най-интензивно при включване на веригата в момент, когато началната фаза ψ_u е равна на $\varphi \pm \pi/2$. При $\psi_u = \varphi - \pi/2$ се получава :

$A = \Psi_m$ и $\Psi(t) = -\Psi_m \cos\omega t + \Psi_m e^{-\frac{R}{L}t}$.

На фиг.6.14.1 са показани кривите на потока $\Psi = \Psi(t))$ и на съставките му $\Psi' = -\Psi_m \cos\omega t$ и $\Psi'' = \Psi_m e^{-\frac{R}{L}t}$. От фигурата може да се установи, че при голяма времеконстанта $\tau = L/R$ спрямо периода $T = 2\pi/\omega$, потокът Ψ след полупериод може да достига почти до удвоената стойност на амплитудата си Ψ_m.

На фиг. 6.14.2 е показана нелинейната зависимост $\Psi = \Psi(i)$. При установен режим амплитудата на тока I_m, съответстваща на амплитудата на потока Ψ_m, има незначителна стойност. При увеличаване на потока до $2\Psi_m$, обаче токът добива много по-голяма стойност I_{max} вследствие нелинейността на характеристиката $\Psi = \Psi(i)$.



Фиг.6.14.3

На фиг.6.14.3 е показана кривата на тока $i = i(t)$ през време на преходния процес. Тя се получава като се използува изразът на потока $\Psi = \Psi(t)$ и зависимостта на потока Ψ от тока i от фиг.6.14.2.

Високата стойност на тока съгласно кривата $i = i(t)$ от фиг.6.14.3 може да се разглежда като токов удар. Такъв токов удар може да предизвика механично разрушаване на намотката, тъй като електродинамичните сили са пропорционални на квадрата на тока. Ето защо мощните ненатоварени трансформатори се включват чрез допълнителни реостати, които след това се дават накъсо.

Както бе разгледано по-горе, членът Ri може да бъде приет за второстепенен при достатъчно големи бобини с феромагнитна сърцевина. При разглеждане, обаче на малки бобини с феромагнитна сърцевина, за които времеконстантата L/R е много по-малка от периода T или пък на верига от последователно съединени бобина с феромагнитна сърцевина и резистор с голямо съпротивление, то това допускане може да се окаже невярно. В този случай може да се получи даже, че членът $d\Psi/dt$ има второстепенно значение. Тогава е по-правилно в този член да се приеме, че индуктивността L е постоянна, т.е.: $L = const$ и да се запише уравнението във вида:

$$L\frac{di}{dt} + Ri = U_m \sin(\omega t + \psi_u). \qquad (6.14.4)$$

При приемането $L = const$ последното уравнение става линейно. Зависимостта на тока $i = i(t)$ съдържа експонента с насложена на нея синусоида. За получаване на зависимостта на потока $\Psi = \Psi(t)$ се използува зависимостта на тока $i = i(t)$ и кривата на намагнитване $\Psi = \Psi(i)$. Кривата $\Psi = \Psi(t)$ има сплеснат вид вследствие насищането на сърцевината.

6.15. Метод на фазовата равнина

Приема се, че изследваният преходен процес в електрическата верига се описва с линейно или нелинейно диференциално уравнение от първи или втори ред. Разглеждат се случаите на даване накъсо или включване на такава верига към постоянно напрежение, т.е. случаи, когато свободният член на уравнението не

зависи от времето. В такива случаи за изясняване на характера на процеса се оказва много полезно той да бъде изобразен върху така наречената фазова равнина. В тази равнина по абцисната ос се нанася величината $x(t)$, характеризираща изследвания процес, например, токът във веригата $i(t)$, напрежението върху кондензатора $u_C(t)$, магнитният поток $\Psi(t)$ и др., а по ординатната ос - производната на тази величина по отношение на времето $y = dx/dt$, например di/dt, du_c/dt, $d\Psi/dt$ и др.

Точката с координати (x, y) върху фазовата равнина се нарича изобразяваща точка. Линията, която тя начертава върху фазовата равнина, се нарича фазова траектория.

Стойностите на x и $y = dx/dt$, т.е. положението на изобразяващата точка във фазовата равнина точно определят състоянието на процеса в дадения момент. Над оста x $y = dx/dt > 0$, т.е. x нараства и следователно, изобразяващата точка се движи отляво надясно. Под оста x $y = dx/dt < 0$, т.е. x намалява и изобразяващата точка се движи отдясно наляво.

1. Фазови траектории при диференциално уравнение от първи ред

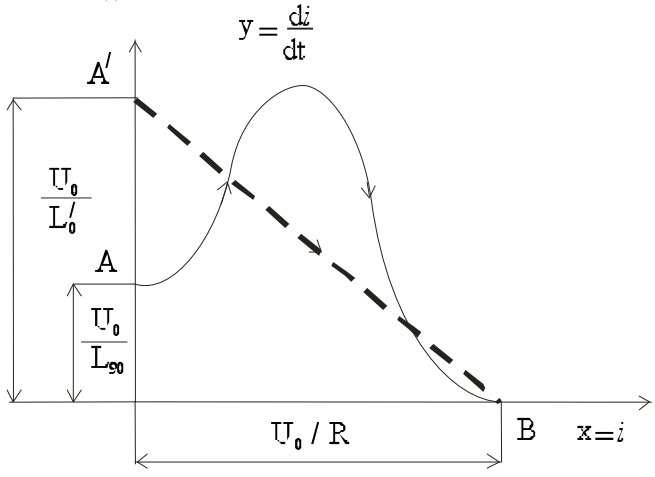
Ако диференциалното уравнение на изследвания преходен процес е от първи ред, т.е. е от вида: $ax' + bx + c = 0$ или $ay + bx + c = 0$, то на всяка стойност на x ще отговаря точно определена стойност на y, която се намира от уравнението. Следователно върху фазовата равнина процесът ще се изобрази с една фазова траектория. Ако уравнението е линейно т.е. коефициентите a, b и c не зависят от x, фазовата траектория ще бъде права линия, а ако управлението е нелинейно - крива. При това във втория случай коефициентите a, b и c са еднозначни функциите на x или y.

Разглежда се преходният процес включване на бобина с феромагнитна сърцевина към източник на постоянно напрежение U_0. За променлива x се приема токът в бобината i. Диференциалното уравнение на веригата е:

$$L_д(di/dt) + Ri = U_0. \qquad (6.15.11)$$

Уравнението се записва във вида:

$$L_д y + Rx = U_0 \qquad (6.15.2)$$



Фиг.6.15.1

Динамичната индуктивност $L_д = (d\Psi/di) = \varphi(i) = \varphi(x)$ се намира от кривата на намагнитване (крива a от фиг.6.11.1). За всяка стойност на x, т.е. на тока i се определя индуктивността $L_д$, а сред това от уравнение (6.12.2) – y. Получените резултати са представени на фиг.6.15.1. В началния момент $t = 0$ се записва: $i(0) = 0$ и $y(0) = (di/dt)_{t=0} = U_0/L_{д0}$. Тези стойности съответстват на началната точка A.

Точката B, към която се стреми изобразяващата точка, е точката на установения режим. Теоретично тя се достига при $t \to \infty$, което означава, че скоростта на движение на изобразяващата точка непрекъснато намалява при приближаване на точката B. За установен режим $i\big|_{t\to\infty} = U_0/R$ и $(di/dt)_{t\to\infty} = 0$.

На фиг.6.15.1 с пунктирна линия е показана фазовата траектория при постоянна индуктивност $L_0' = \Psi_0 / I_0$, т.е. когато преходният процес се описва от линейно диференциално уравнение. В началния момент $t = 0$ $i(0) = 0$ и $y(0) = U_0/L_0'$.

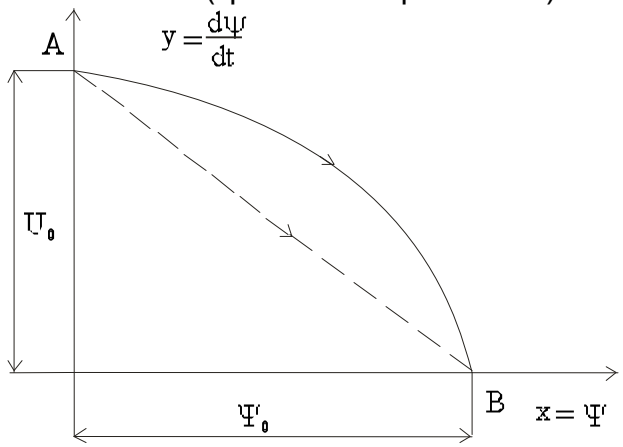
Ако за променлива x се приеме магнитният поток Ψ, то диференциалното уравнение на преходния процес добива вида:

$$d\Psi/dt + (R/L_{ст})\Psi = U_0. \qquad (6.15.3)$$

уравнение (6.15.3) се записва още така:

$$y + (R/L_{ст})x = U_0. \qquad (6.15.4)$$

Статичната индуктивност $L_{ст} = \Psi/i = F(\Psi)$ се определя също от кривата на намагнитване (крива a от фиг.6.11.1). За всяка стойност на x, т.е. на потока Ψ се определя индуктивността $L_{ст}$, а след това от уравнение (6.15.4) - y. Получените резултати са представени на фиг.6.15.2. В началния момент $t = 0$, $x(0) = \Psi(0) = 0$ и $y(0) = (d\Psi/dt)_{t=0} = 0$. Тези стойности съответстват на началната точка A. За установения режим, на който съответствува точка B, т.е. при $t\to\infty$ се получава $\Psi|_{t\to\infty} = \Psi_0$ и $y|_{t\to\infty} = (d\Psi/dt)_{t\to\infty} = 0$. С пунктир на фиг.6.15.2 е дадена фазовата траектория, която би се получила, ако се приеме постоянна индуктивност $L = L_0 = \text{const}$. Тя представлява права линия.



Фиг.6.15.2

2. Фазови траектории при диференциално уравнение от втори ред

Ако преходният процес се описва от диференциално уравнение от втори ред, то в зависимост от началните условия $x(0) = x_0$ и $y(0) = y_0$ изобразяващата точка ще описва една или друга фазова траектория, минаваща през тази начална точка. При това нито една фазова траектория не се пресича с друга, тъй като във всички случаи в реална електрическа верига процесът от някакво начално състояние протича по точно определен начин.

За изясняване на този въпрос се разглежда видът на фазовите траектории за случаите на разряд на кондензатор C върху последователна RL верига и на включване на последователна RLC верига към източник на постоянно напрежение U_0. Първият преходен процес се описва от следното диференциално уравнение:

$$Ri + Ldi/dt + (1/C)\int_0^t i\,dt + u_C(0) = 0. \qquad (6.15.5)$$

Диференциалното уравнение на втория преходен процес е:

$$Ri + Ldi/dt + (1/C)\int_0^t i\,dt + u_C(0) = U_0. \qquad (6.15.6)$$

След диференциране на тези две уравнения се получава едно и също диференциално уравнение:

$$L\frac{d^2 i}{dt^2} + R\frac{di}{dt} + \frac{1}{C}i = 0. \qquad (6.15.7)$$

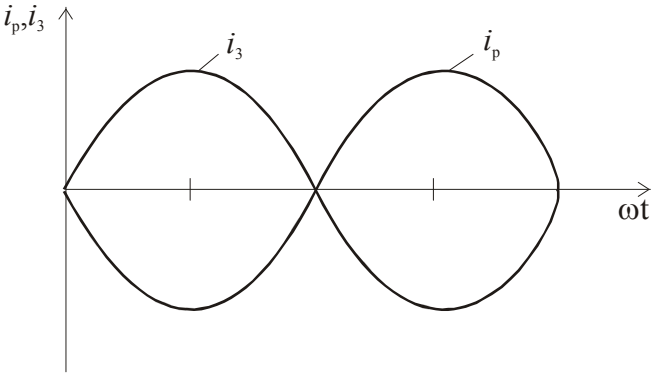
Ако за променлива x се приема токът i, т.е. $i = x$, съответно $y = \frac{dx}{dt} = \frac{di}{dt}$, то уравнение (6.15.7) добива вида:

$$\frac{dy}{dt} + \frac{R}{L}y + \frac{1}{LC}x = 0. \qquad (6.15.8)$$

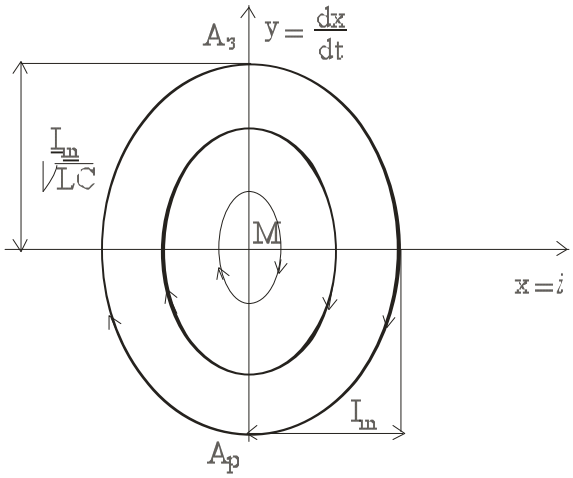
От уравнение (6.15.8) се записва

$$\frac{dy}{dt} = -\left(\frac{R}{L}y + \frac{1}{LC}x\right). \qquad (6.15.9)$$

Ако последното уравнение се раздели на $y = \frac{dx}{dt}$, се получава уравнението на фазовите траектории:



Фиг.6.15.3



Фиг.6.15.4

$$\frac{dy}{dx} = -\left(\frac{R}{L}y + \frac{1}{LC}x\right)/y. \qquad (6.15.10)$$

Ако веригата е без загуби, т.е.: $R = 0$, то от уравнение (6.15.10) се записва:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{LC}\frac{x}{y}. \qquad (6.15.11)$$

Последното уравнение има следното решение:

$$y^2 + \frac{1}{LC}x^2 = A^2, \qquad (6.15.12)$$

където A^2 се определя от началните стойности $x(0) = x_0$ и $y(0) = y_0$.

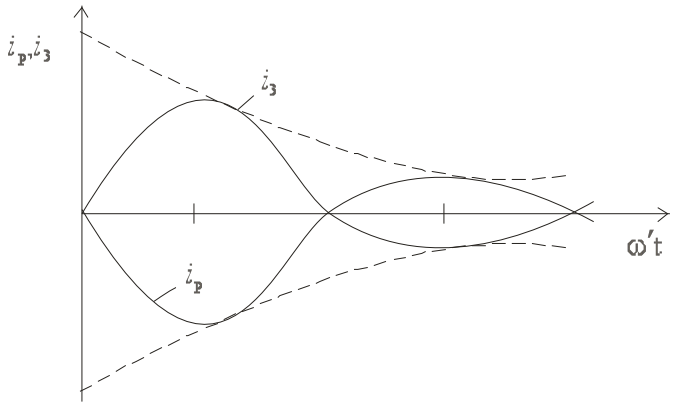
Фазовата траектория представлява елипса с полуоси $A\sqrt{LC}$ и A. Тъй като при $x = x_{max} = I_m$ (I_m е амплитудата на тока, който при условието $R = 0$ се изменя по синусоидален закон), $y = 0$, то следва, че $y_{max} = A = Im/\sqrt{LC}$. Кривите на тока при разряден процес $i_р$ и при заряден процес $i_з$ са показани на фиг.6.15.3, а съответните фазови траектории на фиг.6.15.4. Началното положение на изобразяващата точка при разряден процес е точка $A_р$, а при заряден процес - точка A_3. При други начални стойности на тока и производната му също ще описва елипса, но в общия случай с други стойности на полуосите. Всички елипси обхващат точка M (в случая координатното начало). Точка M, когато обхващащите я фазови траектории представляват разположени една в друга затворени криви, се нарича център. В случая възникват устойчиви незатихващи колебания.

Ако веригата е със загуби, т.е.: $R \neq 0$, то преходният процес ще има псевдопериодичен характер при $R < R_{кр} = 2\sqrt{L/C}$ или апериодичен характер при $R > R_{кр} = 2\sqrt{L/C}$.

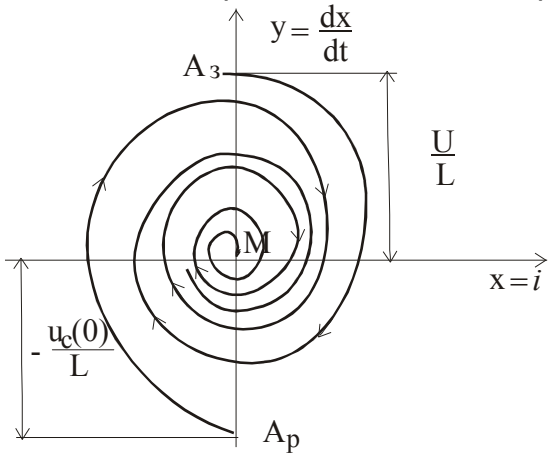
Кривите на тока при разряден процес $i_р$ и при заряден процес $i_з$ за случая на псевдопериодичен характер на процеса са показани на фиг.6.15.5, а съответните фазови траектории - на фиг.6.15.6. Началното положение на изобразяващата точка при разряден процес е точка $A_р$, а при заряден процес - точка A_3. Фазовите

траектории и в двата случая представляват свиваща се към точка M (в случая координатното начало) спирала, като на всяка навивка на спиралата отговаря един период на колебанията. Теоретично около точка M се получават безкраен брой навивки на спиралата, съответствуващи на безкраен брой колебания с намаляващи в едно и също отношение амплитуди. Точка M, към която се свиват спиралите на фазовите траектории се нарича устойчив фокус.

Кривите на тока при разряден процес $i_р$ и при заряден процеса $i_з$ за случая на апериодичен характер на процес са показани на фиг.6.15.7, а съответните фазови траектории - на фиг.6.15.8. Началното положение на изобразяващата точка при

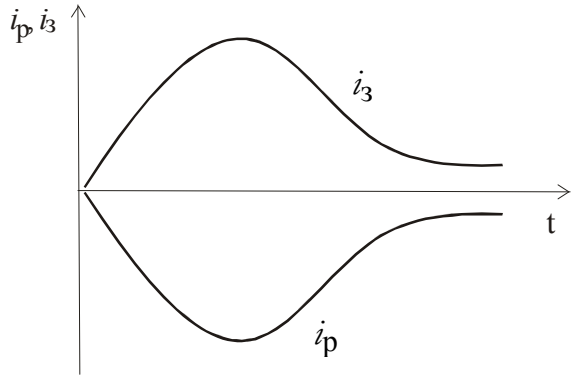


фиг.6.15.5

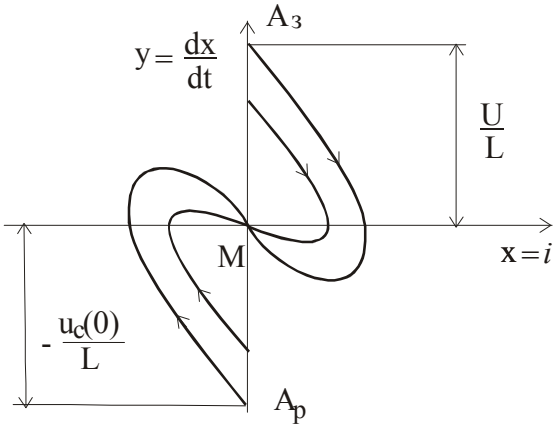


фиг.6.15.6

разряден процес е точка $A_р$, а при заряден процес - точка $A_з$. Фазовите траектории и в двата случая представляват параболи. Изобразяващата точка извършва движение върху фазовата траектория за не повече от един полуоборот. Точка M, към която се стремят фазовите траектории, се нарича в случая устойчив възел. И за трите случая на фазови траектории, показани на фиг.6.15.4, 6.15.6 и 6.15.8, началните точки при разряден процес $A_р$ имат координати $x_0 = x(0) = i(0) = 0$ и $y_0 = y(0) = (di/dt)_{t=0} = -u_C(0)/L$ и



фиг.6.15.7

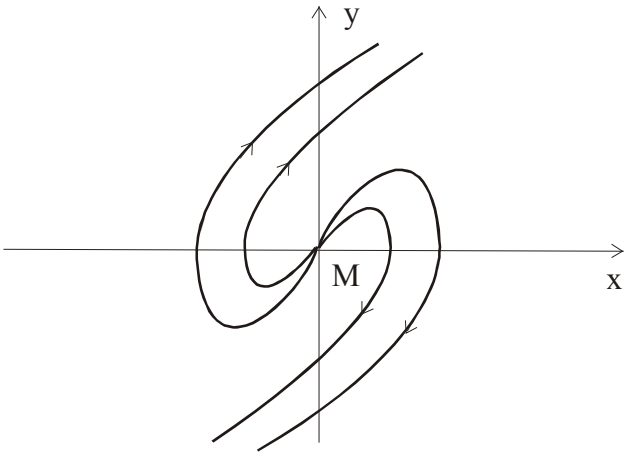


фиг.6.15.8

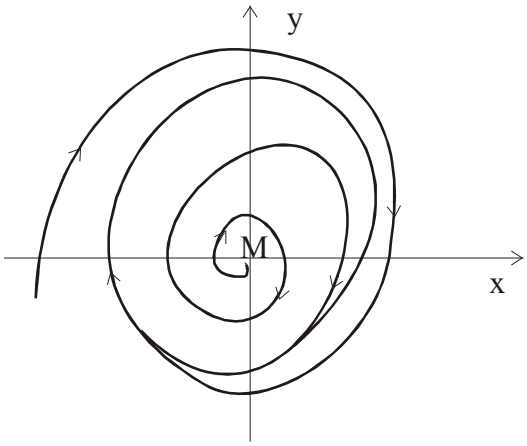
съответно при заряден процес $A_з$ – $x_0 = x(0) = i(0) = 0$ и $y_0 = y(0) = (di/dt)_{t=0} = -U/L$, което следва от диференциалните уравнения на двата процеса (вж. уравнения (6.15.5) и (6.15.6)).

Ако електрическите вериги съдържат нелинейни елементи с падащ участък на характеристиките си, са възможни състояния, както на устойчиво, така и на неустойчиво равновесие. Неустойчиво равновесие е възможно и при положителна обратна връзка. В случай на неустойчиво равновесие при възникване на малко отклонение от положението на равновесие то води до следващо по-голямо отклонение. Това продължава до достигането на точката на устойчиво равновесие.

Възможен е случай при апериодичен преход в други устойчиви състояния на равновесие или случай на нарастване на амплитудата на колебанията до някаква устойчива стойност, например при генераторите. И в двата случая новото устойчиво състояние или съответно устойчивият периодичен процес се определя от нелинейността на характеристиките на елементите.



фиг.6.15.9



фиг.6.15.10

На фиг.6.15.9 е показано неустойчиво равновесие при апериодичен процес. Тук точно M се нарича неустойчив възел. Отдалечаващите се от точка M фазови траектории достигат до устойчиви възли, които не са показани на фигурата.

На фиг.6.15.10 е показано неустойчиво равновесие при псевдопериодичен процес. Тук точката M се нарича неустойчив фокус. В този случай отдалечаващите се от точката M фазови траектории достигат до затворена крива, носеща названието пределен цикъл. Ако съгласно началните условия началното положение на изобразяващата точка се окаже извън пределния цикъл, то фазовите траектории също се приближават към този цикъл.

Ако е известна фазовата траектория, т.е. зависимостта $y = y(x)$ е известна, то от нея може да се намери зависимостта $x = x(t)$. В много случаи добри резултати дава приблизителният метод, при който малкото изменение на времето Δt се определя от израза:

$$\Delta t \approx \Delta x / y_{cp}, \qquad (6.15.13)$$

където y_{cp} е средната стойност на y за интервала, за който е взето изменението Δx.

Тук се изхожда от обстоятелството, че: $y = dx/dt \approx \Delta x/\Delta t$.

6.16. Устойчивост на нелинейните електрически вериги

1. Общи сведения

Анализът на устойчивостта е свързан с определянето на условията на равновесие. При линейните електрически вериги съществува само едно състояние на равновесие, в резултат на което, изменящите се във времето токове и напрежения се приближават към състоянието на покой или на периодично изменение (движение) във времето с честота, равна на честотата на източника на ЕДН или на ток.

При нелинейните електрически вериги може да се наблюдава такова състояние на веригата, при което установен режим е невъзможен. При това е достатъчно някакво слабо смущаващо въздействие, за да започне преходен процес и веригата да премине в ново състояние на равновесие. Ето защо, при анализа на нелинейните електрически вериги е необходимо да бъдат изследвани и на устойчивост.

Ако слабо смущаващо въздействие (независимо от това как е предизвикано) води до отдалечаване на режима от изходното (установеното) му състояние или от

несмущаваното му движение, то се говори за неустойчивост на положението на равновесие или на смущаваното движение.

Ако режимът във веригата след прекратяване на смущаващото въздействие се връща в изходното си състояние, то такъв режим се нарича устойчив.

С въпросите на устойчивостта са се занимавали редица учени Лагранж, Раус, Томпсън, Жуковски, Поанкаре. Значително място в теорията на устойчивостта заема трудът на големия руски математик А.М. Ляпунов "Обща задача за устойчивост на движението" (1892 г.), който и днес е основа на всички изследвания в тази област. А.М. Ляпунов като е изследвал нелинейни задачи на небесната механика е доказал няколко теореми, чрез които задачата за устойчивостта се решава в общ вид. Той е показал, че при малки отклонения от състоянието на равновесие правилно решение относно устойчивостта може да се получи чрез линеаризиране на нелинейното уравнение, т.е. при замяна на нелинейната характеристика с допирателна в точката на предполагаемото решение.

2. Определение на устойчивост

Поведението на коя да е физическа система обикновено се описва от диференциалното уравнение от n-ти ред, което винаги може да бъде преобразувано в система от n на брой диференциални уравнения от първи ред от вида:

$$\frac{dy_\nu}{dt} = Y_\nu(t, y_1, y_2, \ldots, y_n) \quad (\nu = 1 \ldots n), \tag{6.16.1}$$

където y_ν са променливи, свързани с "движението" (от гледна точка на механиката).

При електрическите вериги величините y_ν са променливи, свързани с времето на протичане на процеса като например, напрежение, ток, заряд, поток или техните производни.

На частното решение $y_\nu = f_\nu(t)$ на уравнение (6.16.1) съответствува частно движение на системата, което се нарича несмущавано движение, в противоположност на друго движение, носещо названието смущавано движение. Разликата в стойностите на смущаваното и несмущаваното движения се отбелязва като смущение.

А.М. Ляпунов е дал следното определение за устойчивост: Несмущаваното движение се нарича устойчиво по отношение на величината y_ν, ако за всяко малко положително число ε може да бъде намерено друго такова число $\delta(\varepsilon)$, така че за всички смущавани движения $y_\nu = y_\nu(t)$ в началния момент от време $t = t_0$ да се изпълнява неравенството:

$$\left|y_\nu(t_0) - f_\nu(t_0)\right| \le \delta, \tag{6.16.2}$$

а за всички следващи моменти от време $t > t_0$ да се изпълнява неравенството:

$$\left|y_\nu(t_0) - f_\nu(t)\right| < \varepsilon. \tag{6.16.3}$$

В противен случай несмущаваното движение е неустойчиво.

Въз основа на горното определение за устойчивост на движението следва, че устойчивост на точката на равновесие се получава за частния случай, когато всички частни решения са постоянни, т.е.: $f_\nu \equiv \kappa_\nu$.

Освен определение за устойчивост се дава и определение за асимптотична устойчивост. Несмущаваното движение е асимптотически устойчиво, ако то от една страна е устойчиво съгласно горното определение, а от друга - числото δ винаги може да се избере такова, че за всички смущавани движения, удовлетворяващи неравенството (6.16.2), допълнително се изпълнява условието:

$$\lim_{t \to \infty} [y_\nu(t) - f_\nu(t)] = 0. \tag{6.16.4}$$

Това условие означава, че при смущаваното в началния момент от време $t = t_0$ асимптотически устойчиво движение смущенията не само остават в определената граница ε, както при нормална устойчивост, но и допълнително във времето затихват до нула.

И така, несмущаваното движение е устойчиво, ако смущаваното в началния момент движение се извършва в непосредствената му околност без да я напуска. То е асимптотически устойчиво, ако смущаваното движение е асимптотически се стреми към него.

При изследване на устойчивостта е целесъобразно да се въведат нови променливи x_ν, наречени смущения. Те се дават със следната система уравнения:

$$x_\nu = y_\nu - f_\nu(t) \quad (\nu = 1 \ldots n), \tag{6.16.5}$$

където $f_\nu(t)$ са частните решения на системата уравнения (6.16.1).

Ако системата уравнения (6.16.5) се диференцира по времето t, се получава:

$$\frac{dy_\nu}{dt} = y_\nu(t, x_1 + f_1, x_2 + f_2, \ldots, x_n + f_n) - Y_\nu(t, f_1, f_2, \ldots, f_n) =$$
$$= X_\nu(t, x_1, x_2, \ldots, x_n) \quad (\nu = 1 \ldots n). \tag{6.16.6}$$

Тези уравнения се наричат диференциални уравнения на смущаваното движение. На всяко движение на разглежданата система съответствува частно решение на уравнения (6.16.6). В частност, на несмущаваното движение съответствува тривиалното решение $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$, при което функциите $X_\nu(t, x_1, x_2, \ldots, x_n)$ също стават равни на нула.

При повечето задачи, свързани с изследване на устойчивост, е целесъобразно десните части на уравненията на смущаваното движение (6.16.6) да бъдат разложени в ред на степените на смущенията x_ν. Като се има предвид, че: $X_\nu(t, 0, 0, \ldots, 0) = 0$, то в реда ще отсъствуват свободни членове и може да се запише:

$$\frac{dx_\nu}{dt} = a_{\nu 1}x_1 + a_{\nu 2}x_2 + \ldots + a_{\nu n}x_n + \overline{X}_\nu(t, x_1, x_2, \ldots, x_n) \ (\nu = 1 \ldots n) \ , \tag{6.16.7}$$

където $\overline{X}_\nu$ е съкратеният запис на всички членове, редът на които относно смущенията x_ν е по-висок от първи.

В много случаи, ако началните стойности на смущенията x_ν са малки, то при изследване на устойчивостта членовете от по-висок ред могат да бъдат пренебрегнати и да се разглежда следната линеаризирана система уравнения:

$$\frac{dx_\nu}{dt} = a_{\nu 1}x_1 + a_{\nu 2}x_2 + \ldots + a_{\nu n}x_n \quad (\nu = 1 \ldots n) \ . \tag{6.16.8}$$

Тази система уравнения се нарича система от първо приближение. За устойчивостта на първоначалната нелинейна система може да се съди въз основа на анализа на линеаризираната система уравнения. Въпросът за тази възможност за пръв път е разгледан от А.М. Ляпунов за всички случаи на изследване на системата уравнения (6.16.7).

Характеристичното уравнение на линеаризираната система уравнения (6.16.8) е от вида:

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \ . \tag{6.16.9}$$

Уравнение (6.16.9) е от n-степен и има n различни корена λ_i. В случай на кратни корени, то общият им брой е толкова по-малък от n, колкото са кратните корени.

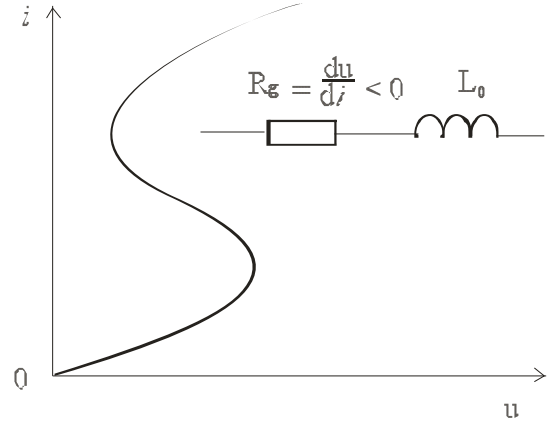
По отношение на устойчивостта на нелинейните системи А.М. Ляпунов е дал следните основни положения:

1. Ако всички корени на характеристичното уравнение на системата от първо приближение имат отрицателни реални части, то несмущаваното движение е устойчиво, независимо от вида на членовете с по-висок ред в диференциалното уравнение на смущаваното движение.

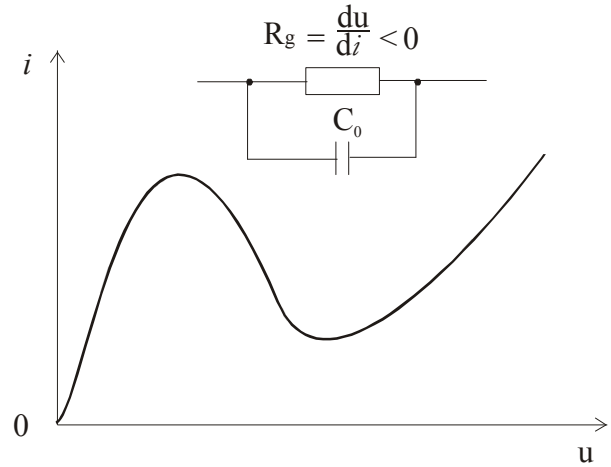
2. Ако поне един от корените на характеристичното уравнение на системата от първо приближение има положителна реална част, то несмущаваното движение е неустойчиво, независимо от избора на членовете с по-висок ред в диференциалните уравнения на смущаваното движение.

3. Ако характеристичното уравнение на системата от първо приближение няма корени с положителни реални части, но има такива, при които реалната част е равна на нула, то може чрез избора на членове с по-висок ред в диференциалните уравнения на смущаваното движение да се получи по желание устойчивост или неустойчивост.

Първите две положения се отнасят към така наречените “некритични случаи”, при които въз основа на изследването на системата от първо приближение може да се даде ясен отговор за устойчивостта на нелинейната система. Третото положение касае “критичните случаи”, при които определен извод за устойчивостта може да бъде направен само при допълнителен избор на членовете от по-висок ред в системата диференциални уравнения на смущаваното движение.



Фиг.6.16.1



Фиг.6.16.2

За облекчаване анализа на устойчивостта на системи от по-висок ред, намирането на корените на характеристичното уравнение на които е доста трудно, са разработени различните критерии: алгебрични критерии на Раус и Хурвиц, честотни критерии на Найквист и Михайлов и др. Например с помощта на критерия на Хурвиц може да се прецени дали системата от първи или втори ред е устойчива, като се съди по вида на характеристичното й уравнение.

3. Устойчивост на положението на равновесие в нелинейните електрически вериги за постоянен ток

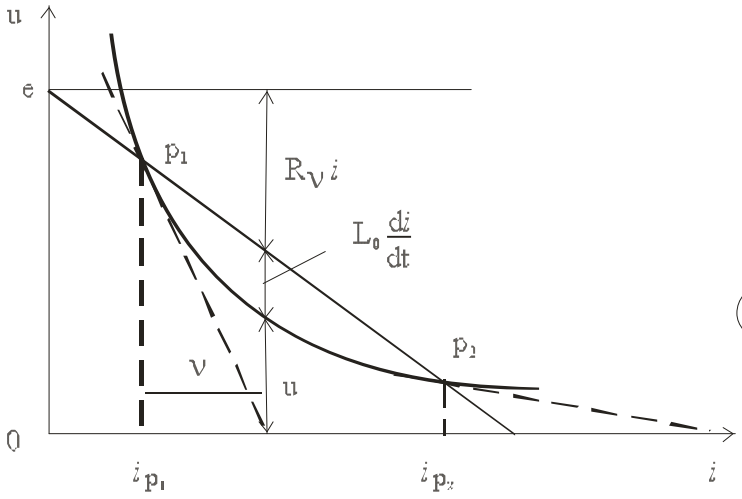
При изследване устойчивостта на нелинейните електрически вериги за постоянен ток при малки смущения характеристиките на нелинейните елементи в работната точка се апроксимират с прави, които съответстват на динамичното съпротивление (в случай на безинерционни елементи на диференциалното съпротивление).При това неустойчивост е възможна при наличие на нелинейни елементи с отрицателно динамично съпротивление, т.е. с падаща V-A характеристика. Тези нелинейни

елементи могат да бъдат разделени на две групи.

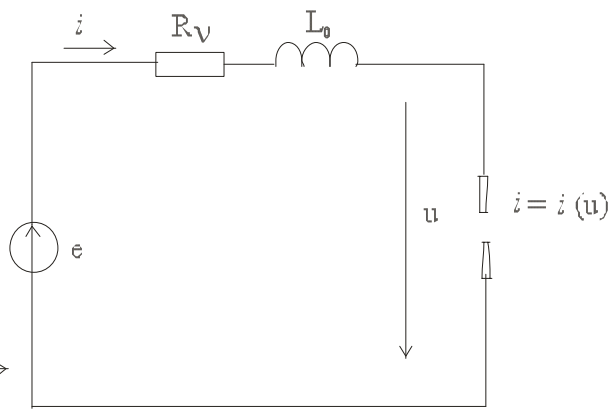
Към първата група се отнасят елементите с S - образна V-A характеристика, например, електрическата дъга (фиг.6.16.1). При тях токът е неоднозначно определен по отношение на напрежението, т.е. при определено напрежение е възможен скок на тока. Опитът показва, че в такава верига присъствува малка паразитна индуктивност, която не допуска скокообразно изменение на тока. Ето защо при изследване на устойчивостта в такива вериги нелинейните елементи с S - образна V-A характеристика се представят като последователно съединени динамично съпротивление $R_д$ и малка начална индуктивност на елемента L_0 (фиг.6.16.1).

Към втората група се отнасят елементите с N - образна V-A характеристика, например лампите с вторична електронна емисия (фиг.6.16.2). При тях напрежението е неоднозначно определено по отношение на тока, т.е. при определен ток е възможен скок на напрежението. В действителност, поради наличието макар и на малък паразитен капацитет, това се избягва. Ето защо при изследване на устойчивостта в такива вериги нелинейните елементи с N - образна V-A характеристика се представят като паралелно съединени динамично съпротивление $R_д$ и малък паразитен капацитет на елемента C_0 (фиг.6.16.2).

Като пример за изследване на устойчивостта на точката на равновесие на



Фиг.6.16.3



Фиг.6.16.4

нелинейна електрическа верига за постоянен ток се разглежда електрическата дъга, чиято V-A характеристика е показана на фиг.6.16.3. Електрическата верига на дъгата е представена на фиг.6.16.4. Последователно с електрическата дъга към източника на ЕДН e са включени добавъчното активно съпротивление R_ν и паразитната индуктивност L_0.

Съгласно втория закон на Кирхоф за разглежданата електрическа верига се записва уравнението:

$$R_\nu i + L_0 \frac{di}{dt} + u = e\ . \qquad (6.16.10)$$

При състояние на равновесие токът във веригата не трябва да се изменя, т.е.: $i = I_p = \text{const}$, откъдето следва че и производната му е равна на нула, т.е.: $\frac{di}{dt} = 0$. На фиг.6.16.3 е нанесена и товарната права: $e - R_\nu i$, която пресича V-A характеристика на дъгата в точките P_1 и P_2. Именно в тези две точки може да се говори за състояние

на равновесие и задачата е да се установи коя от двете точки е точката на устойчивото равновесие.

При състоянието на равновесие уравнение (6.16.10) добива вида:

$$R_\nu i_p + u_p = e. \qquad (6.16.11)$$

Приема се, че в началния момент от време $t = 0$ токът i, е получил малко отклонение (смущение) от положението на равновесие. Това отклонение в следващите моменти от време започва да се изменя, т.е. ще бъде функция на времето $\nu = \nu(t)$. В такъв случай токът i във веригата във всеки момент от време ще бъде:

$$i = i_p + \nu. \qquad (6.16.12)$$

Напрежението на дъгата u, което е функция на тока i, ще зависи от отклонението му ν, т.е.: $u = u(i_p + \nu)$. При разлагане на израза $u(i_p + \nu)$ в ред на стените на отклонение ν и след пренебрегване на членовете от втора и по-висока степен, се получава:

$$u = u_p + \Delta u = u_p + \left.\frac{du}{di}\right|_{i=i_r} .\nu = u_p + R_д.\nu \ , \qquad (6.16.13)$$

където $R_д = \left.\frac{du}{di}\right|_{i=i_r}$ е динамичното съпротивление на електрическата дъга в състоянието на равновесие, т.е. при ток: $i = i_p$.

Като се има предвид, че съгласно израз (6.16.12) е в сила равенството: $\frac{di}{dt} = \frac{d\nu}{dt}$, то след заместване на тока i от израз (6.16.12) и на напрежението u от израз (6.16.12) в уравнението на веригата (6.16.10), се записва:

$$R_\nu i_p + R_\nu.\nu + L_0\frac{d\nu}{dt} + u_p + R_д.\nu = R_\nu i_p + u_p + L_0\frac{d\nu}{dt} + (R_\nu + R_д)\nu = e. \qquad (6.16.14)$$

Ако от последното уравнение се извади уравнение (6.16.11), то се получава уравнението на отклонението на тока ν:

$$L_0\frac{d\nu}{dt} + (R_\nu + R_д)\nu = 0. \qquad (6.16.15)$$

Тъй като при разлагането на напрежението u по степените на отклонението ν са пренебрегнати членовете от втора и по-висока степен, то уравнение (6.16.15) е линейно, т.е. е уравнение от първо приближение. Съответното му характеристично уравнение е от вида:

$$L_0\alpha + (R_\nu + R_д) = 0,$$

чийто корен $\alpha = -(R_\nu + R_д)/L_0$ е единствен. В такъв случай решението на диференциалното уравнение (6.16.15) е:

$$\nu = \nu_0 e^{-\frac{R_\nu + R_д}{L_0}.t}, \qquad (6.16.16)$$

където ν_0 е началната стойност на отклонението на тока ν от стойността му в състоянието на равновесие i_p.

За да бъде състоянието на равновесие устойчиво, трябва коренът α на характеристичното уравнение да е отрицателен, т.е.: $\alpha < 0$. Това се изпълнява, ако е изпълнено неравенството: $(R_\nu + R_д) > 0$. И действително, в този случай при $t \to \infty$, отклонението ν ще клони към нула, т.е.: $\nu\big|_{t\to\infty} \to 0$.

Ако обаче е налице неравенството: $(R_\nu + R_д) < 0$, то коренът $\alpha > 0$ и при $t \to \infty$ отклонението ν също ще клони към безкрайност, т.е. $\nu\big|_{t\to\infty} \to \infty$.

В първия случай токът i ще се връща към стойността си $i_р$ в положението на равновесие, а във втория случай той ще се отдалечава от стойността си $i_р$.

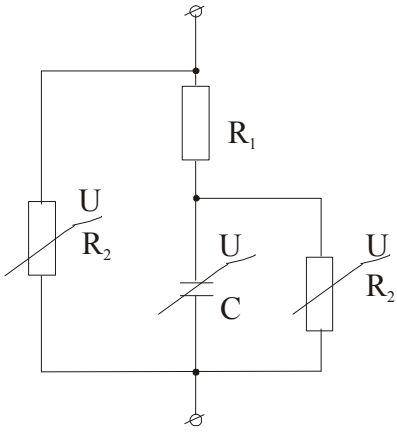
Тъй като V-A характеристика на електрическата дъга е падаща, то динамичното й съпротивление е отрицателно, т.е.: $R_д = \left.\frac{du}{di}\right|_{i=i_г} < 0$. В такъв случай за да бъде изпълнено неравенството $(R_\nu + R_д) > 0$, то е необходимо наклонът на товарната права да бъде по-голям от наклона на кривата $u = u(i)$. Последният се определя от допирателната към разглежданата точка от кривата, което съответствува на точка P_2, т.е., в точка P_2 състоянието на равновесие е устойчиво. Респективно в точката P_1 е налице неравенството $(R_\nu + R_д) < 0$, тъй като наклонът на товарната права е по-малък от наклона на кривата $u = u(i)$. Ето защо състоянието на равновесие в точката P_1 е неустойчиво.

Въз основа на разгледаното по-горе може да се заключи, че устойчиво състояние на равновесие отговаря на отрицателен корен на характеристичното уравнение. Това заключение напълно потвърждава първото от основните положения относно устойчивостта на нелинейните системи, дадени от А.М. Ляпунов.

6.17. Растителната тъкан като електрически обект

1. Електрическо съпротивление и заместваща електрическа схема на растителната тъкан

В редица технологични процеси на растениевъдството все по-широко приложение намират различни електровъздействия като: електрически и магнитни полета, електрически ток, електрически разряди и др. Например, чрез въздействие чрез електрически и магнитни полета може да се стимулира растежа и развитието на растенията и да се повишат добивите от тях; чрез въздействие с електрически ток и електрически разряди може да се унищожават плевели и да се ускори сушенето на тревна и листна маса; чрез въздействие с електроискрови разряди може да се ускори узряването на слънчоглед и тютюн, да се разрежда захарно цвекло и др. При тези въздействия е целесъобразно растителната тъкан да бъде да бъде разглеждана като електрически обект, тъй като те водят до изменения на електрическите й параметри.



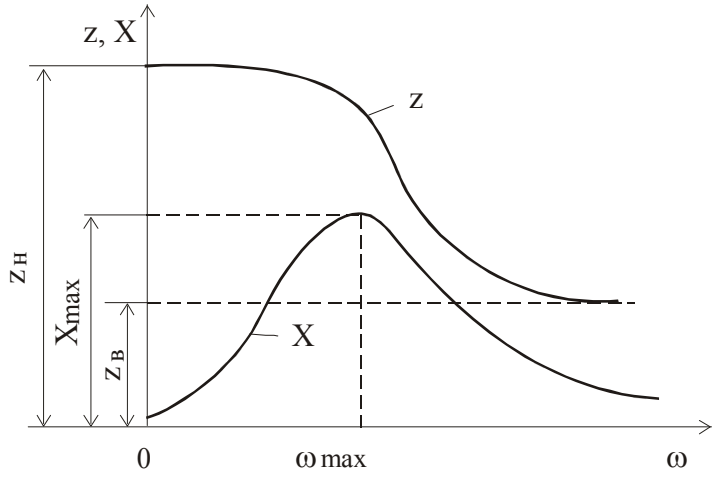
Фиг.6.17.1

Като основен електрически параметър на растителната тъкан се приема електрическото й съпротивление. Известно е, че то има активно-капацитивен характер, зависи от приложеното напрежение и при увеличаване на честотата на напрежението, при което се провежда измерването му, намалява. Това дава основание заместващата електрическа схема на растителната тъкан да бъде представена с последователно или паралелно свързани нелинеен резистор и нелинеен кондензатор.

Най-голямо приложение е намерила заместващата електрическа схема на растителната тъкан, показана на фиг.6.17.1, тъй като тя отразява честотните характеристики на съпротивлението на тъканта и се свързва с клетъчния й строеж. Във връзка с последното следва да се отбележи, че съпротивлението R_1 съответствува на съпротивлението на протоплазмата; съпротивлението R_2 – на съпротивлението междуклетъчната течност, а R_3 – на съпротивлението на мембраната. Съпротивленията R_2 и R_3 в общия случай зависят от приложеното напрежение. За живата растителна тъкан за съпротивленията й е в сила неравенството: $R_3 >> R_2 >> R_1$.

Капацитетът C според фазовата теория се обуславя от обемната поляризация на мембраната, а според мембранната теория – от поляризацията на мембраната.

На фиг.6.17.2. е показан типичният вид на зависимостта на пълното електрическо съпротивление z в зависимост от честотата ω. От кривата $z = z(\omega)$ може да се види, че при много ниски честоти съпротивлението z е практически равно на съпротивлението на тъканта при постоянно напрежение – $z_н$. С увеличаване на честотата ω, съпротивлението z намалява и при много високи честоти достига до някаква стойност $z_в$.



Фиг.6.17.2

Ако се приеме, че параметрите на елементите на схемата от фиг.6.17.1 са постоянни (това се изпълнява, когато напрежението, при което се извършва измерването, е избрано достатъчно ниско, така че да не влияе върху параметрите на растителната тъкан) и ако с R и X се означат активната и реактивната съставки на съпротивлението z , то в комплексен вид се записва така:

$$Z = R - jX \ . \qquad (6.17.1)$$

Изразите за съставките R и X за схемата от фиг.6.17.1 са както следва:

$$R = R_2 \frac{(R_2 + R_3)(R_1 + R_2 + R_3) + \omega^2 C^2 R_3^2 (R_1 + R_2) R_1}{(R_1 + R_2 + R_3)^2 + \omega^2 C^2 R_3^2 (R_1 + R_2)^2}; \qquad (6.17.2)$$

$$X = \frac{\omega C R_2^2 R_3^2}{(R_1 + R_2 + R_3)^2 + \omega^2 C^2 R_3^2 (R_1 + R_2)^2} \ , \qquad (6.17.3)$$

където ω е честотата на напрежението, при която се извършва измерването.

За живата растителна тъкан съпротивлението R_3 е много високо и ако в изрази (6.17.2) и (6.17.3) се приеме, че то клони към безкрайност, се получава:

$$R \approx R_2 \frac{1 + \omega^2 C^2 R_1 (R_1 + R_2)}{1 + \omega^2 C^2 (R_1 + R_2)^2}; \qquad (6.17.4)$$

$$X \approx \frac{\omega C R_2^2}{1+\omega^2 C^2 (R_1+R_2)^2}. \qquad (6.17.5)$$

Честотната характеристика на активната съставка $R = R(\omega)$ показва, че при увеличаване на честотата ω, тя намалява. Например, при $\omega = 0$, $R(0) = R_2$, а когато ω клони към безкрайност, то $R(\infty) = R_1 R_2 / (R_2 + R_1)$.

Честотната характеристика на реактивната съставка $X = X(\omega)$ показва, че при увеличаване на честотата ω, отначало тя нараства и при честота $\omega = \omega_{max} = 1/C(R_1 + R_2)$ получава максимална стойност $X_{max} = R_2^2 / 2(R_2 + R_1)$, а след това намалява (фиг.6.17.2);

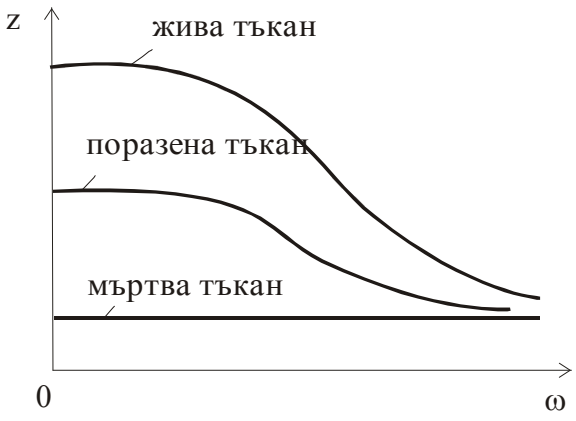
От израз (6.17.5) и от фиг.6.17.2 може да се установи, че реактивната съставка X на съпротивлението z на живата растителна тъкан е близка до нула, както при ниски честоти (практически до 1 кHz) , така и при много високи честоти (повече от 1 MHz). Ето защо за тези честотни диапазони съпротивлението z съвпада с активната си съставка R. Както следва от израз (6.17.2) при ниски, съответно при високи честоти, тя се определя по формулите:

$$R_н = \frac{R_2(R_1+R_2)}{R_1+R_2+R_3} \quad \text{и} \quad R_В = R(\infty) = \frac{R_2 R_1}{R_1+R_2}. \qquad (6.17.6).$$

Както бе споменато по-горе, съпротивлението на растителната тъкан зависи от приложеното към нея напрежение. По отношение на заместващата схема на тъканта (фиг. 6.17.1) е известно, че съпротивленията R_2 и R_3 имат прагове на напрежение, като прагът за съпротивлението R_2 е около 2 пъти по-висок. При увеличаване на напрежението в диапазона на надпраговите стойности, съпротивлението R_3 не се изменя, а съпротивлението R_2 слабо нараства, което се свързва с реакцията на клетките на растителната тъкан от въздействието на тока. След като напрежението достигне праговата си стойност за съпротивлението R_3, то това съпротивление започва да намалява, а съпротивлението R_2 почти не се изменя.

По-нататъшното увеличаване на напрежението след праговата стойност на съпротивлението R_2 води до намаляване, както на съпротивлението R_2, така и на съпротивлението R_3. Този процес продължава, докато съпротивлението R_3 стане равно на нула. При това капацитивните свойства на растителната тъкан изчезват и напрежението и токът съвпадат по фаза.

Ако след такова въздействие се намали приложеното напрежение, то капацитивните свойства на тъканта се възстановяват частично, а съпротивлението на мембраната R_3 нараства, без да достигне първоначалната си стойност, докато съпротивлението на междуклетъчната течност R_2 почти не се изменя. За илюстрация на фиг.6.17.3 са показани честотните характеристики на пълното съпротивление z на растителната тъкан за жива, поразена и мъртва тъкан.



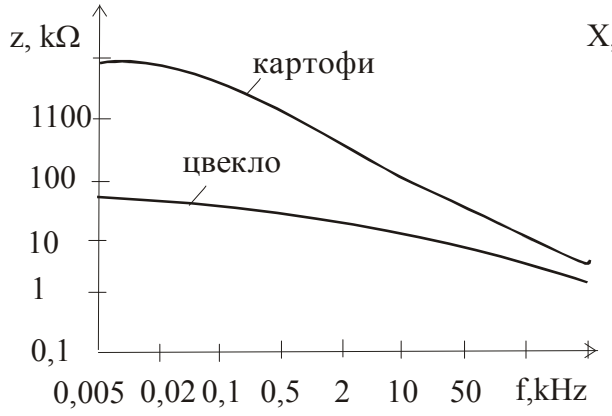
Фиг.6.17.3

Изчезването на капацитивните свойства на тъканта се обяснява с пробив на мембраната, наречен биоелектрически пробив. Този пробив означава даване накъсо на паралелно съединените елементи R_3 и C на схемата от фиг. 6.17.1. Съпротивлението на

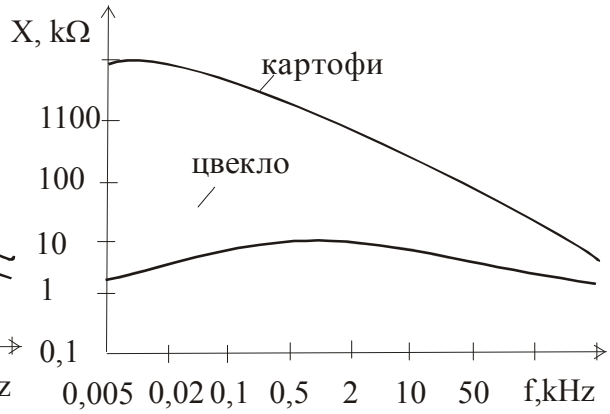
тъканта след пробива става чисто активно и се определя от паралелно съединените съпротивления на протоплазмата на клетките R_1 и на междуклетъчната течност R_2. След пробива растителната тъкан може да бъде считана за еднороден и изотропен обект.

Въз основа на разгледаното по-горе може да се заключи, че най-важната клеъчна структура, определяща изменението на електрическото съпротивление на растителната тъкан, е мембраната. Намаляването на съпротивлението ѝ R_3 се извършва едновременно с намаляване на избирателната ѝ полупроницаемост. Това се свързва с преминаването на сок в междуклетъчната течност, което намалява съпротивлението ѝ R_2, а изчезването на капацитивните свойства на тъканта - с пробив на мембраната. Оттук може да бъде направен изводът, че за поразяване на растителната тъкан е необходимо и достатъчно мембраната да бъде лишена от свойството си полупроницаемост.

Известно е, че стъблата на някои растения като слънчоглед и тютюн загубват капацитивните си свойства при относително напрежение (напрежение, отнесено за единица дължина на обработвания участък на стъблото) над 1 кV/m. Стойностите му

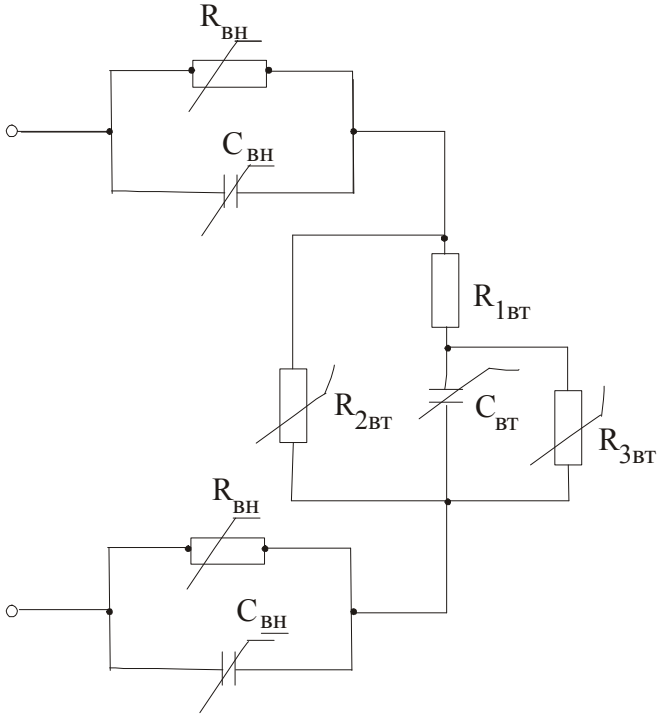


Фиг.6.17.4



Фиг.6.17.5

за различни тъкани на стъблото са както следва: флоема – 11 кV/m в напречно и 5кV/m в надлъжно направление, ксилема съответно 9 кV/m и 1,5 кV/m и паренхим – 0,25 кV/m и в двете направления. Тези данни показват, че стъблата следва да бъдат разглеждани като нееднороден и анизотропен електрически обект.



Фиг.6.17.6

Дотук разглеждането е направено за въздействия с относително ниски напрежения. При въздействия с високи напрежения, към растителната тъкан се прилага напрежение, превишаващо с няколко порядъка праговото ѝ. Ето защо при такива въздействия може да се приема, че биоелектрическият пробив на мембраната се извършва мигновено, т.е. съпротивлението R_3 мигновено пада до нула и съпротивлението на тъканта става чисто активно и не превишава съпротивлението на протоплазмата на клетките R_1.

При въздействие върху растителни обекти с електроискрови разряди при възникването на контакт на искровия канал с обекта се пробива епидермисът му. Последният има най-високо съпротивление и пробиването му води до намаляване на общото съпротивление на растителната тъкан.

Известни са растителни обекти като например, клубени на картофи, които се отличават с високи стойности при ниски честоти на пълното си електрическо съпротивление z и на реактивната му съставка X. За илюстрация на фиг.6.17.4 е показана честотната характеристика $z = z(f)$, а на фиг.6.17.5 – честотната характеристика на реактивната съставка $X = X(f)$. За сравнение на тези фигури са показани съответните честотни характеристики на z и X, и за клубени на захарно цвекло.

От сравняване на кривите $z = z(f)$ от фиг. 6.17.4 може да се установи, че при ниски честоти пълното съпротивление на клубените на картофи е с около два порядъка по-високо от това на клубените на захарно цвекло. По отношение на реактивните съставки, то тази разлика е повече от три порядъка. Освен това реактивната съставка X при клубените на картофи при увеличаване на честотата намалява. Тази особеност на честотната характеристика на съставката $X = X(f)$ при клубените на картофи се свързва с наличието при тях на повърхностна тъкан с високо електрическо съпротивление. И действително, след отстраняване на повърхностната тъкан на клубените, пълното им съпротивление z намалява с около 3 порядъка, а реактивната му съставка - с около 4 порядъка. Освен това видът на кривата $X = X(f)$ става аналогичен на този на кривата $X = X(f)$ при захарното цвекло.

Въз основа на изложеното по-горе е предложена заместваща електрическа схема на растителната тъкан на клубени на картофи, която е показана на фиг.6.17.6. Индексът “вн” се отнася за външната, а индексът “вт”- за вътрешната тъкан.

2. Основни режимни параметри на електроискровото въздействие върху растенията и влиянието им върху ефективността му

Както бе разгледано вече, електрическото съпротивление на растителната тъкан е основният й електрически параметър. Той корелира, както със жизнеспособността й, така и с поразяването й. На базата на този параметър се определят показателите коефициент на поляризация $K_П$ и степен на поразяване $S_П$ на растителната тъкан.

Коефициентът на поляризация $K_П$ се дефинира със следната формула:

$$K_П = \frac{z_н}{z_в}, \qquad (6.17.7)$$

където $z_н$ и $z_в$ са пълните електрически съпротивления на тъканта, измерени съответно при ниска и висока честоти. За ниска честота се приема $f_Н = 1\text{кHz}$, а за висока честота – $f_В = 1\text{MHz}$.

Степента на поразяване $S_П$ се определя по два метода:

а) чрез коефициента на поляризация;

б) чрез пълното съпротивление на тъканта (метод на проводимостта).

За степента на поразяване $S_{ПКп}$, определяна чрез коефициента на поляризация $K_П$, се записва:

$$S_{ПКп} = \frac{K_{П0}}{K_П}, \qquad (6.17.8)$$

където $K_{П0}$ и $K_П$ са стойностите на коефициента на поляризация на растителната тъкан преди и съответно след въздействието.

Степента на поразяване $S_П$, определяна по метода на проводимостта, се пресмята по формулата :

$$S_П = \frac{z_0}{z}, \qquad (6.17.8)$$

където z_0 и z са стойностите на пълните електрически съпротивления на растителната тъкан преди и съответно след въздействието.

Обикновено честотата, при която се измерват съпротивленията z_0 и z , се избира $f = 10$ кHz.

Показателят степен на поразяване характеризира, както жизнеспособността и поразяването на растителната тъкан, така и ефективността на въздействието и съответно на уредбата, която го реализира.

Относно характера на взаимодействието на агента с обекта на въздействие, най-разпространена е следната теоретична постановка:

а) всяко възможно влияние на главния действуващ (поразяващ) фактор на агента върху биологичния обект (от растителен и животински произход) трябва да бъде обусловено от съответни енергийни взаимодействия на фактора с обекта;

б) между възникналия ефект и погълнатата от обекта енергия трябва да съществува пряка връзка.

Въз основа на тези две предпоставки зависимостта на степента на въздействие S от интензивността D на агента и от времето на неговото действие t в общия случай може да се представи в следния вид:

$$S = KD^P t^q, \qquad (6.17.10)$$

където K е коефициент на пропорционалност,

p и q са степенни показатели, положителни величини, в общия случай променливи, зависещи от D и t.

При въздействие с електроискрови разряди върху растителни обекти е установено, че главният поразяващ фактор на разряда е токът, преминаващ през растителната тъкан.

Като се има предвид връзката между плътността на тока δ и интензитета на електрическото поле E в тъканта, т.е. :

$$\delta = \gamma E, \qquad (6.17.11)$$

(γ е специфичната проводимост на растителната тъкан), то за степента на въздействие, която в случая е степента на поразяване на тъканта $S_П$, се записва:

$$S_П = KE^P t^q. \qquad (6.17.12)$$

Както бе споменато вече, тук трябва да се има предвид, че в обшия случай растителната тъкан е нееднороден и анизотропен електрически обект. Ето защо при строго разглеждане специфичната проводимост γ е тензорна величина. За облекчаване на анализа се приема линейна зависимост между пътността на тока δ и интензитета на електрическото поле E в тъканта.

Във връзка с по-нататъшното разглеждане е целесъобразно формула (6.17.11) да бъде записана за интегерални величини – основните режимни параметри на електроискровото въздействие: начално напрежение U_0 (напрежение на обработка) и капацитет C на разрядния кондензатор и брой на разрядите n.

За целта интензитетът на електрическото поле E в растителната тъкан се изразява чрез напрежението u_p, приложено към тъканта и дължината ℓ на обработвания й участък (при напречно електроискрово въздействие върху стъбла на растения под дължината ℓ следва да се разбира диаметърът на стъблата d_0), т.е.:

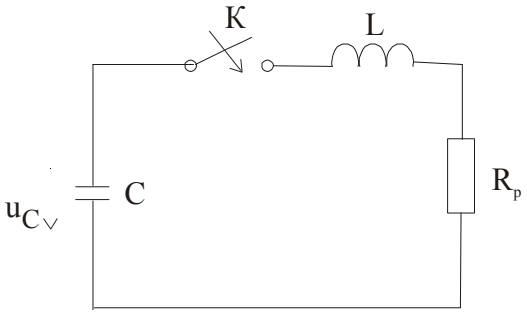
$$E = \frac{u_P}{\ell}. \qquad (6.17.12).$$

За напрежението u_P може да се запише:

$$u_P = R_P i_P \qquad (6.17.13)$$

където R_P е съпротивлението на растителната тъкан при високо напрежение;

i_P – токът, преминаващ през тъканта.



фиг.6.17.7

Токът i_P може да бъде определен като ток на разряден процес в последователна RLC верига (фиг. 6.17.7). И действително, за разглеждания случай разрядният контур може да бъде представен чрез обобщената заместваща електрическа схема, показана на фигурата. Ролята на ключа K се изпълнява от разрядната междина, която може да бъде комутираща или работна. В първият случай растителният обект осъществява непосредствен контакт с работните електроди, а във втория случай контактът е чрез искрови канали. Тук за облекчаване на анализа е прието, че елементите R_p и L на схемата от фиг.6.17.7 са линейни. При тази постановка за тока i_P се записва:

$$i_P = \frac{U_0\left(\ell^{\alpha_1 t} - \ell^{\alpha_2 t}\right)}{L(\alpha_1 - \alpha_2)}, \qquad (6.17.14)$$

където U_0 е началното напрежение на разрядния кондензатор C; L – индуктивността на разрядния контур; $\alpha_{1,2} = -\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}$ - корените на характеристичното уравнение на последователна RLC верига ($\delta = R_p/2L$ и $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$).

Ако с τ се означи времето на въздействие на един разряд и се приема, че то е еднакво за отделните разряди, то продължителността t на електроискровото въздействие ще бъде пропорционална на броя на разрядите n, т.е.:

$$t = n\tau. \qquad (6.17.15)$$

Въз основа на това формула (6.17.11) може да бъде записана във вида:

$$S_П = к' U_0^p n^q, \qquad (6.17.16)$$

където к' е коефициент на пропорционалност.

Интензитетът на електрическото поле E в растителната тъкан зависи, както от началното напрежение на разрядния кондензатор U_0, така и от капацитета му C. Въз основа на израз (6.17.14) може да се установи, че зависимостта E = E(C) е значително по-сложна в сравнение със зависимостта E = E(U_0).

За определяне на зависимостта на степента на поразяване $S_П$ на растителната тъкан от основните режимни параметри на електроискровото въздействие U_0, n и C, т.е.: $S_П$ = $S_П$(U_0, n, C), може да бъде използувана теорията на подобието. Съгласно тази теория ако параметърът y зависи от параметрите y_1, y_2, …, y_n , то зависимостта y = y(y_1, y_2, …, y_n) може да бъде представена по следния начин:

$$y = к y_1^{X_1} y_2^{X_2} ... y_n^{X_n}, \qquad (6.17.17)$$

където к е коефициент на пропорционалност.

Въз основа на формула (6.17.17), за зависимостта $S_П = S_П\ (U_0, n, C)$ може да се запише:

$$S_П = к'' U_0^p n^q C^\nu, \qquad (6.17.18)$$

където к'' е коефициент на пропорционалност.

Последната формула показва, че зависимостта $S_П = S_П\ (U_0, n, C)$ се представя като произведение от три степенни функции. И действително, ако в тази формула последователно две от величините се приемат за постоянни, то може да се запише:

$$S_П = к_{U_0} U_0^p \quad \text{при } n \text{ и } C = \text{const}; \qquad (6.17.19)$$

$$S_П = к_n n^q \quad \text{при } U_0 \text{ и } C = \text{const}; \qquad (6.17.20)$$

$$S_П = к_C C^\nu \quad \text{при } U_0 \text{ и } n = \text{const}. \qquad (6.17.21)$$

Въз основа на последните три формули може да се заключи, че теоретичните зависимости на степента поразяване $S_П$ на растителната тъкан от основните режимни параметри U_0, n и C на електроискровото въздействие се представят чрез степенни функции. Познаването на тези зависимости има важно значение във връзка с определянето на режим на работа на електроискровата уредба с високи технологични и енергийни показатели.

Така например, степенният показател p определя чувствителността на растителната тъкан на електроискровото въздействие. И действително, ако за получаване на дадена степен на поразяване $S_П$ е необходима енергия W, то тази енергия може да бъде изразена по следния начин:

$$W = R_P i_P^2 t\,. \qquad (6.17.22)$$

Въз основа на изрази (6.17.12) … (6.17.14) и (6.17.22), от формула (6.17.11) се получава:

$$S_П = к\left(\frac{u_p}{\ell}\right)^p t^q = k\left(\frac{R_P i_P}{\ell}\right)^P t^q = k\frac{R_p}{\ell^P} u_p^{P-2} t^{q-1} W\ . \qquad (6.17.23)$$

От последния израз за енергията W се записва:

$$W = \frac{S_П}{k\dfrac{R_p}{\ell^p} t^{q-1} u_p^{p-2}}\ . \qquad (6.17.24)$$

Ако се анализира формула (6.17.24) може да се установи:

1) ако $p < 2$, то $u_p^{p-2} < 1$ и при $S_П = \text{const}$, при увеличаване на напрежението u_p, енергията W нараства. Следователно в този случай напрежението на обработка U_0 е целесъобразно да бъде по-ниско;

2) ако $p > 2$, то $u_p^{p-2} > 1$ и при $S_П = \text{const}$, при увеличаване на напрежението u_p, енергията W намалява. Следователно в този случай напрежението на обработка U_0 е целесъобразно да бъде по-високо;

3) за частният случай $p = 2$ енергията W не зависи от напрежението u_p, т.е. ефективността на работа на разрядния контур на електроискровата уредба не зависи от напрежението на обработка U_0.

Определянето на степенните показатели p, q и ν на зависимостта (6.17.18) би могло да се извърши въз основа на теорията на размерностите. Използването на

тази теория в случая е затруднено, тъй като степента на поразяване $S_П$ на растителната тъкан и броя на разрядите n са безразмерни величини.

За експериментално определяне на коефициента $к''$и на степенните показатели p, q и ν на формула (6.17.18), може да бъде използуван подход, който се основава на планиран експеримент. Съгласно този подход при логаритмуване на израз (6.17.18) се записва:

$$\ln S_П = \ln к'' + p.\ln U_0 + q.\ln n + \nu.\ln C, \qquad (6.17.25)$$

откъдето след полаганията $\ln S_П = y$; $\ln к'' = к$; $\ln U_0 = X_1$; $\ln n = X_2$ и $\ln C = X_3$ се получава:

$$y = к + p.X_1 + q.X_2 + \nu.X_3. \qquad (6.17.26)$$

От последния израз може да се установи, че коефициентът $к''$ и степенните показатели p, q и ν могат да бъдат определени експериментално чрез пълен факторен експеримент тип 2^3. И действително, линейният регресионен модел, който се получава при такъв експеримент, има следният вид:

$$\hat{y} = b_0 + b_1 \overset{0}{X}_1 + b_2.\overset{0}{X}_2 + b_3 \overset{0}{X}_3, \qquad (6.17.27)$$

т.е. моделът (6.17.27) е аналогичен на израз (6.17.26).

Степенните показатели p, q и ν могат да бъдат определени експериментално и въз основа на съответния израз - (6.17.19) … (6.17.21). Например, за степенния показател p се записва:

$$p = [\ln(S_{П2} / S_{П1})]/[\ln(U_{02} / U_{01})], \qquad (6.17.28)$$

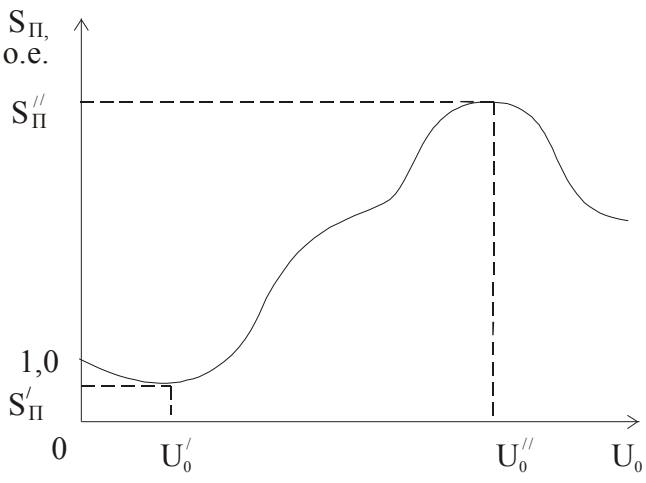
където $S_{П1}$ и $S_{П2}$ са стойностите на степента на поразяване $S_П$ при напрежения на обработка U_{01} и U_{02} .

По аналогичен начин могат да бъдат определени и степенните показатели q и ν, т.е.:

$$q = [\ln(S_{П2} / S_{П1})]/[\ln(n_2 / n_1)]; \qquad (6.17.29)$$

$$\upsilon = [\ln(S_{П2} / S_{П1})]/[\ln(C_2 / C_1)]. \qquad (6.17.30)$$

Тук следва да се отбележи, че разгледаното по-горе се отнася за разрядни процеси без повърхностен разряд. Експериментално е установено, че при разрядни процеси, завършващи с повърхностен разряд, степента на поразяване $S_П$ на растителната тъкан намалява при увеличаване на енергията на разряда $W_e = CU^2/2$, т.е. при увеличаване на напрежението на обработка U_0 и на капацитета C на разрядния кондензатор.



Фиг.6.17.8

Експерименталните зависимости на степента на поразяване на растителната тъкан $S_П$ от основните режимни параметри U_0, n и C на електрискровото въздействие, т.е.: $S_П = S_П(U_0)$, $S_П = S_П(n)$ и $S_П = S_П(U_0)$ могат да бъдат представени с S-образни криви. При това при различни обработки и режимни параметри се снемат различни участъци и от кривите.

Типовата експериментална зависимост $S_П = S_П(U_0)$ е показана на

фиг.6.17.8. От фигурата може да се види, че кривата може да бъде разбита на три участъка.

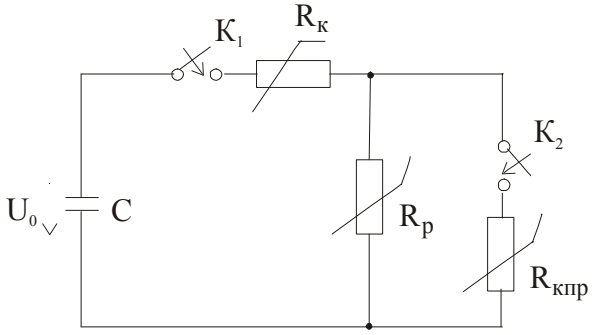
В началния участък на кривата $S_П = S_П(U_0)$ степента на поразяване $S_П$ се изменя сравнително слабо като при увеличаване на напрежението U_0, тя намалява и при $U_0 = U_0'$ получава минимум $S_П = S_П'$, а след това нараства. Този участък се снема при надлъжно електроискрово въздействие върху участъци на растителни обекти със значителна дължина и при малък брой разряди n и малка стойност на капацитета C на разрядния кондензатор, т.е. при относително слабо въздействие.

Режимите на работа на електроискровите уредби в частта на началния участък на разглежданата крива, за която се получават стойности на степента на поразяване $S_П < 1$, могат да бъдат използувани за стимулиране на растежа и развитието на растенията и за повишаване на добивите от тях. За тази цел е необходимо въздействието да се провежда в начални фази от развитието на растенията.

Във втория участък на кривата $S_П = S_П(U_0)$ степента на поразяване $S_П$ се изменя значително, като при увеличаване на напрежението U_0, тя непрекъсното нараства. В този участък се извършват необратими изменения в растителната тъкан и в него се избират режимите на работа на електроискровите уредби, използувани за стимулиране узряването на растения, за унищожавана на плевели, за ускоряване на сушенето на растителната маса.

В третия участък на кривата $S_П = S_П(U_0)$ степента на поразяване $S_П$ на кривата се изменя по-слабо, в сравнение с вторият й участък. При това, при увеличаване на напрежението U_0, отначало тя нараства и при $U_0 = U_0''$, получава максимум $S_П = S_П''$, а след това намалява. Такъв характер на изменение на степента на поразяване $S_П$ се наблюдава при напречно електроискрово въздействие върху растителни обекти, т.е. когато на въздействие се подлагат участъци от обекта с малка дължина.

От вида на кривата $S_П = S_П(U_0)$ (фиг.6.17.8) може да се предположи, че точката на максимума е и особена точка. И действително, при пресмятане на степенния показател p съгласно формула (6.17.28) се установява, че до точката на максимума $p > 0$ и при приближаването й нараства, а след тази точка $p < 0$ и намалява по абсолютна стойност.

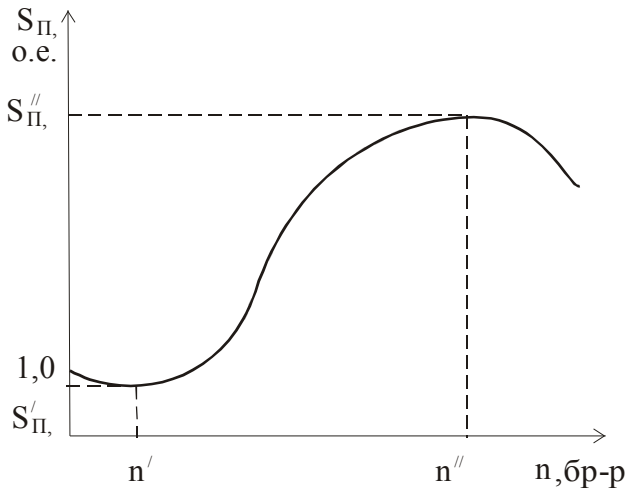


Фиг.6.17.9

Намаляването на степента на поразяване в третия участък на кривата $S_П = S_П(U_0)$ при увеличаване на напрежението U_0 е свързано с възникването на повърхностни разряди. За този случай заместващата електрическа схема на разрядния контур е показана на фиг.6.17.9.

В тази схема ключът K_1 се затваря при възникване на пробив на разрядната междина, а с $R_к$ е означено съпротивлението на искровия канал на разряда. Ключът K_2 се затваря при възникване на разряд по повърхността на растителния обект, а $R_{кпр}$ е означено съпротивлението на искровия канал на този разряд. Тъй като съпротивлението $R_{кпр}$ е значително по-малко от съпротивлението на растителната тъкан R_p , то енергията, която постъпва в тъканта, след възникването на повърхностния разряд рязко намалява. Ето защо режимите на работа на електроискровите уредби в падащата част на третия участък на кривата $S_П = S_П(U_0)$ се характеризират със значително по-големи разходи на енергия, в сравнение с втория й участък и не са намерили практическо приложение.

Типовата експериментална зависимост на поразяване от броя на разрядите n, т.е.: $S_П = S_П(n)$ е показана на фиг.6.17.10. Тя също се представя с S-образна крива, която може да бъде разбита на три аналогични участъка.



Фиг.6.17.10

В началния участък на кривата $S_П = S_П(n)$ степента на поразяване се изменя слабо, като при увеличаване на броя на разрядите n отначало тя намалява и при $n = n'$, получава минимум, а след това нараства. Този участък е аналогичен на съответния участък на кривата $S_П = S_П(U_0)$ от фиг.6.17.8 и също се снема при надлъжно електроискрово въздействие върху участъци на растителни обекти със значителна дължина и при отнисително слабо въздействие.

Режимите на работа на електроискровите уредби в частта от началния участък на кривата $S_П = S_П(n)$, за която се получават стойности на степента на поразяване $S_П < 1$, аналогично, както при кривата от фиг.6.17.8, могат да бъдат използувани за стимулиране на растежа и развитието на растенията и за повишаване на добивите от тях.

Във втория участук на кривата $S_П = S_П(n)$ при увеличаване на броя на разрядите n степента на поразяване, аналогично на втория участък на кривата $S_П = S_П(U_0)$, непрекъснато нараства. В този участък се извършват необратими изменения в растителната тъкан и обикновено в края му се избират режимите на работа на електроискровите уредби за стимулирането на узряването на растения, унищожаване на плевели, ускоряване на сушенето на растителна маса. Тук изискването към тях е да осигурят пълно поразяване на растителната тъкан, т.е. при по-нататъшно увеличаване броя на разрядите n, степента на поразяване $S_П$ да не нараства.

В третия участък на кривата $S_П = S_П(n)$ степента на поразяване $S_П$ се изменя по аналогичен начин, както в третия участък на кривата $S_П = S_П(U_0)$, т.е при увеличаване на броя на разрядите n, отначало тя нараства и при $n = n''$ получава максимум, а след това намалява. Тук точката на максимума, за разлика от тази на максимума на кривата $S_П = S_П(U_0)$, не е особена точка. И действително, при пресмятане на степенния показател q се установява, че до точката на максимума $S_П''$ $q > 0$ и при приближаването ѝ намалява, а след тази точка $q < 0$ и нараства по абсолютна стойност.

Намаляването на степента на поразяване $S_П$ при увеличаване на броя на разрядите n в третия участък на кривата $S_П = S_П(n)$ е свързано с такива процеси в тъканта, като нагряване, изпарение на влага, запалване и изгаряне. За възникването на такива процеси е необходим значителен разход на енергия.

От гледна точка на ефекта, който е необходимо да се реализира от въздействието – стимулиране на узряването на растения, ускоряване на сушенето на растителна маса, унищожаване на плевели, възникването на споменатите по-горе процеси е нежелателно или ненужно. Ето защо режимите на работа на електрискровите уредби в падащата част на третия участък на кривата $S_П = S_П(n)$, както и на кривата $S_П = S_П(U_0)$, не са намерили практическо приложение.

Типовата експериментална зависимост $S_П = S_П(C)$ е аналогична на типовите експериментални зависимости $S_П = S_П(U_0)$ и $S_П = S_П(n)$, т.е. също може да бъде

представена с S-образна крива, която може да бъде разбита на три аналогични участъка.

Началният участък на кривата $S_П = S_П(C)$, както и аналогичните му участъци на кривите $S_П = S_П(U_0)$ и $S_П = S_П(n)$, също може да бъде снет при надлъжно електроискрово въздействие върху участъци на растителни обекти със значителна дължина при сравнително ниско напрежение U_0 и малък брой разряди n. Режимите на работа на електроискровите уредби в частта от началния участък на кривата $S_П = S_П(C)$, при която се получават стойности на степента на поразяване $S_П < 1$, аналогично при кривите $S_П = S_П(U_0)$ и $S_П = S_П(n)$, могат да бъдат използувани за стимулиране растежа и развитието на растенията и за повишаване на добива от тях.

Във втория участък на кривата $S_П = S_П(C)$ при увеличаване на капацитета C, степента на поразяване $S_П$ непрекъснато нараства, т.е. тя се изменя по аналогичен начин, както във втория участък на кривите $S_П = S_П(U_0)$ и $S_П = S_П(n)$. В този участък се получават необратими изменения в растителната тъкани и в него се избират режимите на работа на електроискровите уредби за стимулиране на узряването на растения, ускоряване сушенето на растителна маса, за унищожаване на плевели.

Третият участък на кривата $S_П = S_П(C)$, както и третият на кривата $S_П = S_П(U_0)$, може да бъде снет при напречно електроискрово въздействие върху растителни обекти, т.е. при сравнително малка дължина на обработвания им участък. Характерът на изменение на степента на поразяване $S_П$ в този участък е аналогичен, както в третия участък на кривата $S_П = S_П(n)$.

Намаляването на степента на поразяване $S_П$ при увеличаване на капацитета на разрядния кондензатор C в края на третия участък на кривата $S_П = S_П(C)$, както и при кривата $S_П = S_П(U_0)$, също се свързва с възникването на разрядни процеси, завършващи с повърхностен разряд. Поради значителния разход на енергия при такива разрядни процеси, режимите на работа на електроискровите уредби в тази част на третия участък на кривата $S_П = S_П(C)$ не са намерили практическо приложение.

VII. ТЕОРИЯ НА ЕЛЕКТРОМАГНИТНОТО ПОЛЕ

Встъпителни бележки

В раздела се дават основните уравнения на електромагнитното поле и понятията скаларен и векторен потенциал. Разглеждат се въпроси, свързани с постоянни електрически и магнитни полета в поляризуема среда, а също така основните методи за анализ на потенциални полета. В раздела се отделя внимание на преобразуването на енергията на електромагнитното поле и на променливото електромагнитно поле в диелектрик и проводяща среда, както и на излъчването на електромагнитните вълни.

7.1. Уравнения на Максуел в интегрална и диференциална форма

1. Уравнения на Максуел в интегрална форма

В своя трактат по електричество и магнетизъм (1873 г.) Д.К. Максуел е обобщил резултатите от експерименталните и теоретични изследвания, проведени от редица учени (Кулон, Поасон, Лаплас, Грин, Гаус, Ампер, Фарадей, Ом, Ленц и др.) и е показал, че многобройните и разнообразни електромагнитни явления могат да бъдат описани от гледна точка на теория на полето, при което количествените съотношения и частните закономерности могат да бъдат определени чрез неголям брой уравнения. Тези уравнения на електромагнитното поле в негова чест са наречени уравнения на Максуел.

Първо уравнение на Максуел

Това е всъщност известният закон за пълния ток, чийто математичен запис е:

$$\oint_{(l)} \vec{H}\, d\vec{l} = \int_{(s)} \vec{\delta}_{п}\, d\vec{S}. \qquad (7.1.1)$$

Първото уравнение на Максуел гласи следното: Циркулацията на вектора на интензитета на магнитното поле $\vec{H}$ по затворен контур l е равна на потока на вектора на плътността на пълния ток $\vec{\delta}_{п}$ през повърхността S, ограничена от контура l. Плътността на пълния ток $\vec{\delta}_{п}$ има две съставки: плътност на тока от пренасяне на електрически заряди $\vec{\delta}_{пр}$ и плътност на тока на разместването $\vec{\delta}_{разм}$ т.е.: $\vec{\delta}_{п} = \vec{\delta}_{пр} + \vec{\delta}_{разм}$. От своя страна всяка от тях съдържа две съставки. Така например, за съставката $\vec{\delta}_{пр}$ се записва:

$$\vec{\delta}_{пр} = \vec{\delta}_{пров} + \vec{\delta}_{прен} = \gamma \vec{E} + \rho \vec{v}, \qquad (7.1.2)$$

където $\vec{\delta}_{пров}$ е плътността на тока на проводимостта;

$\vec{\delta}_{прен}$ - плътността на тока на пренасянето;

γ - специфичната проводимост на проводящата среда;

$\vec{E}$ - интензитетът на електрическото поле в тази среда;

ρ - обемната плътност на зарядите, движещи се в свободното пространство;

$\vec{v}$ - скоростта на движение на тези заряди.

За съставката $\vec{\delta}_{разм}$ съответно се записва:

$$\vec{\delta}_{разм} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \vec{\delta}_{0} + \vec{\delta}' = \frac{\partial \vec{D}_{0}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{P}}{\partial t}, \qquad (7.1.3)$$

където $\vec{D}$ е електрическата индукция;

$\vec{\delta}_0$ - плътността на тока на разместването в пустотата;

$\vec{\delta}'$ - плътността на тока на поляризация в диелектричната среда;

$\vec{D}_0$ - електрическата индукция в пустотата;

$\vec{P}$ - степента на поляризация (поляризоваността) на диелектричната среда.

Второ уравнение на Максуел

Това е добре известният закон за електромагнитната индукция, чийто математичен запис е:

$$e = \oint_{(l)} \vec{E}\, d\vec{l} = -\frac{\partial}{\partial t} \int_{(S)} \vec{B}\, d\vec{S}. \qquad (7.1.4)$$

Второто уравнение на Максуел гласи следното: Индуктираното ЕДН e в затворен контур l от изменящ се магнитен поток е равно на скоростта на намаляване на потока през повърхността S, ограничена от контура или още циркулацията на вектора на интензитета на електрическото поле $\vec{E}$ по затворен контур l е равна на скоростта на намаляване на потока на вектора на магнитната индукция $\vec{B}$ през повърхността S, ограничена от контура.

Трето уравнение на Максуел

Това уравнение е известно като теорема на Гаус, чийто математичен запис е:

$$\oint_{(S)} \vec{D}\, d\vec{S} = q = \int_{(V)} \rho dv. \qquad (7.1.5)$$

Третото уравнение на Максуел гласи следното: Потокът на вектора на електрическата индукция $\vec{D}$, излизащ през затворена повърхност S, е равен на заряда q, затворен в тази повърхност. Зарядът q може да бъде изразен чрез обемен интеграл от обемната му плътност ρ като интегрирането се извършва по обема V, ограничен от разглежданата повърхност S.

Теоремата на Гаус намира широко приложение при пресмятането на електрически полета. Максуел е направил обобщение на тази теорема и е показал, че тя е приложима и при променливи във времето електрически полета.

Четвърто уравнение на Максуел

Това уравнение е аналогично на третото уравнение на Максуел и е известно като принцип за непрекъснатост на потока на магнитната индукция. Математичният му запис е следният:

$$\oint_{(S)} \vec{B}\, d\vec{S} = 0. \qquad (7.1.6)$$

Четвъртото уравнение на Максуел гласи следното: Потокът на вектора на магнитната индукция $\vec{B}$ през коя да е затворена повърхност S е равен на нула, т.е. линиите на магнитната индукция са непрекъснати, те нямат начало и край, т.е. те са затворени линии.

Петото, шестото и седмото уравнения на Максуел дават връзките между отделните векторни величини, влизащи в първите четири уравнения. Тези връзки са следните:

$$\vec{\delta}_{\text{пров}} = \gamma \vec{E}\ ; \qquad (7.1.7)$$

$$\vec{D} = \varepsilon_o \varepsilon_r \vec{E} \ ; \qquad (7.1.8)$$

$$\vec{B} = \mu_0 \mu_r \vec{M} \ . \qquad (7.1.9)$$

Уравнение (7.1.7) е известно като закон на Ом в диференциална форма. Коефициентите γ, ε, μ са параметри, характеризиращи средата. Те се наричат съответно:

γ - специфична проводимост;

ε_r - относителна диелектрична проницаемост;

μ_r - относителна магнитна проницаемост.

2. Диференциални операции на векторния анализ

Разгледаните по-горе уравнения на Максуел (първо, второ, трето и четвърто) са в интегрална форма. Те се отнасят за интегрални величини като циркулация и поток на векторна величина, ток, ЕДН, заряд. В теорията на електромагнитното поле по-голямо значение имат уравненията, свързващи основните векторни величини на полето за точка, т.е. в диференциална форма.

Във връзка с представянето на уравненията на Максуел в диференциална форма по-долу се разглеждат диференциалните операции на векторния анализ: градиент, дивергенция, ротация и лапласиан.

Градиент

Разглежда се непрекъсната, диференцируема скаларна функция φ на пространствените координати x, y, z т.е.: $\varphi = \varphi(x, y, z)$. Тази функция при преместване $d\vec{l}$,

$$d\vec{l} = dx.\vec{x^0} + dy.\vec{y^0} + dz.\vec{z^0} \ , \qquad (7.1.10)$$

(където: $\vec{x^0}, \vec{y^0}, \vec{z^0}$ са единичните вектори на осите Ox, Oy, Oz) получава нарастване $d\varphi$, което съгласно правилата на диференциалното смятане се дава с израза:

$$d\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy + \frac{\partial \varphi}{\partial z} dz \ . \qquad (7.1.11)$$

Последният израз може да бъде разглеждан като скаларно произведение на вектора $d\vec{l}$ с компоненти dx, dy, dz с вектора, чиито компоненти са частните производни $\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \frac{\partial \varphi}{\partial z}$. Вторият вектор се нарича градиент, т.е.:

$$\mathrm{grad}\,\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \vec{x^0} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \vec{y^0} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \vec{z^0} \ . \qquad (7.1.12)$$

При равни премествания dl диференциал $d\varphi$ ще има най-голяма стойност, когато посоките на векторите $d\vec{l}$ и $\mathrm{grad}\,\varphi$ съвпадат. Въз основа на това на градиента може да бъде дадено следното определение: Градиентът на скаларна функция φ е вектор, чиито компоненти са равни на скоростта на нарастване на функцията φ по посока на i-тата координата, като посоката на градиента съвпада с посоката на най-бързото нарастване на функцията φ. Това определение позволява градиентът да бъде изразен в коя да е координатна система.

При изразяване на градиента в декартови координати е удобно да бъде използуван операторът на Хамилтон ∇, т.е.:

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \vec{x^0} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{y^0} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{z^0} \ . \qquad (7.1.13)$$

Чрез вектора ∇ за градиента се записва:

$$\operatorname{grad}\varphi = \nabla\varphi . \qquad (7.1.14)$$

Градиентът може да бъде представен и в криволинейни ортогонални координати $u,\ v,\ w$. В този случай за градиента се записва:

$$\operatorname{grad}\varphi = \frac{1}{L_1}\frac{\partial\varphi}{\partial u}\vec{u^0} + \frac{1}{L_2}\frac{\partial\varphi}{\partial v}\vec{v^0} + \frac{1}{L_3}\frac{\partial\varphi}{\partial w}\vec{w^0} , \qquad (7.1.15)$$

където $\vec{u^0}, \vec{v^0}, \vec{w^0}$ са единичните вектори, а $L_1,\ L_2,\ L_3$ - коефициентите на Ламе.

Коефициентите $L_1,\ L_2,\ L_3$ се определят от формулите:

$$L_1 = \left[\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}};$$

$$L_2 = \left[\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}; \qquad (7.1.16)$$

$$L_3 = \left[\left(\frac{\partial x}{\partial w}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial w}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial w}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}.$$

За връзките между декартовите координати $x,\ y,\ z$ и цилиндричните координати $r,\ \alpha,\ z$, които се изменят съответно в диапазоните $r = 0 \ldots \infty$; $\alpha = 0 \ldots 2\pi$ и $z = -\infty \ldots \infty$, се записва:

$$x = r.\cos\alpha ;\quad y = r.\sin\alpha \text{ и } z = z . \qquad (7.1.17)$$

За коефициентите на Ламе се получава:

$$L_1 = 1;\ L_2 = r \text{ и } L_3 = 1. \qquad (7.1.18)$$

За връзките между декартовите координати $x,\ y$ и z и сферичните координати $R,\ \alpha$ и θ, които се изменят съответно в диапазоните $R = 0 \ldots \infty$; $\alpha = 0 \ldots 2\pi$ и $\theta = 0 \ldots \pi$, се записва:

$$x = R.\sin\theta.\cos\alpha ;\quad y = R\sin\theta.\sin\alpha \text{ и } z = R.\cos\theta . \qquad (7.1.19)$$

За коефициентите на Ламе се получава;

$$L_1 = 1;\ L_2 = R \text{ и } L_3 = R.\sin\theta . \qquad (7.1.20)$$

Дивергенция

Дивергенцията (разпръскването) на кой да е вектор $\vec{F}$ се дефинира като граница на отношението от потока на вектора, излизащ от затворената повърхност S, към обема V, ограничен от тази повърхност, когато последната се свива около разглежданата точка. При това разстоянието от тази точка до коя да е точка от повърхността S клони към нула, откъдето следва, че и обемът V ще клони към нула. Казаното математически се изразява с формулата:

$$\operatorname{div}\vec{F} = \lim_{V\to 0}\frac{\oint_{(S)}\vec{F}\,d\vec{S}}{V} .$$

(7.1.21)

Даденото по-горе определение на дивергенция не зависи от координатната система. То позволява дивергенцията да бъде изразена в коя да е координатна система.

В декартови координати x, y и z дивергенцията се записва по следния начин:

$$\operatorname{div}\vec{F} = \nabla.\vec{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}, \qquad (7.1.22)$$

където F_x, F_y и F_z са компонентите на вектора $\vec{F}$ по осите Ox, Oy и Oz.

В криволинейни ортогонални координати u, v и w дивергенцията се дава с формулата:

$$\operatorname{div}\vec{F} = \frac{1}{L_1 L_2 L_3}\left[\frac{\partial}{\partial u}\left(L_2 L_3 F_u\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(L_1 L_3 F_v\right) + \frac{\partial}{\partial w}\left(L_1 L_2 F_w\right)\right], \qquad (7.1.23)$$

където F_u, F_v и F_w са съответните компоненти на вектор $\vec{F}$, а L_1, L_2 и L_3 са коефициентите на Ламе.

Ротация

Ротацията (роторът или вихърът) на кой да е вектор $\vec{F}$ представлява вектор, чиято нормална съставка към повърхност S се определя като граница на отношението от циркулацията на вектора по затворения контур l, ограничаващ повърхността S, към тази повърхност като контурът се свива към разглежданата точка, в която се определя съответната съставка на ротацията. При това разстоянието от тази точка до коя да е точка от контура клони към нула, откъдето следва, че към нула ще клони и повърхността S. Казаното математически се изразява с формулата;

$$\operatorname{rot}_n \vec{F} = \lim_{S\to 0} \frac{\oint_{(l)} \vec{F}\, d\vec{l}}{S}. \qquad (7.1.24)$$

Даденото по-горе определение за ротация, както и определението за дивергенция, не зависи от координатната система, което позволява ротацията да бъде изразена в коя да е координатна система.

В декартови координати ротацията се представя по следния начин:

$$\operatorname{rot}\vec{F} = \nabla \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{0}_x & \vec{0}_y & \vec{0}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}, \qquad (7.1.25)$$

където F_x, F_y и F_z са компонентите на вектор $\vec{F}$ по осите Ox, Oy и Oz.

В криволинейни ортогонални координати u, v и w за ротацията се записва:

$$\operatorname{rot}\vec{F} = \frac{1}{L_1 L_2 L_3}\begin{vmatrix} L_1\vec{u}^0 & L_2\vec{v}^0 & L_3\vec{w}^0 \\ \frac{\partial}{\partial u} & \frac{\partial}{\partial v} & \frac{\partial}{\partial w} \\ L_1 F_u & L_2 F_v & L_3 F_w \end{vmatrix},$$

където F_u, F_v и F_w са съответните компоненти на вектор $\vec{F}$, а L_1, L_2 и L_3 са коефициентите на Ламе.

Лапласиан

Лапласианът е диференциален оператор, който в декартови координати x, y и z се представят по следния начин:

$$\Delta = \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}. \qquad (7.1.27)$$

В криволинейни ортогонални координати u, υ и w за лапласиана се записва:

$$\Delta = \nabla^2 = \frac{1}{L_1 L_2 L_3}\left[\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{L_2 L_3}{L_1}\cdot\frac{\partial}{\partial u}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{L_1 L_3}{L_2}\cdot\frac{\partial}{\partial v}\right) + \frac{\partial}{\partial w}\left(\frac{L_1 L_2}{L_3}\cdot\frac{\partial}{\partial w}\right)\right]. \qquad (7.1.28)$$

3. Уравнения на Максуел в диференциална форма

Разгледаните по-горе диференциални операции на векторния анализ дават възможност за представяне на уравненията на Максуел в диференциална форма.

Първо уравнение на Максуел

За представяне на първото уравнение на Максуел в диференциална форма се използува диференциалната операция ротация. За целта се записва:

$$\mathrm{rot}_n \vec{H} = \lim_{S\to 0}\frac{\oint\limits_{(l)} \vec{H}\,d\vec{l}}{S} = \lim_{S\to 0}\frac{\int\limits_{(S)} \vec{\delta}_п\,d\vec{S}}{S} \quad . \qquad (7.1.29)$$

Прилага се теоремата за средните стойности:

$$\int\limits_{(S)} \vec{\delta}_п\,d\vec{S} = \bar{\delta}_{пn}\int\limits_{(S)} dS = \bar{\delta}_{пn} S. \qquad (7.1.30)$$

В горните две формули с индекса n е означена нормалната съставка към повърхността S, а чертата над величината $\bar{\delta}_{пn}$ - средната й стойност, равна на стойността й поне в една точка от повърхността S.

От формули (7.1.29) и (7.1.30) следва, че нормалната съставка на ротора на вектора интензитет на магнитното поле $\vec{H}$ е равна на нормалната съставка на вектора плътност на пълния ток $\vec{\delta}_п$. Това се отнася за кои да е нормални съставки на двата вектора, което означава, че могат да бъдат приравнени и самите вектори, т.е:

$$\mathrm{rot}\,\vec{H} = \vec{\delta}_п = \vec{\delta}_{пр} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}. \qquad (7.1.31)$$

До горния диференциален запис на първото уравнение на Максуел може да се достигне, ако се използва теоремата на Стокс, чиято математическа формулировка е следната:

$$\oint\limits_{(l)} \vec{F}\,d\vec{l} = \int\limits_{(S)} \mathrm{rot}\,\vec{F}\,d\vec{S} \qquad (7.1.32)$$

Ако формула (7.1.32) се приложи към първото уравнение на Максуел в интегрална форма (вж. Формула (7.1.1)), се записва:

$$\oint\limits_{(l)} \vec{H}\,d\vec{l} = \int\limits_{(S)} \mathrm{rot}\,\vec{H}\,d\vec{S} = \int\limits_{(s)} \vec{\delta}_п\,d\vec{S}, \qquad (7.1.33)$$

откъдето се получава уравнение (7.1.31).

В случай на проводяща среда, плътността на тока, от движение на електрически заряди $\vec{\delta}_{пр}$ се представя чрез интензитета на електрическото поле $\vec{E}$ и

специфичната проводимост на средата γ (закон на Ом в диференциална форма) и първото уравнение на Максуел добива вида:

$$\mathrm{rot}\,\vec{H} = \gamma\vec{E} + \frac{\partial\vec{D}}{\partial t}. \qquad (7.1.34)$$

Ако средата има постоянна диелектрична проницаемост ε, независеща от времето и интензитета на електрическото поле E, се записва:

$$\mathrm{rot}\,\vec{H} = (\gamma + \varepsilon_0\varepsilon_r\frac{\partial}{\partial t}\vec{E}). \qquad (7.1.35)$$

В случай, че разглежданите вектори се изменят във времето по синусоидален закон, уравнения (7.1.34) и (7.1.35) могат да бъдат записани в комплексен вид:

$$\mathrm{rot}\,\dot{\vec{H}} = \gamma\dot{\vec{E}} + j\omega\dot{\vec{D}}; \qquad (7.1.36)$$

$$\mathrm{rot}\,\dot{\vec{H}} = (\gamma + j\omega\varepsilon_o\varepsilon_r)\dot{\vec{E}}. \qquad (7.1.37)$$

Второ уравнение на Максуел

За представяне на второто уравнение на Максуел в диференциална форма също се използува диференциалната операция ротация, както и теоремата за средните стойности. За случая се записва:

$$\mathrm{rot}_n\,\vec{E} = \lim_{S\to 0}\frac{\oint_{(l)}\vec{E}\,d\vec{l}}{S} = \lim_{S\to 0}\frac{-\frac{\partial}{\partial t}\int_{(S)}\vec{B}\,d\vec{S}}{S} = \lim_{S\to 0}\frac{-\frac{\partial}{\partial t}\overline{B}_n\int_{(S)}dS}{S} = -\frac{\partial\overline{B}_n}{\partial t}, \qquad (7.1.38)$$

където $\overline{B}_n$ е средната стойност на нормалната съставка на магнитната индукция за повърхността S, която е равна на стойността на индукцията поне в една точка от повърхността S.

Тъй като равенството (7.1.38) е валидно за кои да е нормални съставки на двата вектора, то е валидно и за самите вектори, т.е.:

$$\mathrm{rot}\,\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}. \qquad (7.1.39)$$

Ако средата има постоянна магнитна проницаемост, то уравнение (7.1.39) добива вида:

$$\mathrm{rot}\,\vec{E} = -\mu_0\mu_r\frac{\partial\vec{H}}{\partial t}. \qquad (7.1.40)$$

В случай, че разглежданите вектори се изменят във времето по синусоидален закон, уравнения (7.1.39) и (7.1.40) могат да бъдат записани в комплексен вид:

$$\mathrm{rot}\,\dot{\vec{E}} = -j\omega\dot{\vec{B}}; \qquad (7.1.41)$$

$$\mathrm{rot}\,\dot{\vec{E}} = -j\omega\mu_0\mu_r\dot{\vec{H}}. \qquad (7.1.42)$$

Трето уравнение на Максуел

За представяне на третото уравнение на Максуел в диференциална форма се използува диференциалната операция дивергенция, а също така и теоремата за средните стойности. За целта се записва:

$$\mathrm{div}\,\vec{D} = \lim_{V\to 0}\frac{\oint_{(S)}\vec{D}\,d\vec{S}}{V} = \lim_{V\to 0}\frac{\int_{(V)}\rho dV}{V} = \lim_{V\to 0}\frac{\overline{\rho}\int_{(V)}dV}{V} = \rho, \qquad (7.1.43)$$

където $\overline{\rho}$ е средната стойност на плътността на зарядите в обема $V\to 0$.

До горният резултат може да се достигне ако се използува теоремата на Гаус, чиято математическа формулировка е следната:

$$\oint_{(S)} \vec{F}\, d\vec{S} = \int_{(V)} \operatorname{div} \vec{F}\, dV . \qquad (7.1.44)$$

Ако формула (7.1.44) се приложи към третото уравнение на Максуел в интегрална форма (вж. Формула (7.1.5)), се записва:

$$\oint_{(s)} \vec{D}\, d\vec{S} = \int_{(V)} \operatorname{div} \vec{D}\, dV = \int_{(V)} \rho dV , \qquad (7.1.45)$$

откъдето се получава уравнение (7.1.43).

Полученото диференциално уравнение (7.1.43) показва, че дивергенцията на вектора електрическа индукция $\vec{D}$, т.е. плътността на източниците на този вектор, е равна на плътността на електрическия заряд ρ.

В случай, че диелектричната проницаемост на средата ε_r е постоянна като не зависи също и от координатите, се записва:

$$\operatorname{div} \vec{D} = \operatorname{div}\left(\varepsilon_0 \varepsilon_r \vec{E} \right) = \rho . \qquad (7.1.46)$$

Оттук се получава:

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0 \varepsilon_r} . \qquad (7.1.47)$$

Уравнение на Поасон-Лаплас

В случаите, когато електрическото поле е потенциално, то интензитетът му $\vec{E}$ може да бъде представен чрез градиента на потенциала φ, т.е.:

$$\vec{E} = -\operatorname{grad} \varphi . \qquad (7.1.48)$$

Ако този израз се замести в уравнение (7.1.47), се получава:

$$-\operatorname{div}\operatorname{grad}\varphi = -\nabla^2 \varphi = -\Delta\varphi = \frac{\rho}{\varepsilon_0 \varepsilon_r} . \qquad (7.1.49)$$

Последната формула, когато плътността на зарядите $\rho \neq 0$ се нарича уравнение на Поасон, а когато тази плътност $\rho = 0$ - уравнение на Лаплас. Тук е използувана диференциалната операция $\operatorname{div}\operatorname{grad}$ от втори ред, приложена към скаларната функция φ.

$$\operatorname{div}\operatorname{grad} \equiv \nabla^2 \equiv \Delta . \qquad (7.1.50)$$

Символът ∇^2 се нарича “набла квадрат”, а символът Δ -лапласиан.

Четвърто уравнение на Максуел

Ако диференциалната операция диверенция се приложи към четвъртото уравнение на Максуел в интегрална форма (вж. Формула (7.1.6)), се получава равенството:

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0 , \qquad (7.1.51),$$

което показва, че полето на вектора магнитна индукция $\vec{B}$ няма източници. Ако се използува формулировката на Фарадей, би могло да се каже, че линиите на магнитната индукция $\vec{B}$ са винаги затворени линии, т.е. те нямат нито начало нито край. По аналогия с дивергенцията на електрическата индукция $\vec{D}$ би трябвало дясната част на уравнение (7.1.51) да бъде равна на плътността на магнитните

заряди. В действителност магнитни заряди не съществуват. Ето защо дясната част на уравнение (7.1.51) е равна на нула.

Връзки между векторите

В първото и второто уравнение на Максуел участвуват пет вектора, поради което са необходими още три уравнения, които да дават връзките между тези вектори.

Като едно от тези уравнения може да бъде посочен законът на Ом в диференциална форма (вж. Формула (7.1.7)). Другите две уравнения са посочените вече уравнения (7.1.8) и (7.1.9). Уравнения (7.1.8) и (7.1.9) имат обаче ограничена приложимост. Ето защо тук се дават две по-общи уравнения, които следва да се смятат за определения на векторите интензитет на магнитното поле $\vec{H}$ и електрическа индукция $\vec{D}$, т.е.:

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M}; \qquad (7.1.52)$$

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}. \qquad (7.1.53)$$

В тези два израза влизат два нови вектора: намагнитеност $\vec{M}$ и поляризованост $\vec{P}$. Тяхното определение, както и обосноваването на изрази (7.1.52) и (7.1.53), ще бъде разгледано в по-нататъшното изложение. Тук може да се отбележи това, че намагнитеността и поляризоваността могат да бъдат обусловени от физически причини, които не са свързани със стойностите на индукцията или интензитета на полето. Така или иначе стойностите на намагнитеността $\vec{M}$ и поляризоваността $\vec{P}$ трябва да бъдат зададени допълнително, понякога с уравнения, които са допълнителни към уравненията на Максуел. В случаите, когато векторите $\vec{M}$ и $\vec{P}$ се определят чрез векторите на полето $\vec{H}$ и $\vec{E}$, то съответната зависимост $\vec{M} = \vec{M}\left(\vec{H}\right)$ или $\vec{P} = \vec{P}\left(\vec{E}\right)$ трябва да бъде зададена като допълнение към уравнения (7.1.52) и (7.1.53).

7.2. Ток на разместване в пустотата

Разглежда се електромагнитното поле при отсъствие на поляризуеми среди, т.е. когато поляризоваността $\vec{P} = \vec{0}$ и намагнитеността $\vec{M} = \vec{0}$, и диелектричната проницаемост $\varepsilon_r = 1$, и магнитната проницаемост $\mu_r = 1$. Тези условия са налице в пустотата, и в първо приближение във въздуха.

В този случай първото уравнение на Максуел може да бъде записано по следния начин:

$$\operatorname{rot}\vec{B} = \mu_0 \vec{\delta}_{\text{пр}} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}. \qquad (7.2.1)$$

В дясната част на уравнение (7.2.1) освен векторът плътност на тока $\vec{\delta}_{\text{пр}}$, който се обуславя от движещите се свободни заряди, участвува и векторът $\varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$. Това означава, че изменението на електрическото поле се съпровожда от такова магнитно поле, както и движещите се свободни заряди. До този интересен резултат непосредствено води анализът на първото уравнение на Максуел.

При постоянно електрическо поле, т.е. когато $\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \vec{0}$, уравнение (7.2.1) добива вида:

$$\mathrm{rot}\,\vec{B} = \mu_0 \vec{\delta}_{пр}, \qquad (7.2.2),$$

или в интегрална форма:

$$\oint_{(l)} \vec{B}\,d\vec{l} = \mu_0 \int_{(S)} \vec{\delta}_{пр}\,d\vec{S}. \qquad (7.2.3)$$

При променливо електрическо поле тези две уравнения губят смисъл. Действително, токът $i_{пр}$, излизащ през коя да е затворена повърхност S, е равен на скоростта на намаляване на електрическия заряд q в обема V, ограничен от тази повърхност, т.е.:

$$i = \oint_{(s)} \vec{\delta}_{пр}\,d\vec{S} = -\frac{\partial q}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t}\int_{(V)} \rho dV. \qquad (7.2.4)$$

Това уравнение представлява законът за съхранение на електрическите заряди в интегрална форма.

Ако се използува теоремата на Гаус:

$$q = \oint_{(s)} \varepsilon_0 \vec{E}\,d\vec{S}, \qquad (7.2.5)$$

то уравнение (7.2.4) може да се запише така:

$$i_{пр} = \vec{\delta}_{пр} = -\frac{\partial}{\partial t}\oint_{(S)} \varepsilon_0 \vec{E}\,d\vec{S} = -\oint_{(S)} \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\,d\vec{S}, \qquad (7.2.6)$$

или в диференциална форма:

$$\mathrm{div}\,\vec{\delta}_{пр} = -\mathrm{div}\left(\varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right). \qquad (7.2.7)$$

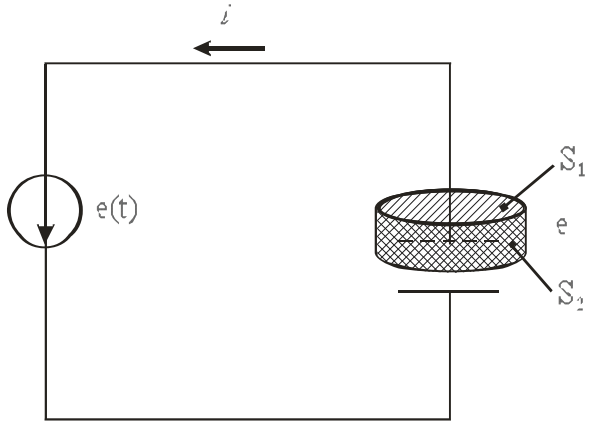
Уравнение (7.2.6) означава, че потокът на вектора плътност на тока $\vec{\delta}_{пр}$ през затворена повърхност S може да не бъде равен на нула при наличието на променливо електрическо поле, т.е. когато $\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \neq \vec{0}$.

В такъв случай самото понятие поток на вектора $\vec{\delta}_{пр}$ през повърхност, ограничена от контур l (дясната част на равенство (7.2.3)), губи смисъл, защото понятието поток през повърхност, ограничена от контур, е определено само тогава, когато през коя да е повърхност, ограничена от контура, преминава еднакъв поток. Последното условие е равносилно на това, че потокът на разглеждания вектор $\vec{\delta}_{пр}$ през затворена повърхност е равен на нула. И така при наличието на променливо електрическо поле, т.е., когато $\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \neq \vec{0}$, то уравнение (7.2.3) губи смисъл.

За изясняване на изложеното по-горе уравнение(7.2.3) ще бъде приложено за електрическата верига, чиято схема е показана на фиг.7.2.1. Източникът на ЕДН $e(t)$ захранва кондензатор с диелектрик пустотата. Във веригата ще преминава ток, когато напрежението върху кондензатора u_c се изменя във времето, т.е. $u_c = u_c(t)$.

Този ток ще бъде постоянен, ако напрежението $u_c(t)$ нараства по линеен закон, т.е:

Избира се контур l, обхващащ единия от проводниците. За такъв контур циркулацията $\oint_{(l)} \vec{B}\,d\vec{l}$ се определя еднозначно. Избира се и повърхност S_1, ограничена от контура l, така, че да пресича проводника с ток i. В този случай дясната част на уравнение (7.2.3) е равна на $\mu_0 i$. Но повърхността, ограничена от контура l, може така да бъде деформирана, че да не пресича проводника с ток i. За тази цел е достатъчно тя да преминава между електродите на кондензатора - повърхност S_2 на фиг.7.2.1. За такава повърхност дясната част на уравнение (7.2.3) е равна на нула. Оттук възниква необходимостта в уравнение (7.2.2) да се въведе допълнителен член.



фиг.7.2.1

Действително, ако интегралите в равенство(7.2.4) се разделят на обема V, то при граничния преход се записва:

$$\lim_{V\to 0}\frac{\oint_{(S)}\vec{\delta}_{пр}\,d\vec{S}}{V} = \lim_{V\to 0}\frac{-\int_{(V)}\frac{\partial\rho}{\partial t}\cdot dV}{V}. \qquad (7.2.8)$$

След прилагане на теоремата за средните стойности по отношение на дясната част на последното равенство се достига до закона за запазване на електрическите заряди в диференциална форма:

$$\operatorname{div}\vec{\delta}_{пр} = -\frac{\partial\rho}{\partial t}. \qquad (7.2.9)$$

Този израз е несъвместим с уравнение (7.2.2), тъй като дивергенцията на коя да е ротация е равна на нула. Прилагайки равенство (7.2.9) към уравнение (7.2.2) се получава:

$$\operatorname{div}\operatorname{rot}\vec{B} \equiv 0 \neq \mu_o \operatorname{div}\vec{\delta}_{пр} = -\mu_0\frac{\partial\rho}{\partial t}. \qquad (7.2.10)$$

Следователно, за да бъде в сила уравнение (7.2.2) и в случая на променливо електрическо поле, е необходимо в дясната му част да се добави такъв вектор $\vec{F}$, който да превръща в нула дивергенцията й:

$$\frac{1}{\mu_0}\operatorname{rot}\vec{B} = \vec{\delta}_{пр} + \vec{F} \text{ при } \operatorname{div}(\vec{\delta}_{пр} + \vec{F}) = 0. \qquad (7.2.11)$$

Този вектор $\vec{F}$ може да бъде определен от равенство (7.2.7), въз основа на което се записва:

$$\operatorname{div}(\vec{\delta}_{пр} + \varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}) = 0. \qquad (7.2.12)$$

И така търсеният допълнителен вектор $\vec{F}$ е :

$$\vec{F} = \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}. \qquad (7.2.13)$$

Този вектор се нарича плътност на тока на разместването в пустотата, а сумата :

$$\vec{\delta}_{п} = \vec{\delta}_{пр} + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}. \qquad (7.2.14)$$

носи названието плътност на пълния ток.

Дивергенцията на вектора на плътността на пълния ток $\vec{\delta}_{п}$ е тъждествено равна на нула, т.е.:

$$\operatorname{div} \vec{\delta}_{п} \equiv 0. \qquad (7.2.15)$$

Съответно на нула е равен и потокът на вектора $\vec{\delta}_{п}$ през коя да е затворена повърхност, т.е.:

$$\oint_{(S)} \vec{\delta}_{п} \, d\vec{S} \equiv 0. \qquad (7.2.16)$$

Въз основа на разгледаното по-горе може да се заключи, че чрез въвеждането в уравнения (7.2.2) и (7.2.3) на плътността на пълния ток $\vec{\delta}_{п}$ вместо плътността на тока от пренасянето на електрическите заряди $\vec{\delta}_{пр}$ ги прави еднозначни и не съдържащи противоречия при каквито и да е условия.

И така за разглеждания пример от фиг.7.2.1, през повърхността S_2 преминава токът на разместването в пустотата, който е равен на тока на пренасянето на електрическите заряди i, преминаващ през повърхността S_1 .

Въвеждането на пълния ток в първото уравнение на Максуел:

$$\frac{1}{\mu_0} \operatorname{rot} \vec{B} = \vec{\delta}_{пр} + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}, \qquad (7.2.17)$$

или в интегралната му форма:

$$\frac{1}{\mu_0} \oint_{(l)} \vec{B} \, d\vec{l} = \int_{(S)} (\vec{\delta}_{пр} + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}) d\vec{S} \qquad (7.2.18)$$

е едно от най-важните положения в електродинамиката. Именно оттук произтичат някои съвършено нови явления, които по-рано не само не е могло да бъдат обяснени, но даже да бъде създадена представа за тях. Валидността на тези уравнения изисква експериментално потвърждение, което се разглежда в по-нататъшното изложение.

7.3. Следствия от уравненията на Максуел

В 7.2. бе разгледано първото уравнение на Максуел за пустотата:

$$\frac{1}{\mu_0} \operatorname{rot} \vec{B} = \vec{\delta}_{пр} + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \qquad (7.3.1)$$

или в интегралната му форма:

$$\frac{1}{\mu_0} \oint_{(l)} \vec{B} \, d\vec{l} = \int_{(S)} (\vec{\delta}_{пр} + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}) d\vec{S}. \qquad (7.3.2)$$

От тези две уравнения следва, че променливото електрическо поле се съпровожда от магнитно поле така, както и електрическият ток. Казано по друг

начин, при отсъствие на електрически ток, т.е. на движещи се електрически заряди, трябва да съществува магнитно поле, чиято ротация е равна на скоростта на изменение на електрическото поле.

Тук следва да се зададе въпросът дали в действителност предположението за такава връзка между магнитното и електрическото полета съществува? Отговорът е утвърдителен. За това може експериментално да се съди от една страна чрез измерване на магнитното поле, обусловено от изменение на електрическото поле, а от друга - чрез наблюдаване на електромагнитни явления, които трябва да съществуват като следствие от предположението за магнитно поле на токовете на разместване.

Хипотезата на Максуел, че е възможно съществуването на магнитно поле без токове и магнитни тела, а също на електрическо поле без електрически заряди съгласно уравненията:

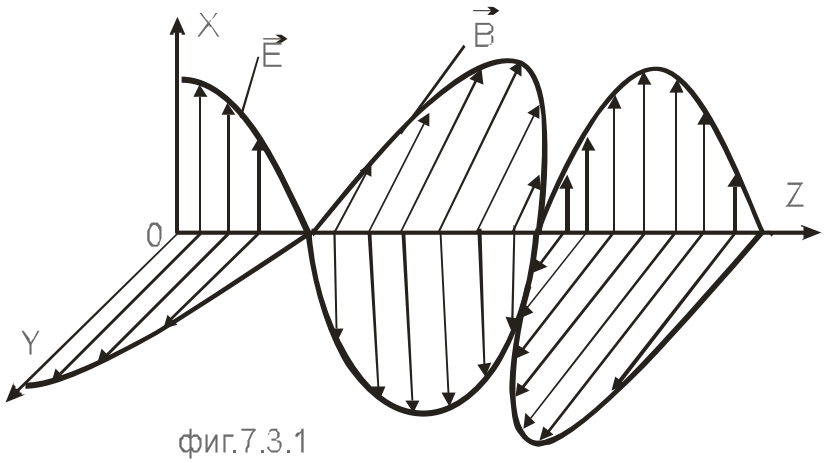
$$\operatorname{rot}\vec{B} = \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} \quad \text{и} \quad \operatorname{rot}\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}, \tag{7.3.3}$$

или в комплексна форма:

$$\operatorname{rot}\dot{\vec{B}} = j\omega\mu_0\varepsilon_0\dot{\vec{E}} \quad \text{и} \quad \operatorname{rot}\dot{\vec{E}} = -j\omega\dot{\vec{B}} \tag{7.3.4}$$

е била посрещната с неодобрение от някои негови съвременници. На тях им се е струвало, че той свежда реалните физически явления до математически абстракции, съгласно които електрически явления могат да съществуват без електричество (електрически заряди)и магнитни явления без магнетизъм (магнитни тела и токове).

Според съвременните схващания електромагнитното поле се разглежда като физическа реалност и се смята, че образуването на магнитно поле при изменение на електрическото поле и образуването на електрическо поле при изменение на магнитното поле е основно свойство на електромагнитното поле.



фиг.7.3.1

Максуел, като е изхождал от уравнения (7.3.3), респективно (7.3.4), е показал възможността за съществуване на електромагнитни вълни, разпространяващи се със скоростта на светлината. На фиг.7.3.1 е показана плоска електромагнитна вълна, разпространяваща се по оста oz. Величината $\varepsilon_0\vec{E}$ Максуел е нарекъл електрическо разместване в пустотата, а величината $\frac{\vec{B}}{\mu_0}$ - магнитна сила в пустотата.

Полето при такава вълна, разпространяваща се със скорост $v = \frac{\omega}{\beta}$, може да бъде представено със системата уравнения:

$$\begin{cases} E = E_x = E_o\cos(\omega t - \beta z); \\ B = B_y = B_0\cos(\omega t - \beta z). \end{cases} \tag{7.3.5}$$

Комплексният запис на тази система е:

$$\begin{cases} \dot{E} = E_0 e^{-j\beta z}; \\ \dot{B} = B_0 e^{-j\beta z}. \end{cases} \qquad (7.3.6)$$

Дължината на вълната λ се дава с формулата:

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta} = \frac{v}{f} = vT. \qquad (7.3.7)$$

Като се има предвид, че векторите на полето $\vec{E}$ и $\vec{B}$ зависят от времето t и само от една пространствена координата z, то след диференциране съгласно уравнения (7.3.3) се получава:

$$\mathrm{rot}\,\vec{B} = \frac{\partial By}{\partial z}\vec{x^0} = -\beta B_0 \sin(\omega t - \beta z)\vec{x^0} = \mu_0\varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = -\mu_0\varepsilon_0\omega E_0 \sin(\omega t - \beta z)\vec{x^0}; \qquad (7.3.8)$$

$$\mathrm{rot}\,\vec{E} = \frac{\partial Ex}{\partial z}\vec{y^0} = \beta E_0 \sin(\omega t - \beta z)\vec{y^0} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \omega B_0 \sin(\omega t - \beta z)\vec{y^0}. \qquad (7.3.9)$$

От израз (7.3.8) може да се запише:

$$B_0 = \mu_0\varepsilon_0 \frac{\omega}{\beta} E_0 \quad \text{или} \quad \frac{E_0}{B_0} = \frac{1}{\mu_o\varepsilon_0}\cdot\frac{\beta}{\omega}. \qquad (7.3.10)$$

Съответно от израз (7.3.9) може да се запише:

$$B_0 = \frac{\beta}{\omega} E_0 \quad \text{или} \quad \frac{E_0}{B_0} = \frac{\omega}{\beta} = v. \qquad (7.3.11)$$

От равенства (7.3.10) и (7.3.11) може да се установи, че:

$$\frac{E_0}{B_0} = v = \frac{1}{\mu_0\varepsilon_0}\cdot\frac{1}{v}, \qquad (7.3.12)$$

откъдето за скоростта на електромагнитната вълна v се получава:

$$v = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}} = c. \qquad (7.3.13)$$

Тук следва да се отбележи интересният факт, че във всички системи измервателни единици и независимо от начина на определяне на проницаемостите на пустотата μ_0 и ε_0, скоростта на електромагнитната вълна v се оказва равна на скоростта на светлината c. Въз основа на този резултат Максуел е достигнал до заключението, че светлината представлява електромагнитни вълни и даже е изчислил стойностите на електрическия и магнитния вектори на слънчевата светлина. Освен това, разглеждайки енергията на светлината като енергия на електромагнитно поле, той изчислил и големината на светлинното налягане.

Херц експериментално е доказал валидността на уравненията на Максуел и на следствията, произтичащи от тях, 15 години след публикуването на трактата на Максуел. При своите опити Херц се е стремял да получи колебания с възможно по-висока честота, за да увеличи стойността на производната на интензитета на електрическото поле, определяща плътността на тока на разместването. Така той открива възникването на електромагнитни вълни, излъчвани от вибратора му. Херц е доказал, че излъчването се извършва в пълно съответствие с уравненията на Максуел.

7.4. Скаларен и векторен потенциал. Обобщение на интензитета на електрическото поле

1. Скаларен потенциал

Известно е, че векторът интензитет на електрическото поле $\vec{E} = \vec{E}(x, y, z)$ може да бъде представен чрез градиента на скаларна функция на координатите

$\varphi = \varphi(x, y, z)$, т.е.:

$$\vec{E} = -\operatorname{grad}\varphi \qquad (7.4.1)$$

само в този случай, когато в разглежданата област е изпълнено условието:

$$\operatorname{rot}\vec{E} = \vec{0}. \qquad (7.4.2)$$

Горното условие е задължително, тъй като математическата операция ротация от кой да е градиент е тъждествено равна на нула, т.е.:

$$\operatorname{rot}\operatorname{grad}\varphi = \nabla \times \nabla\varphi \equiv \vec{0}.$$

Скаларната функция φ се нарича скаларен потенциал.

Дадено поле се нарича потенциално, ако ротацията на определящия му вектор е равна на нула. Такова е полето на неподвижни електрически заряди. За интензитета на електрическото поле $\vec{E}$, създаван от заряд q, се записва:

$$\vec{E} = \frac{q\vec{R}^{o}}{\varepsilon_0 4\pi R^2}. \qquad (7.4.3)$$

За намиране на общия интензитет на електрическото поле на неподвижни заряди е необходимо да се сумират интензитетите на полетата на отделните заряди.

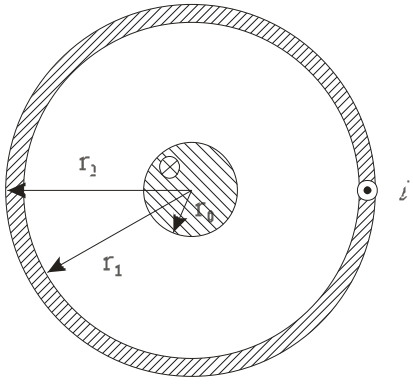
Ротацията на интензитета на такова поле е равно на нула, а също така е равна на нула и циркулацията му по затворен контур, т.е.:

$$\oint_{(l)} \vec{E}\,d\vec{l} = 0. \qquad (7.4.4)$$

И действително, ако се използува израз (7.4.1) се записва:

$$\oint_{(l)} \vec{E}\,d\vec{l} = -\oint_{(l)} \operatorname{grad}\varphi\,d\vec{l} = -\oint_{(l)} d\varphi \equiv 0. \qquad (7.4.5)$$

В такова поле потенциалът φ се определя еднозначно с точност до произволна константа, т.е.:



Фиг.7.4.1

$$\varphi = -\int_{(l)} \vec{E}\,d\vec{l} = \int_{(l)} \operatorname{grad}\varphi\,d\vec{l}.$$

Ако потенциалът се определя в точка с координати (x, y, z), то в горния интеграл се фиксира само горната му граница. При това интегралът не става определен и към него може да бъде добавена произволна константа.

На разликата в потенциалите между две точки може да бъде дадено следното физическо тълкуване: Тя е равна на работата A, извършвана от силите на полето за пренасяне на заряд q от едната до другата точка, отнесена към големината на заряда. Например, за точки a и b се записва:

$$\frac{A_{ab}}{q} = \frac{1}{q}\int_a^b \vec{E}\,d\vec{l} = \frac{1}{q}\int_a^b q\vec{E}\,d\vec{l} = \int_a^b \vec{E}\,d\vec{l} = \varphi_a - \varphi_b. \qquad (7.4.7)$$

Най-точното определение на потенциал се дава с израз (7.4.1), т.е. потенциалът е скаларна функция, чиито градиент, взет със знак "минус", е равен на определящия вектор на полето.

2. Векторен потенциал

Ако в разглежданата област, ротацията на определящия вектор на дадено поле $\vec{F}$ е различна от нула, т.е.: $\mathrm{rot}\,\vec{F} \neq \vec{0}$, то векторът $\vec{F}$ не може да бъде представен чрез градиент на скаларен потенциал. Такова поле се нарича непотенциално или още вихрово.

Като пример за такова поле може да бъде посочено магнитното поле на коаксиален кабел, през който преминава ток i, за областта на жилото му, т.е. за $r < r_0$ (фиг.7.4.1).

За магнитната индукция B на разглежданото поле се записва:

$$B = B_\alpha = \frac{\mu_0 i r}{2\pi r_0^{\,2}}. \qquad (7.4.8)$$

Това поле е вихрово и ротацията на определящия му вектор $\vec{B}$ се дава с уравнението:

$$\mathrm{rot}\,\vec{B} = \mu_0 \vec{\delta}_\text{п}. \qquad (7.4.9)$$

Векторът $\vec{B}$ не може да бъде представен чрез градиент на скаларна функция.

Съществува обаче, възможност за представяне на определящия вектор на вихрово поле $\vec{F}$ чрез пространствена производна. Тя е приложима в случая, когато за разглеждания вектор $\vec{F}$ е изпълнено условието:

$$\mathrm{div}\,\vec{F} = 0, \qquad (7.4.10)$$

т.е. когато във векторното поле липсват източници. В този случай векторът $\vec{F}$ може да бъде представен като ротация на друг вектор $\vec{A}$, т.е.:

$$\vec{F} = \mathrm{rot}\,\vec{A}. \qquad (7.4.11)$$

Този вектор $\vec{A}$ се нарича векторен потенциал на полето на вектор $\vec{F}$ по аналогия със скаларния потенциал φ, чийто градиент определя полето на вектора $\vec{F}$. Условието (7.4.10) е необходимо, тъй като според правилата на векторния анализ дивергенцията на коя да е ротация е тъждествено равна на нула, т.е.:

$$\mathrm{div}\,\mathrm{rot}\,\vec{A} \equiv \nabla\left(\nabla \times \vec{A}\right) \equiv 0. \qquad (7.4.12)$$

Условието (7.4.10) се удовлетворява от магнитното поле – векторът магнитна индукция няма източници, т.е.:

$$\mathrm{div}\,\vec{B} = 0. \qquad (7.4.13)$$

Ето защо векторът магнитна индукция $\vec{B}$ може да бъде представен като ротация на векторния магнитен потенциал $\vec{A}$, т.е.:

$$\vec{B} = \mathrm{rot}\,\vec{A}. \qquad (7.4.14)$$

Въз основа на последния израз може да се даде определение за векторен магнитен потенциал $\vec{A}$, който е такава векторна функция, чиято ротация е равна на вектор $\vec{B}$. От това определение следва, че към вектор $\vec{A}$ може да бъде добавена произволна векторна функция $\vec{v}$, чиято ротация е равна на нула, т.е.:

$$\operatorname{rot}\vec{A} = \operatorname{rot}(\vec{A} + \vec{v}), \qquad (7.4.15)$$

Тази съставка $\vec{v}$ може да бъде произволна функция на координатите, която е градиент от скаларна величина υ, т.е.:

$$\vec{v} = \operatorname{grad}\upsilon. \qquad (7.4.16)$$

Такова представяне на съставката е възможно, тъй като ротацията на кой да е градиент е тъждествено равна на нула.

Дивергенцията на коя да е ротация е тъждествено равна на нула, докато дивергенцията на вектор, изразен като градиент на скаларна функция, може да бъде различна от нула. Даже функцията $\vec{v} = \operatorname{grad}\upsilon$ може така да бъде избрана, че $\operatorname{div}\vec{v}$ да бъде търсената функция на координатите. Това означава, че чрез добавяне на съставката $\vec{v} = \operatorname{grad}\upsilon$ може да се влияе върху дивергенцията на векторния потенциал $\vec{A}$, т.е. върху $\operatorname{div}\vec{A}$, без да се оказва влияние върху ротацията му, т.е. върху $\operatorname{rot}\vec{A}$.

Разгледаното по-горе свойство на векторните функции се използува за опростяване на уравненията, съдържащи векторен потенциал. Ако вектор $\vec{B}$ в първото уравнение на Максуел (израз (7.4.9)) се замести съгласно израз (7.4.14) се получава:

$$\operatorname{rot}\vec{B} = \operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{A} = -\nabla^2\vec{A} + \operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{A} = \mu_0\vec{\delta}. \qquad (7.4.17)$$

За получаване на последното уравнение се използува формулата за двойно векторно произведение, т.е.:

$$\vec{a}\times\left(\vec{b}\times\vec{c}\right) = \vec{b}\left(\vec{a}\,\vec{c}\right) - \left(\vec{a}\,\vec{b}\right)\vec{c}. \qquad (7.4.18)$$

Въз основа на разгледаното по-горе, съставката $\operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{A}$ в уравнение (7.4.17) може да бъде различна в зависимост от избора на функцията $\vec{v} = \operatorname{grad}\nu$.

При пресмятането на бавно изменящи се във времето полета е удобно да се приеме:

$$\operatorname{div}\vec{A} = 0. \qquad (7.4.19)$$

В общия случай е най-удобно да се положи:

$$\operatorname{div}\vec{A} = -\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial\varphi}{\partial t}, \qquad (7.4.20)$$

където φ е скаларният потенциал на електрическото поле.

Ако потенциалът φ се изменя бавно, то може да се приеме, че $\frac{\partial\varphi}{\partial t} = 0$, т.е.: $\operatorname{div}\vec{A} = 0$. Така се получава следното уравнение, свързващо векторния магнитен потенциал $\vec{A}$ и плътността на тока $\vec{\delta}$:

$$\nabla^2\vec{A} = -\mu_0\vec{\delta}. \qquad (7.4.21)$$

За полето на постоянни токове векторният потенциал $\vec{A}$ се изразява чрез интеграла:

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{(V)} \frac{\vec{\delta}\, dV}{R} \qquad (7.4.22)$$

или още чрез интеграла:

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{(l)} \frac{i\, d\vec{l}}{R}. \qquad (7.4.23)$$

Израз (7.4.21) е аналогичен на уравнението на Поасон за електростатичното поле (вж. Формула (7.1.49)):

$$\nabla^2 \varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}, \qquad (7.4.24)$$

чието решение е от вида:

$$\varphi = \frac{1}{\varepsilon_0 4\pi} \int_{(V)} \frac{\rho dV}{R}. \qquad (7.4.25)$$

Уравнение (7.4.21) е валидно, както за векторите $\vec{A}$ и $\vec{\delta}$, така и за съставките им. Например, за тези съставки в декартови координати се записва:

$$\nabla^2 A_x = -\mu_0 \delta_x;\ \nabla^2 A_y = -\mu_0 \delta_y \text{ и } \nabla^2 A_z = -\mu_0 \delta_z. \qquad (7.4.26)$$

Последните изрази са напълно аналогични на уравнението на Поасон (7.4.24). Оттук като се използува аналогията, се намират съответните интегрални изрази на съставките на вектор $\vec{A}$. Тези съставки се сумират (разбира се след съответно умножаване с единичните вектори $\vec{x^0}$, $\vec{y^0}$ и $\vec{z^0}$) и се получава израз (7.4.24).

Формула (7.4.22) е удобно да се използува, когато вектор $\vec{\delta}$ има само една съставка, например по оста oz, т.е.: $\delta = \delta_z$ или другояче казано, когато се решава равнинна задача. В този случай изразите за векторния потенциал $A = A_z$ са пропорционални на изразите за скаларния потенциал на равнинното електростатично поле, обусловено от обемни заряди с плътност ρ, съответстуваща на плътността на тока δ_z.

За намиране на връзката между векторния магнитен потенциал $\vec{A}$ и магнитния поток Φ се използува теоремата на Стокс (вж. Формула (7.1.32)), която за разглеждания случай се записва по следния начин:

$$\oint_{(S)} \mathrm{rot}\, \vec{A}\, d\vec{S} = \oint_{(l)} \vec{A}\, d\vec{l}. \qquad (7.4.27)$$

Като се има предвид, че векторът магнитна индукция $\vec{B}$ се изразява чрез $\mathrm{rot}\, \vec{A}$, то може да се запише:

$$\Phi = \int_{(S)} \vec{B}\, d\vec{S} = \int_{(s)} \mathrm{rot}\, \vec{A}\, d\vec{S} = \oint_{(l)} \vec{A}\, d\vec{l}. \qquad (7.4.28)$$

Последният израз показва, че магнитният поток Φ през дадена повърхност S е равен на циркулацията на векторния магнитен потенциал $\vec{A}$ по затворения котур l, ограничаващ площта S.

3. Обобщение на интензитета на електрическото поле

Векторния магнитен потенциал е важна величина, тъй като позволява да се обобщи интензитетът на електрическото поле. За целта се изхожда от второто уравнение на Максуел:

$$\mathrm{rot}\,\vec{\mathrm{E}} = -\frac{\partial \vec{\mathrm{B}}}{\partial \mathrm{t}}. \qquad (7.4.29)$$

Като се има предвид, че магнитната индукция $\vec{\mathrm{B}}$ се изразява като ротация от векторния магнитен потенциал $\vec{\mathrm{A}}$, т.е.: $\vec{\mathrm{B}} = \mathrm{rot}\,\vec{\mathrm{A}}$, то след заместване в уравнение (7.4.29) се получава:

$$\mathrm{rot}\,\vec{\mathrm{E}} = -\frac{\partial}{\partial \mathrm{t}}\mathrm{rot}\,\vec{\mathrm{A}} = -\mathrm{rot}\frac{\partial \vec{\mathrm{A}}}{\partial \mathrm{t}}\ , \qquad (7.4.30)$$

откъдето се записва:

$$\mathrm{rot}\left(\vec{\mathrm{E}} + \frac{\partial \vec{\mathrm{A}}}{\partial \mathrm{t}}\right) = \vec{0}\ . \qquad (7.4.31)$$

Тъй като ротацията от кой да е градиент е тъждествено равна на нула, то решението на уравнение (7.4.31) може да бъде представено във вида:

$$\vec{\mathrm{E}} + \frac{\partial \vec{\mathrm{A}}}{\partial \mathrm{t}} = -\mathrm{grad}\,\varphi\,. \qquad (7.4.32)$$

Оттук за интензитета на електрическото поле $\vec{\mathrm{E}}$ може да бъде записан следният обобщен израз:

$$\vec{\mathrm{E}} = -\mathrm{grad}\,\varphi - \frac{\partial \vec{\mathrm{A}}}{\partial \mathrm{t}}. \qquad (7.4.33)$$

Въз основа на последния израз може да се заключи, че интензитетът на електрическото поле е равен на сумата от градиента на скаларния електрически потенциал φ и производната по времето на векторения магнитен потенциал $\vec{\mathrm{A}}$, като пред двете съставки стои знак “минус”.

Равенство (7.4.33) представлява диференциалната форма на закона на електромагнитната индукция. И действително, ако това равенство се интегрира по затворен контур l, се записва:

$$\mathrm{e} = \oint_{(l)} \vec{\mathrm{E}}\,\mathrm{d}\,\vec{l} = -\oint_{(l)} \mathrm{grad}\,\varphi\,\mathrm{d}\,\vec{l} - \oint_{(l)} \frac{\partial \vec{\mathrm{A}}}{\partial \mathrm{t}}\mathrm{d}\,\vec{l}\,. \qquad (7.4.34)$$

Първият интеграл в дясната страна на последното уравнение е равен на нула, тъй като той представлява циркулация по затворен контур от градиента на скаларния електрически потенциал φ, която е тъждествено равна на нула. Вторият интеграл е равен на скоростта на изменение на магнитния поток Φ, т.е.:

$$\oint_{(l)} \frac{\partial \vec{\mathrm{A}}}{\partial \mathrm{t}}\mathrm{d}\,\vec{l} = \frac{\partial}{\partial \mathrm{t}}\oint_{(l)} \vec{\mathrm{A}}\,\mathrm{d}\,\vec{l} = \frac{\partial \Phi}{\partial \mathrm{t}}\ . \qquad (7.4.35)$$

и така се достига до уравнението:

$$\mathrm{e} = \oint_{(l)} \vec{\mathrm{E}}\,\mathrm{d}\,\vec{l} = -\frac{\partial \Phi}{\partial \mathrm{t}}\,, \qquad (7.4.36),$$

което представлява закона на Фарадей за електромагнитната индукция. Тук следва да се отбележи, че от последното уравнение се определя само интегралната величина – ЕДН e, докато уравнение (7.4.33) позволява да се определи индуктираният интензитет на електрическото поле в коя да е точка, т.е. съставката, която се обуславя от изменящ се във времето магнитен поток.

Известно е, че електрически заряд q, който се движи със скорост $\vec{v}$ във магнитно поле с индукция $\vec{B}$, изпитва сила $\vec{F}_M$, която се дава с израза:

$$\vec{F}_M = q\vec{v}\times\vec{B}. \qquad (7.4.37)$$

При това магнитната индукция $\vec{B}$ се измерва в същата координатна система, в която се определя и скоростта $\vec{v}$, т.е. зарядът q се движи със скорост $\vec{v}$ относно избраната координатна система.

Ако движението на заряда се извършва със скорост $\vec{v}$, значително по-малка от скоростта на светлината, то в координатна система, движеща се със същата скорост както и заряда, ще се наблюдава същото магнитно поле.Тъй като в тази координатна система зарядът q е неподвижен, то може да се смята, че силата $\vec{F}_M$ се дължи на електричеко поле с интензитет $\vec{E}_v$, т.е.: $\vec{F}_M = \vec{F}_E = q\vec{E}_v$. За интензитета $\vec{E}_v$ на това поле се записва:

$$\vec{E}_v = \frac{\vec{F}_E}{q} = \frac{\vec{F}_M}{q} = \vec{v}\times\vec{B}\ . \qquad (7.4.38)$$

Това уравнение дава третата съставка във обобщения израз на Максуел за интензитета на електричекото поле $\vec{E}$, т.е.:

$$\vec{E} = -\mathrm{grad}\,\varphi - \frac{\partial\vec{A}}{\partial t} + \vec{v}\times\vec{B}\ . \qquad (7.4.39)$$

На трите съставки от последното уравнние могат да бъдат дадени следните названия:

- $\mathrm{grad}\,\varphi$ - кондензаторна съставка. Тази съставка се свързва с потенциално електрическо поле, което може да бъде наблюдавано в кодензаторите;

- $\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}$ - трансформаторна съставка. Тази съставка се свързва с променливо във времето магнитно поле, което е характерно за трансформаторите;

- $\vec{v}\times\vec{B}$ - генераторна съставка. Тази съставка се свързва с движение на заряди в магнитно поле и е характерна за генераторите.

Ако в неподвижна координатна система (x, y, z) се наблюдава и електрическо поле с интензитет $\vec{E}$, то в движеща се със скорост $\vec{v}$ координатна система (x', y', z') ще се наблюдава допълнителна съставка на магнитната индукция $\vec{B}_v$, която се определя от израз, аналогичен на уравнение (7.4.38):

$$\vec{B}_v = -\frac{1}{c^2}\vec{v}\times\vec{E}. \qquad (7.4.40)$$

Тъй като в знаменателя на последния израз фигурира множителят $c^2 = 9.10^{20}\,cm^2/s^2$, то в електротехниката съставката $\vec{B}_v$ не играе практически

никаква роля за разлика от съставката $\vec{E}_v$ от уравнение (7.4.38). Така например при $E = 10\,\text{kV/cm}$ и $v = 10^3\,\text{cm/s}$ за съставката B_v се получава $B_v = 10^{-10}\ \text{T}$.

7.5. Постоянно електрическо поле в поляризуема среда

1. Електромагнитно поле в поляризуема среда - встъпителни бележки

При разглеждане на електромагнитното поле в поляризуеми среди в уравненията на Максуел се въвеждат два нови вектора - електрическа индукция (електрическо разместване) $\vec{D}$ и интензитет на магнитното поле $\vec{H}$, които се определят от уравненията:

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \text{ и } \vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M}. \qquad (7.5.1)$$

Определянето на векторите $\vec{D}$ и $\vec{H}$ е ставало на базата на степента на познаване на електромагнитните явления (а трябва да се подчертае, че тези явления в различно време са тълкувани по различен начин), вследствие на което на векторите $\vec{D}$ и $\vec{H}$ са давани често противоречиви определения.

Така например, електрически заряд q, намиращ се във външно електрическо поле с интензитет $\vec{E}$, изпитва сила $\vec{F}_E$, която се дава с израза:

$$\vec{F}_E = q\vec{E}. \qquad (7.5.2)$$

Ако се предположи, че съществуват магнитни заряди, то за магнитното поле може да бъде записана аналогична формула, т.е.:

$$\vec{F}_M = q_M \vec{H}. \qquad (7.5.3)$$

От съпоставянето на изрази (7.5.2) и (7.5.3) може да се заключи, че интензитетът на магнитното поле $\vec{H}$ е аналогична величината на интензитета на електрическото поле $\vec{E}$, т.е. вектор $\vec{H}$ следва да се приеме за основен определящ вектор на магнитното поле.

Според съвременната електродинамика аналогични са векторите на полето $\vec{E}$ и $\vec{B}$, векторите $\vec{P}$ и $\vec{M}$, характеризиращи поляризоваността на средата, и векторите $\vec{D}$ и $\vec{H}$.

Трябва да се отбележи, че въз основа на уравнение (7.5.3) може да бъде изградена теория на магнитното поле, въз основа на която могат да бъдат решени правилно редица задачи. Недостатъкът на тази теория е в това, че основният вектор $\vec{H}$ се определя чрез несъществуващ магнитен заряд, т.е. тази формално изградена теория не съответствува на електрокинетичната природа на магнитните явления.

И така векторите $\vec{E}$ и $\vec{B}$ са векторите на полето, векторите $\vec{P}$ и $\vec{M}$ са вектори, характеризиращи състоянието на поляризоваността на средата. Тогава векторите $\vec{D}$ и $\vec{H}$ представляват само линейна комбинация на векторите на полето и поляризацията, и чрез тях по-лесно се описва полето в поляризуеми среди.

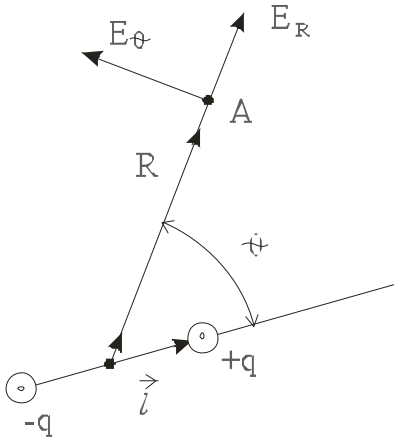
При разглеждане на полето в пустотата се записва:

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} \quad \text{и} \quad \vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0}, \tag{7.5.4}$$

т.е. се използуват не само векторите на полето $\vec{E}$ и $\vec{B}$, но и векторите $\vec{D}$ и $\vec{H}$. Умножаването или делението обаче на дадената физическа величина на произволна константа не бива да се разглежда като преход към нова по същество величина, т.е. не се изменя физическият смисъл на уравненията.

2. Постоянно електрическо поле в поляризуема среда – основни положения

Тук ще бъдат разгледани основните положения на теорията на постоянното електрическо поле в поляризуема среда при установен режим.



фиг.7.5.1

Електрическото поле на незаредено тяло е различно от нула, ако то съдържа двойки свързани заряди $\pm q$, които образуват електрически момент, чиято средна стойност е различна от нула.

Електрическият момент на дипол, представляващ два свързани заряда $\pm q$, намиращи се на разстояние $\vec{l}$, където вектор $\vec{l}$ е насочен от заряда $-q$ към заряда $+q$ (фиг.7.5.1) , е равен на:

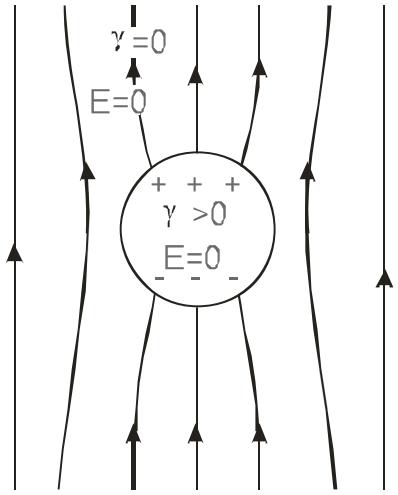
$$\vec{p} = q\vec{l}. \tag{7.5.5}$$

Електрическото поле на дипола на разстояние R, значително по-голямо в сравнение с разстоянието l, (наречено ос (рамо) на дипола) се характеризира със следния потенциал:

$$\varphi_p = \frac{\vec{p}\vec{R}^0}{\varepsilon_0 4\pi R^2}, \tag{7.5.6}$$

Радиалната и меридианна съставка на интензитета на полето E_R и E_θ се дават с формулите:

$$E_R = -\frac{\partial \varphi_P}{\partial R} = \frac{p\cos\theta}{\varepsilon_0 2\pi R^3} \quad \text{и} \quad E_\theta = -\frac{\partial \varphi_P}{R\partial\theta} = \frac{p\sin\theta}{\varepsilon_0 4\pi R^3}. \tag{7.5.7}$$



фиг.7.5.2

От изрази (7.5.6) и (7.5.7) може да се констатира, че както потенциалът φ_P, така и съставките E_R и E_θ не зависят поотделно нито от заряда q и оста l на дипола, а от електрическия му момент - p.

Проводящите тела, намиращи се във външно електрическо поле, също имат електрически момент. На фиг.7.5.2 е показано резултантното поле, което се получава при внасяне на проводящо тяло във външно еднородно електрическо поле. Под действието на външното поле свободните заряди в проводящото тяло се преместват по посока на полето, създавайки свое поле, компенсиращо външното поле, докато полето вътре в проводника стане равно на нула. При това сумарният заряд, а също така и обемният заряд в коя да е точка вътре в проводника е равен на нула.

В диелектриците обаче, могат да съществуват както електрическо поле и свободни заряди, така и

свързани заряди, притежаващи електрически (диполен) момент. Ако ориентацията на диполите е такава, че средният диполен момент за разглеждания обем е различен от нула, се казва, че веществото е поляризирано.

Степента на поляризация $\vec{P}$ се определя като обемна плътност на диполните моменти, т.е. като електрически момент за единица обем:

$$\vec{P} = \lim_{V \to 0} \frac{\sum \vec{p}}{V}. \qquad (7.5.8)$$

Векторът $\vec{P}$ се нарича още електрическа поляризованост.

Диполите притежават електрическо поле. Съответно поляризираното вещество притежава електрически момент, който за елементарен обем dV може да бъде изразен чрез поляризоваността $\vec{P}$ по следния начин:

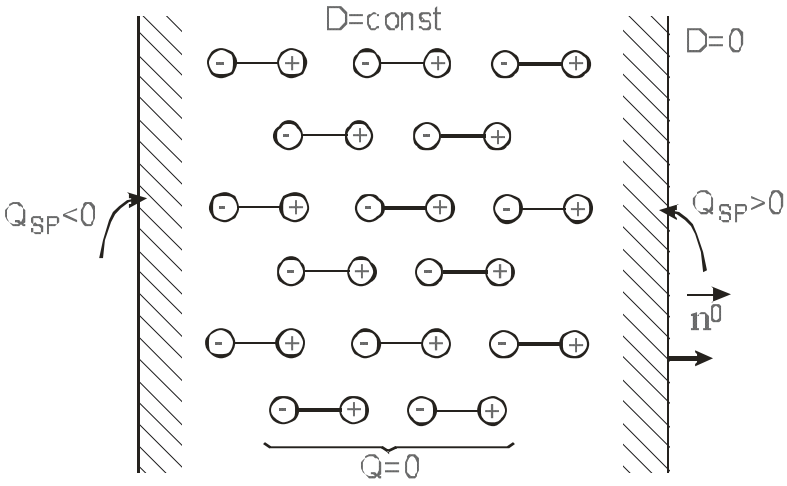
$$d\vec{P} = \vec{P}\,dV. \qquad (7.5.9)$$

Въз основа на горния израз може да се заключи, че при поляризираните вещества средният заряд може да бъде равен на нула, но те да притежават електрическо поле, различно от нула.

Полето на поляризираното вещество може да бъде определено като се използват формули (7.5.6) и (7.5.9). Така например, потенциалът, който се обуславя от поляризирана среда, се дава с израза:

$$\varphi_P = \frac{1}{\varepsilon_0 4\pi} \int_{(V)} \frac{\vec{P}\vec{R}^0}{R^2} dV, \qquad (7.5.10)$$

като интегрирането се извършва за целия обем V, за който поляризоваността $\vec{P} \neq \vec{0}$.



фиг.7.5.3

Електрическото поле на поляризована среда може да бъде разглеждано и като поле на некомпенсирани свързани заряди. В случай на еднородно поляризирана среда положителните и отрицателните заряди на диполите във вътрешността на средата взаимно се компенсират, а некомпенсирани остават зарядите на повърхността ѝ (фиг.7.5.3). Следователно, обемната плътбост на свързаните заряди ще бъде равна на нула. За повърхностната плътност на свързаните заряди, както ще бъде показано по-долу, се записва:

$$Q_{SP} = \vec{P}.\vec{n}^0 = P_n, \qquad (7.5.11)$$

където $\vec{n}^0$ е нормалата към повърхността.

За да се докаже, че повърхностната плътност на свързания заряд Q_{SP} на еднородно поляризирано тяло се определя с израз (7.5.11), се приема, че тялото

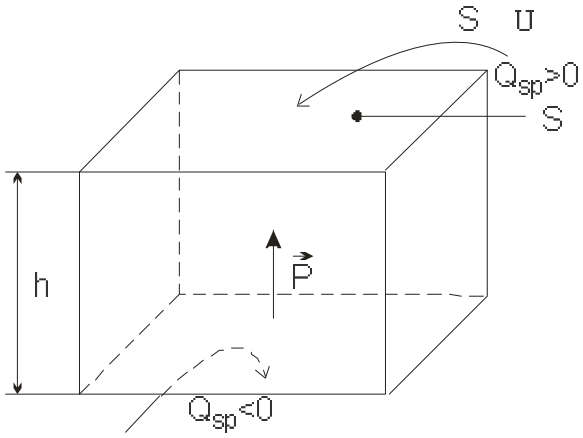
има вид на призма с основа S и височина h (фиг.7.5.4). Приема още, че тялото е еднородно поляризирано като векторът $\vec{P}$ е нормален към основата S. Тъй като по определение поляризоваността $\vec{P}$ е електрическия момент за единица обем, то за електрическия момент на цялото тяло $\vec{P}$ се записва:

$$\vec{P} = \vec{P}V = P\vec{h}S \ , \qquad (7.5.12)$$

където $\vec{h} = h\vec{n^0}$ ($\vec{n^0}$ е единичният вектор по нормалата към основата на призмата).

Ако се приеме, че призма със същите размери има на горната и долната си основи заряд $\pm Q_{SP}S$, то тя ще има същия електрически момент $\vec{P}$, т.е.:

$$\vec{P} = Q_{SP}S\vec{h} . \qquad (7.5.13)$$



Фиг.7.5.4

Ако се сравнят изрази (7.5.12) и (7.5.13), се достига до равенството $Q_{SP} = P_n$, с което се доказва правилността на формула (7.5.11).

За определяне на повърхностната плътност на свързания заряд Q_{SP} на граничната повърхност между два диелектрика, единият от които има поляризованост $\vec{P_1}$, а другият - поляризованост $\vec{P_2}$, се приема, че положителната нормала е насочена от първата към втората среда. В този случай за намиране на плътността Q_{SP} е необходимо да се сумират повърхностните плътности за двете среди, определени по формула (7.5.11). Тъй като нормалата $\vec{n^0}$ сочи от първата към втората среда, се записва:

$$Q_{SP} = \left(\vec{P_1} - \vec{P_2}\right)\vec{n^0} = P_{n1} - P_{n2} \ . \qquad (7.5.14)$$

Смяната на посоката на нормалата $\vec{n^0}$ не се отразява върху резултата, тъй като едновременно с промяната на знака поляризованостите P_{n1} и P_{n2} те си сменят местата във формула (7.5.14).

Ако поляризацията е нееднородна, то могат да съществуват както повърхностни, така и обемни свързани заряди. Доказва се, че обемната плътност на свързаните заряди ρ_P, обусловени от поляризацията, се дава с формулата:

$$\rho_P = -\mathrm{div}\,\vec{P} . \qquad (7.5.15)$$

Тук се предполага непрекъснатост на диференцируемия, съгласно последната формула, вектор $\vec{P}$.

Като се използуват формула (7.5.15) и израз (7.4.25) за потенциала φ_P, обусловен от поляризирана среда, се записва:

$$\varphi_P = \frac{1}{\varepsilon_0 4\pi}\int_{(V)} \frac{-\mathrm{div}\,\vec{P}}{R}dV \ , \qquad (7.5.16)$$

като интегрирането се извършва за целия обем V, за който $\mathrm{div}\,\vec{P} \neq 0$.

Ако векторът $\vec{P}$ търпи прекъсване, се преминава към така наречената повърхностна дивергенция, която се определя чрез повърхностната плътност на свързания заряд Q_{SP} на поляризацията по формулата:

$$Q_{SP} = -\mathrm{Div}\,\vec{P} = -\left(\vec{P}_2 - \vec{P}_1\right)\vec{n}^0 = P_{n1} - P_{n2}\ , \qquad (7.5.17),$$

където $\vec{P}_1$ и $\vec{P}_2$ са стойностите на поляризоваността от двете страни на граничната повърхност, като нормалата $\vec{n}^0$ е насочена от първата към втората среда.

Въз основа на израз (7.5.15) може да се заключи, че електрическото поле на поляризирана среда може да бъде разглеждано като поле на намиращите се в нея свързани заряди с обемна плътност ρ_P, така че при наличието на поляризуеми среди трябва да бъде отчетено влиянието на свързаните заряди. Това означава, че всички уравнения, които се отнасят за пустотата, остават в сила и тук, ако наред със свободните заряди в тези уравнения се добавят свързаните заряди. Така например, теоремата на Гаус добива вида:

$$\mathrm{div}\,\varepsilon_0\vec{E} = \rho + \rho_P\ . \qquad (7.5.17)$$

Ако плътността на свързаните заряди се замени съгласно израз (7.5.15), се получава:

$$\mathrm{div}\,\varepsilon_0\vec{E} = \rho - \mathrm{div}\,\vec{P}\ , \qquad (7.5.18),$$

откъдето се достига до следната формулировка на теоремата на Гаус:

$$\mathrm{div}\left(\varepsilon_0\vec{E} + \vec{P}\right) = \rho\ . \qquad (7.5.19)$$

В дясната страна на последното уравнение участвува само обемната плътност на свободните заряди ρ, а влиянието на поляризираната среда се отчита чрез съставката $\vec{P}$, която е под знака на дивергенцията.

Сумата от векторите, чиято дивергенция е равна на обемната плътност на свободния заряд ρ, се нарича електрическа индукция (електрическо разместване) $\vec{D}$, т.е.:

$$\vec{D} = \varepsilon_0\vec{E} + \vec{P}\ . \qquad (7.5.20)$$

Чрез въвеждането на вектора $\vec{D}$ уравненията на полето се записват по следния начин:

$$\mathrm{div}\,\vec{D} = \rho \quad \text{и} \quad \oint\limits_{(S)} \vec{D}\,d\vec{S} = \int\limits_{(V)} \rho dV = q\ . \qquad (7.5.21)$$

В тези уравнения в явен вид участвува само свободният заряд q и обемната му плътност ρ.

Известно е, че диелектриците биват два типа: с полярни и неполярни молекули. Полярните молекули за разлика от неполярните притежават електрически момент при отсъствие на външно поле, но поради хаотичната им ориентация средният електрически момент е равен на нула. И при двата типа диелектрици поляризацията им зависи от полето, но тя различно зависи от такива физически фактори като температура, честота на полето и др.

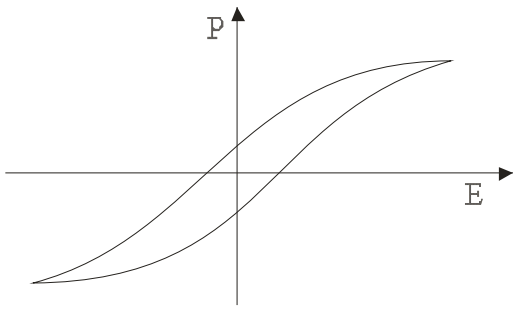
И действително, топлинното движение трябва да способствува хаотичната ориентация на полярните молекули. Ето защо при едно и също електрическо поле повишаването на температурата трябва да води до намаляване поляризацията на диелектриците с полярни молекули, докато поляризацията на диелектриците с неполярни молекули не трябва да зависи от температурата.

За насоченото ориентиране на полярните молекули под действието на външно поле е необходимо някакво време, поради което поляризацията намалява при увеличаване на честотата на полето. Ако диелектрикът е с неполярни молекули, поляризацията не зависи от честотата в доста широк честотен диапазон и е пропорционална на интензитета на полето до възникването на пробив в диелектрика.

В най-простия случай при установен режим поляризоваността $\vec{P}$ е пропорционална на интензитета на полето $\vec{E}$, т.е.:

$$\vec{P} = \varepsilon_0 \alpha_e \vec{E}, \qquad (7.5.22)$$

където α_e е относителната диелектрическа възприемчивост.



Фиг.7.5.5

Поляризоваността $\vec{P}$ не винаги е пропорционална на интензитета $\vec{E}$. Зависимостта $P = P(E)$ може да има нелинеен характер и даже хистерезисен характер, както това е при така наречените сегнетоелектрици (фиг.7.5.5). Характеристиките на сегнетоелектриците са подобни на магнитните характеристики на феромагнетиците. При сегнетоелектриците поляризация може да съществува и при отсъствие на поле, т.е.: $P \neq 0$ при $E = 0$.

За обикновените диелектрици възприемчивостта α_e в границите на няколко единици, например, за трансформаторно масло $\alpha_e = 1$, за порцелан $\alpha_e = 4$ и др. За практически цели възприемчивостта α_e на въздуха се приема за равна на нула, т.е.: $\alpha_e = 0$. За сегнетоелектриците възприемчивостта α_e зависи от интензитета на полето E и може да бъде равна на стотици и хиляди единици.

При анизотропните диелектрици възприемчивостта α_e зависи от посоката на полето. При тях векторите $\vec{P}$ и $\vec{E}$ могат да не съвпадат по посока. При тези диелектрици възприемчивостта α_e е тензорна величина.

Тук трябва да се отбележи още, че при някои диелектрици (така наречените пиезоелектрици) поляризация може да възникне не само при въздействието на електрическо поле, но и под въздействието на механични напрежения - така наречения пиезоелектрически ефект. Този ефект намира широко практическо приложение в електротехниката - при грамофона, за измерване на променливи налягания (удар, взрив и др.).

Връзката между механично напрежение и поляризация притежава свойството взаимност, т.е. поляризацията, създавана от електрическо поле, предизвиква механична деформация - електрострикция. Този ефект се използува при кварцовите резонатори, които намират приложение, например за стабилизиране на честотата.

Въз основа на изрази (7.5.20) и (7.5.22) за вектор $\vec{D}$ може да се запише:

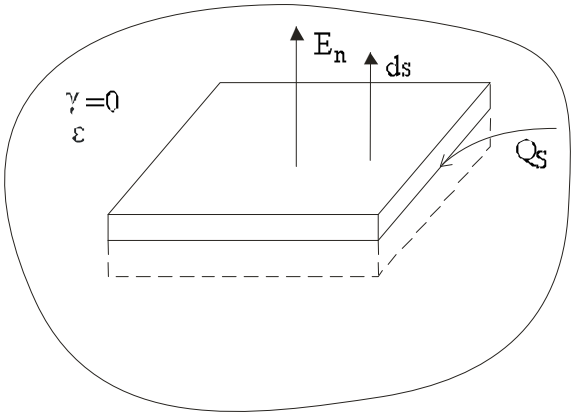
$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P} = \varepsilon_0 (1 + \alpha_e)\vec{E} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \vec{E}, \qquad (7.5.23)$$

където $\varepsilon_r = 1 + \alpha_e$ е относителната диелектрична проницаемост на средата.

Тук трябва да се има предвид, че първата част на равенството $\left(\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}\right)$ е винаги в сила, докато втората му част $\left(\vec{D} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \vec{E}\right)$ е в сила само при пропорционалност на векторите $\vec{P}$ и $\vec{E}$.

3. Гранични условия

За случая на постоянно електрическо поле при установен режим ще бъде разгледано поведението на векторите на разделната гранична повърхност между две среди.



σ>0 ; E=0

Фиг.7.5.6

Отначало се разглеждат граничните условия между проводяща среда и диелектрик. Повърхностната плътност на свободния заряд Q_S върху проводника, граничещ с поляризиран диелктрик, и нормалната съставка на интензитета на електрическото поле E_n върху повърхността на диелектрика в условията на статиката, са свързани с уравнението:

$$Q_S = \varepsilon_0 \varepsilon E_n D_n . \qquad (7.5.24)$$

Горното уравнение следва от теоремата на Гаус: $\oint_{(S)} \varepsilon_0 \vec{E}\, d\vec{S} = \int_{(V)} \rho dV = q$, приложена към затворената повърхност, обхващаща границата между проводника и диелектрика (фиг.7.5.6) . И действително, ако повърхността представлява паралелепипед с основи dS, паралелни на граничната повърхност между проводника и диелектрика, и е с нищожно малка височина, то потокът на вектор $\vec{D}$, излизащ от тази повърхност ще бъде:

$$d\psi_D = \vec{D}\, d\vec{S} = \varepsilon_0 \varepsilon_r E_n dS, \qquad (7.5.25)$$

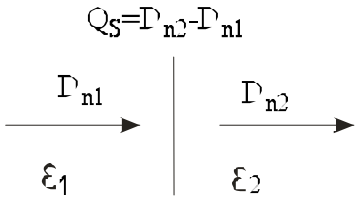
тъй като вътре в проводника в условията на статиката поле отсъствува.

Зарядът, намиращ се в обема, затворен от повърхността на паралелепипеда, е равен на произведението на повърхностната плътност на заряда върху проводника Q_S и площта на проводника dS, затворена вътре в паралелепипеда, т.е.:

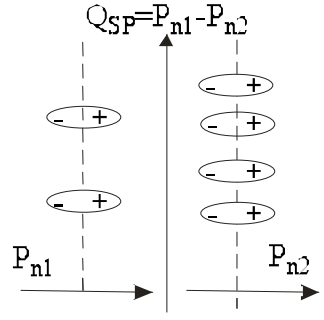
$$d\Psi_D = dq = Q_S dS . \qquad (7.5.26)$$

От съпоставянето на изрази (7.5.25) и (7.5.26) следва уравнение (7.5.24).

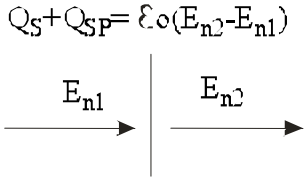
Ако на граничната повърхност между два диелектрика с проницаемости ε_{r1} и ε_{r2}



фиг.7.5.7



фиг.7.5.8



фиг.7.5.9

съществува свободен заряд с повърхностна плътност Q_S, то въз основа на теоремата на Гаус тази плътност може да бъде изразена чрез нормалните съставки на вектора електрическо разместване, т.е.:

$$Q_S = D_{n2} - D_{n1} = \varepsilon_0(\varepsilon_{r2}E_{n2} - \varepsilon_{r1}E_{n1}), \qquad (7.5.27)$$

като при това нормалата е насочена от първата към втората среда (фиг.7.5.7) При отсъствие на свободен повърхностен заряд (плътността $Q_S = 0$), то нормалните съставки на вектор $\vec{D}$ не търпят прекъсване и граничното условие (7.5.27) добива вида:

$$D_{n2} = D_{n1} \quad \text{или} \quad \varepsilon_{r2}E_{n2} = \varepsilon_{r1}E_{n1}. \qquad (7.5.28)$$

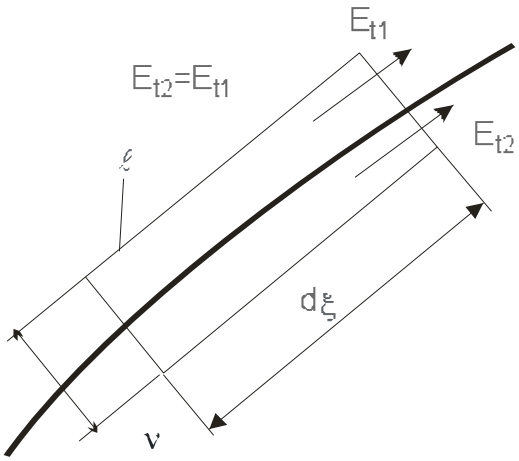
За повърхностната плътност на свързания заряд (заряда на поляризацията) Q_{SP} съгласно уравнение (7.5.17) и фиг.7.5.8 се записва:

$$Q_{SP} = P_{n1} - P_{n2} = \varepsilon_0(\alpha_{e1}E_{n1} - \alpha_{e2}E_{n2}). \qquad (7.5.29)$$

където $\alpha_e = \varepsilon_r - 1$ е относителната диелектрическа възприемчивост.

Ако се сумират изрази (7.5.28) и (7.5.29), се намира пълната плътност на повърхностния заряд (фиг.7.5.9) :

$$Q_S + Q_{SP} = \varepsilon_0(E_{n2} - E_{n1}). \qquad (7.5.30)$$



фиг.7.5.10

Въз основа на последния израз може да се направи заключението, че ако се отчитат, както свободните, така и свързаните заряди, всички закони на полето могат да бъдат изразени чрез векторите на интензитета на полето без да се взема под внимание проницаемостта на средата и без да се прибягва до векторите на разместването.

От приведените по-горе уравнения може да се констатира, че нормалната съставка на интензитета на електрическото поле търпи прекъсване, докато тангенциалната му съставка е непрекъсната при преминаване от една среда в друга, т.е.:

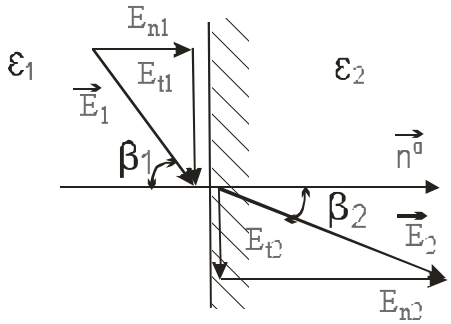
$$E_{t2} = E_{t1}. \qquad (7.5.31)$$

Последното условие може да бъде получено, ако се приложи второто уравнение на Максуел за правоъгълен контур l, чиито две страни с дължини $d\xi$ са паралелни на граничната повърхност и лежат в различни среди, а другите две страни са с дължина $d\nu$, която е нищожно малка в сравнение с дължината $d\xi$, т.е.: $d\nu << d\xi$. За циркулацията на вектора интензитет на електрическото поле $\vec{E}$ по този контур в условията на постоянно поле се записва:

$$\oint_{(l)} \vec{E}\, d\vec{l} = (E_{t2} - E_{t1})d\xi = 0, \qquad (7.5.32)$$

откъдето следва, че $E_{t2} - E_{t1} = 0$, т.е. се достига до условието (7.5.31).

Тук трябва да се отбележи, че тангенциалната съставка на вектор $\vec{E}$ е също вектор, нормален към нормалата и в равнината, която се допира към граничната повърхност на двете среди, той може да има две съставки. В такъв случай трябва да се смята, че условие (7.5.31) е в сила за коя да е от тях. Следователно, то е в сила и за самите вектори $\vec{E}_{t1}$ и $\vec{E}_{t2}$.



фиг.7.5.11

Въз основа на условията (7.5.28) и (7.5.31) може да се заключи, че в изотропни среди векторите на полето $\vec{E}_1$ и $\vec{E}_2$ образуват с нормала $\vec{n}^0$, насочени от първата към втората среда, ъгли β_1 и β_2 (фиг.7.5.11), за които се записва:

$$\frac{tg\beta_1}{tg\beta_2}=\frac{\left(\frac{E_{t1}}{E_{n1}}\right)}{\left(\frac{E_{t2}}{E_{n2}}\right)}=\frac{E_{n2}}{E_{n1}}=\frac{\varepsilon_{r1}}{\varepsilon_{r2}}. \qquad (7.5.33)$$

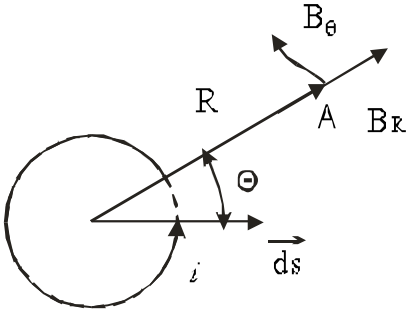
Горното равенство е в сила, ако на граничната повърхност отсъствува свободен повърхностен заряд.

7.6. Постоянно магнитно поле в среда с магнитна поляризация

1. Постоянно магнитно поле в среда с магнитна поляризация – основни положения

Известно е, че не само движещите се заряди притежават магнитно поле, но и намагнитните тела, в които отсъствуват токове в обикновения смисъл на думата. Ампер, сравнявайки магнитните полета на токовете и намагнитените тела, е предположил, че намагнитеността на телата може да бъде обяснена със съществуването в тях на микроскопични токове, образуващи микроскопични затворени контури.

При ориентиране на тези контури, те образуват магнитен момент, чиято средна стойност е различна от нула. Именно наличието на такъв момент определя съществуването на магнитно поле на намагнитените тела, въпреки че отсъствува насочено движение на заряди през кое да е сечение на тялото.



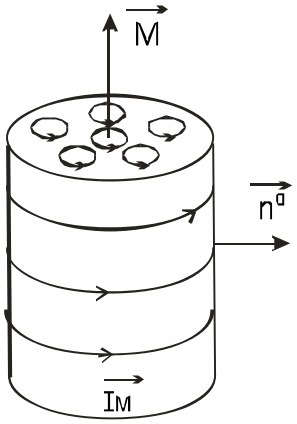
фиг.7.6.1

Под магнитен момент на елементарен плосък контур $\vec{m}$ с ток i и площ S се разбира произведението на тока и площта, ограничена от контура, т.е.:

$$\vec{m}=i\vec{S}, \qquad (7.6.1)$$

където $\vec{S}$ е векторното представяне на площта, ограничена от контура.

При това положителната посока на нормалата към повърхността s и посоката на тока са свързани по правилото на десния винт.



фиг.7.6.2

Магнитната индукция $\vec{B}$ на полето на такъв токов контур в точка A, намираща се на разтояние R от контура, което е много по-голямо от размерите на контура, има радиална и меридианна съставка B_R и B_θ. Тези съставки се определят по следните формули:

$$B_R=\mu_0\frac{m.\cos\theta}{2\pi R^3} \quad \text{и} \quad B_\theta=\mu_0\frac{m.\sin\theta}{4\pi R^3}. \qquad (7.6.2)$$

От горните формули може да се констатира, че съставките B_R и B_θ не зависят нито от тока i и площта S поотделно, а от произведението $\vec{m}=i\vec{S}$, т.е. от големината и посоката на магнитния момент.

Съставките B_R и B_θ в значителна степен са аналогични на съставките E_R и E_θ на интензитета на електрическото поле на дипол (вж. формули (7.5.7)).

Степента на магнитна поляризация $\vec{M}$ на веществата се определя като обемна плътност на магнитните моменти, т.е. като магнитен момент за единица обем:

$$\vec{M} = \lim_{V\to 0} \frac{\sum \vec{m}}{V}. \qquad (7.6.3)$$

Векторът $\vec{M}$ се нарича още намагнитеност.

Магнитното поле на намагнитените вещества може да бъде разглеждано като поле на некомпенсирани свързани токове. За целта е необходимо да се намери плътността на тези свързани токове $\vec{\delta}_M$, магнитното поле на които е еквивалентно на намагнитеността $\vec{M}$.

Разглежда се еднородно надлъжно намагнитен прът (фиг.7.6.2). От фигурата може да се види, че токовете в съседните (междинните) контури се компенсират взаимно. Некомпенсирани остават само токовете по повърхността на тялото, паралелна на намагнитеността $\vec{M}$. Повърхностната плътност $\vec{I}_M$ на тези повърхностни токове се оказва равна по големина на намагнитеността $\vec{M}$.

Посоката на вектора $\vec{I}_M$ се определя от следното векторно произведение:

$$\vec{I}_M = \vec{M} \times \vec{n}^0, \qquad (7.6.4)$$

където $\vec{n}^0$ е външната нормала към повърхността на тялото.

Понятието повърхностна плътност на тока се въвежда в случаите, когато може да се смята, че токът е съсредоточен в тънък слой с дебелина τ. Ако плътността на тока в целия слой е еднаква и равна на δ_M, то повърхностната плътност $\vec{I}_M$ се определя чрез произведението:

$$\vec{I}_M = \vec{\delta}_M \tau. \qquad (7.6.5)$$

Ако се изходи от определението за намагнитеност (вж. Формула (7.6.3)), за магнитния момент на надлъжно намагнитен прът може да се запише :

$$\vec{M} = \vec{M} V. \qquad (7.6.6)$$

Следователно, при замяната на намагнитеността на пръта M с еквивалентен повърхностен ток I_M трябва да се смята, че:

$$I_M = M. \qquad (7.6.7)$$

Формула (7.6.4) може да бъде обобщена за случая на гранична повърхност между две среди с намагнитености $\vec{M}_1$ и $\vec{M}_2$. В този случай за повърхностната плътност $\vec{I}_M$ на граничната повърхност между двете среди се записва:

$$\vec{I}_M = \left(\vec{M}_1 - \vec{M}_2\right) \times \vec{n}^0, \qquad (7.6.8)$$

където нормалата $\vec{n}^0$ е насочена от първата среда към втората.

В случай на нееднородно намагнитени тела се въвежда така наречената

еквивалентна обемна плътност на тока $\vec{\delta}_M$. Доказва се, че плътността $\vec{\delta}_M$ се свързва с намагнитеността $\vec{M}$ чрез уравнението:

$$\vec{\delta}_M = \mathrm{rot}\,\vec{M}. \qquad (7.6.9)$$

Тук се предполага непрекъснатост на диференцируемия вектор $\vec{M}$. В случай, че намагнитеността $\vec{M}$ търпи прекъсване, се преминава към така наречената повърхностна ротация:

$$\vec{\delta}_M = \left(\vec{M}_1 - \vec{M}_2\right) \times \vec{n}^0 \equiv \mathrm{Rot}\,\vec{M}, \qquad (7.6.10)$$

където $\vec{M}_1$ и $\vec{M}_2$ са стойностите на намагнитеността от двете страни на граничната повърхност, като нормалата $\vec{n}^0$ е насочена от първата към втората среда.

За прилагане на първото уравнение на Максуел при намагнитена среда е необходимо дясната част на уравнението към плътността на пълния ток $\vec{\delta}_П$, т.е.:

$$\vec{\delta}_П = \vec{\delta}_{ПР} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \qquad (7.6.11)$$

да се добави плътността на тока $\vec{\delta}_M$, обусловена от намагнитеността:

$$\mathrm{rot}\,\vec{B} = \mu_0\left(\vec{\delta}_П + \vec{\delta}_M\right). \qquad (7.6.12)$$

Така с добавянето на вектора $\vec{\delta}_M$ се отчита влиянието на намагнитената среда върху магнитното поле.

Като се има предвид връзката между плътността $\vec{\delta}_M$ и намагнитеността $\vec{M}$ (вж. формула (7.6.9)), се записва:

$$\mathrm{rot}\,\vec{B} = \mu_0\left(\vec{\delta}_П + \mathrm{rot}\,\vec{M}\right), \qquad (7.6.13)$$

откъдето се получава:

$$\mathrm{rot}\left(\frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M}\right) = \vec{\delta}_П \qquad (7.6.14)$$

или в интегрална форма:

$$\oint_{(l)}\left(\frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M}\right)\mathrm{d}\vec{l} = \int_{(s)}\vec{\delta}_П\,\mathrm{d}\vec{S} \qquad (7.6.15)$$

Въз основа на последните две уравнения може да се заключи, че ако вместо вектор $\vec{B}$ се използува разликата $\left(\frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M}\right)$, то първото уравнение на Максуел може да бъде прилагано и за намагнитени среди като при това в явен вид се отчита само пълният ток. Прието е тази разлика да се нарича интензитет на магнитното поле $\vec{H}$, т.е.:

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M}. \qquad (7.6.16)$$

Като се използува величината $\vec{H}$ уравнения (7.6.13) и (7.6.14) могат да се запишат така:

$$\mathrm{rot}\,\vec{H} = \vec{\delta}_{\Pi}\ ; \qquad (7.6.17)$$

$$\oint_{(l)} \vec{H}\,\mathrm{d}\vec{l} = \int_{(S)} \vec{\delta}_{\Pi}\,\mathrm{d}\vec{S}. \qquad (7.6.18)$$

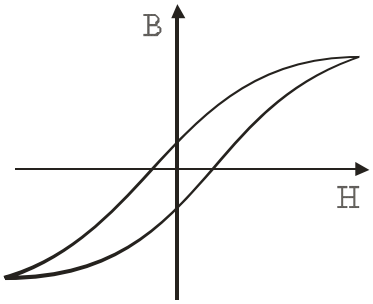
При материали с малка магнитна проницаемост и при много слаби полета намагнитеността $\vec{M}$ е пропорционална на магнитната индукция, т.е.:

$$\vec{M} = \kappa\vec{B} \qquad (7.6.19)$$

При това намагнитеността $\vec{M}$ се оказва пропорционална и на интензитета на магнитното поле $\vec{H}$, т.е.:

$$\vec{M} = \alpha_M \vec{H}, \qquad (7.6.20)$$

където α_M е относителната магнитна възприемчивост на средата.



фиг.7.6.3

В този случай трябва да съществува права пропорционалност между векторите $\vec{B}$ и $\vec{H}$, т.е.:

$$\vec{B} = \mu_0\left(\vec{H} + \vec{M}\right) = \mu_0(1+\alpha_M)\vec{H} = \mu_0\mu_r\vec{H}, \qquad (7.6.21)$$

където μ_r е относителната магнитна проницаемост на средата.

1. Гранични условия

Разглежда се поведението на векторите на магнитното поле на граничната повърхност между две среди. Въз основа на теоремата на Гаус в диференциална форма за магнитното поле: $\mathrm{div}\,\vec{B} = 0$ следва, че нормалната съставка на вектора $\vec{B}$ не търпи прекъсване, т.е.:

$$B_{n2} = B_{n1}. \qquad (7.6.22)$$

Не търпи прекъсване също така и тангенциалната съставка на интензитета на магнитното поле $\vec{H}$, т.е.:

$$H_{t2} = H_{t2}. \qquad (7.6.23)$$

За доказване на последното условие се използува първото уравнение на Максуел. За целта то се прилага за правоъгълен контур l, двете страни на който имат дължина $\mathrm{d}\xi$ и лежат от двете страни на граничната повърхност, а другите му две страни са нормални на повърхността и имат дължина $\mathrm{d}\upsilon$, която е пренебрежимо малка в сравнение

$\mathrm{d}\xi$

$\mathrm{d}\upsilon$

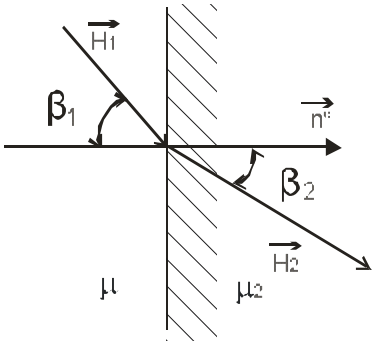
с дължината $d\xi$ (фиг.7.6.4). За циркулацията на вектора $\vec{H}$ по контура l се записва:

$$\oint_{(l)} \vec{H}\, d\vec{l} = \left(\vec{H}_1 + \vec{H}_2\right) d\vec{\xi} = \left(H_{t2} - H_{t1}\right) d\xi = \vec{\delta}\left(d\vec{\xi} \times d\vec{\upsilon}\right) \qquad (7.6.24)$$

или още:

$$H_{t2} - H_{t1} = \delta_\upsilon d\upsilon \to 0\,, \qquad (7.6.25)$$

където δ_υ е съставката на вектора плътност на тока, която е нормална към повърхността на контура, т.е. е паралелна на вектор $d\vec{S} = d\vec{\xi} \times d\vec{\upsilon}$.



Фиг.7.6.5

Въз основа на фиг.7.6.5 и по аналогия с електрическото поле (вж. фиг.7.5.11 и равенство (7.5.33)) се записва :

$$\frac{\mathrm{tg}\beta_1}{\mathrm{tg}\beta_2} = \frac{\left(\frac{H_{t1}}{H_{n1}}\right)}{\left(\frac{H_{t2}}{H_{n2}}\right)} = \frac{H_{n2}}{H_{n1}} = \frac{\mu_{r1}}{\mu_{r2}}\,. \qquad (7.6.26)$$

3. Магнитостатика

Аналогията между магнитното и електрическото поле може да бъде продължена и по-нататък. Така например, при отсъствие на токове се записва:

$$\mathrm{rot}\,\vec{H} = \vec{\delta} = \vec{0} \leftrightarrow \mathrm{rot}\,\vec{E} = \vec{0}\,, \qquad (7.6.27)$$

т.е. магнитното поле е потенциално. В такъв случай между векторите на двете полета може да бъде установена следната формална система аналогии:

$$\left|\begin{array}{l} \vec{B} = \mu_0\mu_r \vec{H} \leftrightarrow \vec{D} = \varepsilon_0\varepsilon_r \vec{E}\,; \\ \mu_0 \vec{M} \leftrightarrow \vec{P}\,; \\ \vec{H} = -\mathrm{grad}\,\varphi_M \leftrightarrow \vec{E} = -\mathrm{grad}\,\varphi\,. \end{array}\right. \qquad (7.6.28)$$

Тази система аналогии е винаги формално вярна при бавно изменящи се полета. Разликата между магнитното и електрическото поле е в липсата на свободни магнитни заряди, тъй като $\mathrm{div}\,\vec{B} \equiv 0$. По отношение на плътността на свързаните магнитни заряди ρ_M, за нея може да се запише формулата;

$$\rho_M = -\mathrm{div}\left(\mu_0 \vec{M}\right) = \mathrm{div}\left(\mu_0 \vec{H}\right), \qquad (7.6.29)$$

която е аналогична на формулата за плътността на свързаните електрически заряди ρ_P, т.е.: $\rho_P = -\mathrm{div}\,\vec{P}$.

При електрическото поле бе установено, че дивергенцията на вектор $\varepsilon_0 \vec{E}$ е равна на пълната плътност на зарядите – свободни и свързани, т.е.: $\mathrm{div}\left(\varepsilon_0 \vec{E}\right) = \rho + \rho_P$. Тъй като при магнитното поле отсъствуват свободни магнитни заряди, то аналогията между двете полета остава в сила.

По отношение на повърхностната плътност на свързаните магнитни заряди Q_{SM} може да бъде записана формулата:

$$Q_{SM} = \mu_0(M_{n1} - M_{n2}) = \mu_0(\alpha_{M1}H_{n1} - \alpha_{M2}H_{n2}) = \mu_0[(\mu_{r1} - 1)H_{n1} - (\mu_{r2} - 1)H_{n2}], \quad (7.6.30)$$

която е аналогична на формулата за повърхностната плътност на свързания електрически заряд Q_{SP}:

$$Q_{SP} = P_{n1} - P_{n2} = \varepsilon_0(\alpha_{e1}E_{n1} - \alpha_{e2}E_{n2}).$$

По-нататък би могло да се запишат още аналогични зависимости. Например, силата $d\vec{F}$, която действува на магнитен заряд с обемна плътност ρ_M, намиращ се във външно магнитно поле с интензитет $\vec{H}$, се дава с израза:

$$d\vec{F} = \vec{H}\rho_M dV. \quad (7.6.31)$$

Законът на Кулон, изразяващ взаимодействието между два елементарни магнитни заряда $q_{M1} = \rho_{M1}dV_1$ и $q_{M2} = \rho_{M2}dV_2$ има вида:

$$\vec{F}_{12} = \frac{q_{M1}q_{M2}}{\mu_0 4\pi R^2}\vec{R}_{12}^{\,0}. \quad (7.6.32)$$

Освен това като се има предвид формулата за обемната плътност на магнитните заряди $\rho_M = \mathrm{div}\left(\mu_0 \vec{H}\right)$, то за области, в които отсъствуват токове, т.е.: $\mathrm{rot}\,\vec{H} = \vec{\delta} = \vec{0}$, за скаларния магнитен потенциал φ_M може да се запише следната формула:

$$\varphi_M = \frac{1}{\mu_0 4\pi}\int_{(v)}\frac{\rho_M dV}{R}. \quad (7.6.33)$$

Както вече бе разгледано електрическата поляризация се обяснява с разместването на свързаните електрически заряди, при което се образуват диполи с електрически момент $\vec{p} = q\vec{l}$. Магнитната поляризация от своя страна се обяснява с движението на електрически заряди, които образуват електрокинетичен момент, подобен на момента на количеството движение в механиката. Основание за такова обяснение на намагнитеността е електрокинетичната природа на магнитното поле. То съпровожда токовете и действува на движещи се в него електрически заряди.

Преди да бъде открито магнитното поле на токовете са били известни постоянните магнити. За тях, т.е. за магнитните заряди Кулон е формулирал своя закон. След като е било установено, че свободни магнитни заряди не съществуват, това е било прието като единствена разлика между електрическите и магнитните явления. Създадената на базата на представата за магнитни заряди формална теория – магнитостатика е намерила широко приложение, тъй като чрез нея могат да бъдат правилно решени голям брой задачи, отнасящи се до статични магнитни полета.

7.7. Потенциални полета. Метод с разделяне на променливите

1. Встъпителни бележки

Електрическото поле в еднородна среда при зададено пространствено разпределение на зарядите, имащи обемна плътност ρ, може да бъде пресметнато, ако потенциалът φ в коя да е точка се определи по закона на Кулон. Например, при относителна диелектрична проницаемост $\varepsilon_r = 1$ по този закон се записва:

$$\varphi = \frac{1}{\varepsilon_0 4\pi}\int_{(V)}\frac{\rho dV}{R}. \qquad (7.7.1)$$

В случай, че в средата освен точковидни заряди с плътност ρ се намират още повърхностно разпределени заряди q_S с плътност σ и линейно разпределени заряди q_l с плътност τ, то горната формула добива вида:

$$\varphi = \frac{1}{\varepsilon_0 4\pi}\left[\int_{(V)}\frac{\rho dV}{R} + \int_{(S)}\frac{\sigma ds}{R} + \int_{(l)}\frac{\tau dl}{R}\right]. \qquad (7.7.2)$$

При зададено пространствено разпределение на поляризацията $P = P(x,y,z)$, към горните две формули трябва да бъде добавена съставка, дължаща се на поляризацията, т.е. към свободните заряди трябва да бъдат добавени свързаните заряди. При известно разпределение на поляризацията $P = P(x,y,z)$ потенциалът може да бъде определен чрез израза за потенциал на дипола, т.е.:

$$\varphi_P = \frac{1}{\varepsilon_0 4\pi}\int_{(V)}\frac{\vec{P}\vec{R}^0}{R^2}dV. \qquad (7.7.3)$$

За пресмятане на полето въз основа на закона на Кулон е необходимо да се знае разпределението на всички заряди и поляризацията на всички диелектрици, т.е. не е възможно да се пресметне полето, изхождайки от потенциалите, например, на дадена двойка електроди. Също така чрез закона на Кулон не е възможно да се пресметне полето и поляризацията на даден диелектрик при известни проницаемост на диелектрика и външно електрическо поле, предизвикващо поляризацията.

В електротехническата практика обикновено се поставя следната задача: Известни са геометрията на електродите и напрежението между тях и се търси полето. Тази задача въз основа на закона на Кулон не може да бъде решена.

Методът, който се основава на закона на Кулон (Максуел го е нарекъл пряк метод) има и друга по-важна особеност. Той съдържа в себе си представата за действие на разстояние – зарядът $dq = \rho dV$ създава съставка на потенциала $d\varphi = \frac{dq}{\varepsilon_0 4\pi R}$ в разглежданата точка, която се намира на разстояние R от заряда dq.

При пресмятане на полето чрез диференциалните му уравнения с частни производни нещата стоят по съвсем друг начин. Например, за случая на потенциално електрическо поле се използува диференциалното уравнение на Поасон–Лаплас:

$$\nabla^2\varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \qquad (7.7.4)$$

или в декартови координати:

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}. \qquad (7.7.5)$$

На това уравнение Максуел дава следното тълкуване: Сумата от вторите производни на потенциал φ в близост до разглежданата точка е свързана с плътността на заряда ρ в тази точка. Тук не се говори за връзка между стойността на потенциала φ в тази точка и стойността на плътността на заряда ρ в точка, която е отдалечена на крайно разстояние от разглежданата. По такъв начин диференциалното уравнение дава представата за действия, които се извършват между съседни части на средата, т.е. между съседни части на полето. Така от

представата за действие на разстояние се преминава към новите представи на теорията на полето.

От физическа гледна точка граничните условия, които са необходими при решаването на системата уравнения на полето, влияят върху резултата само с това, че те оказват влияние върху полето в съседни точки, а след това влиянието се предава от точка към точка и то с крайна скорост.

Разгледаното по-горе за потенциалните електрически полета се отнася и за потенциалните магнитни полета.

До обосноваването на съвременната теория на електромагнитното поле диференциалните уравнения с частни производни, или още наричани “уравнения на математическата физика”, не са се използували.

В общия случай пресмятането на полето е сложна задача и директното интегриране на уравненията е възможно само в някои прости случаи. В повечето случаи резултатът не може да бъде изразен чрез прости функции. Ето защо често се прилагат различни странични приоми за избягване на директното интегриране на диференциалните уравнения, например, всевъзможни начини на прилагане на теоремата на Гаус.

3. Интегриране на уравненията на Поасон-Лаплас

Пресмятането на безвихрови полета, чиито интензитет може да се представи чрез градиента на потенциала, се свежда до решаване на уравнението на Поасон-Лаплас. Ако се съпоставят обикновените диференциални уравнения, използувани в теория на веригите с уравненията с частни производни, намиращи приложение в теория на полето, то може да се констатира, че решението на първия тип уравнения е по-просто, тъй като става еднозначно след определянето на интеграционните константи от началните условия. По оношение на уравненията с частни производни освен интеграционни константи е необходимо да се определят още и произволни функции.

Изборът на тези функции и константи, които съответствуват на търсеното решение, се извършва въз основа на допълнителни условия, които правят задачата физически определена. Така напимер, при решаването на задачата за потенциално електрическо поле в дадена област не е достатъчно да се каже, че това поле трябва да удовлетворява уравнението на Лаплас, а е необходимо още да се знае с какви електроди се създава полето и какви са потенциалите им. Тези условия се наричат гранични.

Известно е, че в еднородна линейна среда при еднаква геометрична форма на електродите и еднаква потенциална разлика между тях се установява еднакво поле. Въз основа на това при решаване на уравненията на полето винаги следва да се очаква, че съществува единственно решение. Или другояче казано, всяко решение, което удовлетворява уравненията на полето и граничните условия е пълно и единствено. Това може да бъде доказано и математически.

В общия случай за определяне на полето вътре в някаква област, ограничена от повърхност S, е достатъчно да се зададе за тази повърхност стойността на потенциала (задача на Дирихле), т.е.:

$$\varphi|_S = f_1(S) \qquad (7.7.6)$$

или стойността на нормалната съставка на градиента (задача на Нейман), т.е.:

$$\left.\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right|_S = f_2(S), \qquad (7.7.7)$$

ако в цялата област се удовлетворява уравнението на Лаплас и средата, запълваща областта, е еднородна.

В редица технически задачи граничните условия се задават в смесена форма. В някои задачи граничните условия се задават чрез тангенциалната съставка на градиента на потенциала по повърхността, ограничаваща разглежданата област.

В случаите, когато полето може да се разпространява в безкрайното пространство, образуващо външната област за повърхността на един или няколко електрода, като гранични условия е необходимо да се въведат още и условията в безкрайността. Това са допълнителни гранични условия. Ако те са неопределени, то и самата задача остава неопределена.

Като гранични условия се разглеждат и условията на разделителната повърхност между две среди за случаите, когато в разглежданата област лежи границата между двете среди. При това в общия случай за всяка от средите се търсят отделни решения, които допълнително трябва да удовлетворяват граничните условия на разделителната им повърхност.

Тук следва да се отбележи, че колкото са по-пълни граничните условия, то толкова по-пълна и по-определена от физическа гледна точка става постановката на задачата. Например, при пресмятането на статични и стационарни полета не е необходимо да се задават началните условия като допълнение към граничните условия. При променливи полета обаче, задаването на началните условия е задължително. В тези случаи трябва да се знае разпределението на заряда или потенциала в разглежданата област в началния момент, тъй като то се изменя във времето.

Не винаги при пресмятането на потенциални полета се използуват диференциалните уравнения с частни производни. Широко приложение намират интегралните уравнения и някои други математически методи на пресмятане - особено методът на мрежата, методът на Монте Карло и др. Наред с аналитичните методи широко приложение намират и експерименталните методи на изследване на полето, особено в съчетание с използуването на компютърна техника.

3. Метод с разделяне на променливите

Методът с разделяне на променливите, известен още като метод на Фурие, се състои в представянето на търсената функция, например, на две координати $\varphi = \varphi(x, y)$ като произведение или сума от произведения на функции, всяка от които зависи само от една координата, например:

$$X_n = X_n(x) \text{ и } Y_n = Y_n(y). \qquad (7.7.8)$$

При това се предполага, че за произволно n произведението:

$$\varphi_n = X_n Y_n \qquad (7.7.9)$$

е решение на уравнението, макар и да не удовлетворява граничните условия. Тези условия трябва да удовлетворяват сума от такива решения, всяко от които е умножено с един или друг коефициент C_n, т.е.:

$$\varphi = \sum_n C_n \varphi_n = \sum_n C_n X_n Y_n . \qquad (7.7.10)$$

Очевидно е, че сумата от решения ще удовлетворява уравнението на Лаплас, ако го удовлетворява всяко едно от тях поотделно. Това следва от линейността на уравнението на Лаплас: $\nabla^2 \varphi = 0$. Израз (7.7.10) е и търсеното решение, тъй като удовлетворява граничните условия и изходното уравнение.

Методът на Фурие е много удобен, ако се подбере такава координатна система, в която се разделят променливите и лесно се формулират началните условия.

В тези случаи задачата се свежда до решаване на обикновени диференциални уравнения. Тук трудностите са свързани с намирането на онези функции или редове от функции, които удовлетворяват граничните условия.

Изложеният метод може да бъде приложен и при функции на три координати (x, y, z) и даже на четири координати (z, y, z, t). С увеличаване броя на независимите променливи, бързо нарастват и трудностите при решението на задачата.

Методът на Фурие ще бъде приложен при равнинно поле в декартови координати. В случая потенциалът се представя като произведение на две функции $X_n = X_n(x)$ и $Y_n = Y_n(y)$, т.е.: $\varphi_n = X_n Y_n$.

След заместване в уравнението на Лаплас и разделяне на произведението $X_n Y_n$, се получава:

$$\frac{1}{X_n Y_n}\nabla^2(X_n Y_n) = \frac{1}{X_n}\frac{\partial^2 X_n}{\partial x^2} + \frac{1}{Y_n}\frac{\partial^2 Y_n}{\partial y^2} = 0. \qquad (7.7.11)$$

При диференцирането по x в последния израз функцията Y_n се разглежда като константа, а при диференцирането по y като константа се разглежда функцията X_n. По такъв начин се разделят променливите като първият член в уравнение (7.7.11) зависи само от x, а вторият – само от y. Същевременно двата члена трябва да бъдат равни и противоположни по знак. Оттук следва, че те трябва да бъдат равни на константа, т.е.:

$$\frac{1}{X_n}\frac{\partial^2 X_n}{\partial x^2} = -\frac{1}{Y_n}\frac{\partial^2 Y_n}{\partial y^2} = K_n, \qquad (7.7.12)$$

откъдето се записва:

$$\frac{\partial^2 X_n}{\partial x^2} = X_n K_n \text{ и } \frac{\partial^2 Y_n}{\partial y^2} = -Y_n K_n, \qquad (7.7.13)$$

където K_n е произволна константа.

В последните две уравнения се съдържа само една независима променлива. Ето защо те могат да бъдат разглеждани като обикновени диференциални уравнения. В такъв случай решението може да бъде представено чрез тригонометрични и хиперболични синуси и косинуси или чрез съответните им експоненциални функции:

Ако $K_n = \kappa^2{}_n$, т.е.: $K_n > 0$, се записва:

$$\begin{vmatrix} X_n = a_n \operatorname{ch}\kappa_n x + b_n \operatorname{sh}\kappa_n x; \\ Y_n = c_n \cos\kappa_n y + d_n \sin\kappa_n y. \end{vmatrix} \qquad (7.7.14)$$

В случай, че $-K_n = \kappa^2{}_n$, т.е.: $K_n < 0$, то:

$$\begin{vmatrix} X_n = a_n \cos\kappa_n x + b_n \sin\kappa_n x; \\ Y_n = c_n \operatorname{ch}\kappa_n y + d_n \operatorname{sh}\kappa_n y. \end{vmatrix} \qquad (7.7.15)$$

При използуване експоненциални функции потенциалът се преставя като произведение от експоненти с имагинерен и реален степенен показател.

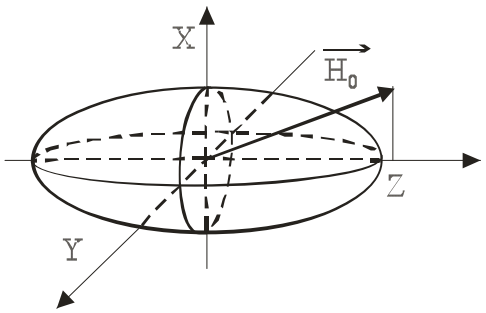
В някои случаи решението е удобно да се представи в смесена форма, например:

$$\varphi_n = A_n e^{-\kappa_n y} + B_n e^{\kappa_n y}\cos\kappa_n x. \qquad (7.7.16)$$

След намиране на общото решение се използуват граничните условия, чрез които се избират необходимите функции и константи.

7.8. Поляризиран елипсоид. Размагнитващи фактори. Коефициенти на деполяризация

Полето на еднородно поляризиран елипсоид може да бъде пресметнато чрез уравнението на Лаплас и граничните условия в подходяща за случая елипсоидална координатна система. Въпреки това обаче, пресмятането и функциите, чрез които се изразява полето извън елипсоида са доста сложни. Прости изрази се получават само за полето на еднородно поляризиран елипсоид или за елипсоид, намиращ се във външно еднородно поле (фиг.7.8.1). Вътре в елипсоида интензитетът на полето, който се обуславя от еднородната му поляризация, е също еднороден. Това свойство притежават само тела, които имат форма на елипсоид.



Фиг.7.8.1

Разглежда се елипсоид, намиращ се в еднородно външно магнитно поле с интензитет $\vec{H}_0$ (фиг.7.8.1) . Този елипсоид се намагнитва и в него се установява намагнитеност $\vec{M}$. Вътре в елипсоида интензитетът на полето, който се обуславя от еднородната му магнитна поляризация, е също еднороден и съставките му са:

$$H_x = -N_x M_x;\ H_y = -N_y M_y \quad \text{и} \quad H_z = -N_z M_z, \tag{7.8.1}$$

където x, y и z са координатите, насочени по главните оси на елипсоида a, b и c; N_x, N_y и N_z - размагнитващите фактори, които зависят от съотношението между осите.

Размагнитващите фактори притежават следното свойство:

$$N_x + N_y + N_z = 1. \tag{7.8.2}$$

В случай на електрически поляризиран елипсоид с поляризация $\vec{P}$, съставките на интензитета на електрическото поле, вътре в елипсоида, обусловени от поляризацията $\vec{P}$, са:

$$E_x = -N_x \frac{P_x}{\varepsilon_o};\ E_y = -N_y \frac{P_y}{\varepsilon_o} \text{ и } E_z = -N_z \frac{P_z}{\varepsilon_o}. \tag{7.8.3}$$

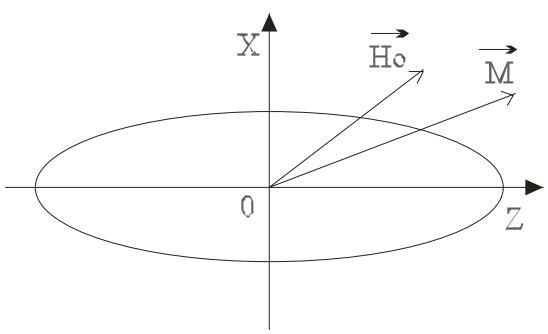
Тук коефициентите N_x, N_y и N_z се наричат коефициенти на деполяризацията

При удължен кръгов елипсоид, за който между осите a, b и c е в сила съотношението $a = b \le c$ се записва:

$$N_x = N_y \neq N_z \tag{7.8.4}$$

Подобен на горния израз се записва и за сплеснат кръгов елипсоид, за който между осите a, b и c е в сила съотношението $a = b \ge c$.

Познаването на коефициентите N_x, N_y и N_z е важно за практиката от гледна точка на това, че често срещани тела могат да бъдат представени приблизително като елипсоиди. Така например, дискът може да бъде разглеждан като сплеснат кръгов елипсоид, а цилиндричният прът - като удължен елипсоид. Тук трябва да се има предвид това, че еднородна поляризация обуславя еднородно поле в съответствие с равенства (7.8.1) и (7.8.3) само при случая на кръгов елипсоид, и строго само в този случай има смисъл да се говори за размагнитващи фактори и коефициенти на деполяризацията.



Фиг.7.8.2

От съображения на симетрия и въз основа на условие (7.8.1) за някои често срещани форми като сфера, дълъг цилиндричен прът, безкрайно дълга пластина

могат да бъдат записани стойностите на коефициентите N_x, N_y и N_z.

Например, за сфера $N_x = N_y = N_z = \frac{1}{3}$, а за безкрайно дълъг цилиндричен прът в напречно поле $N_x = N_y = \frac{1}{2}$. Във втория случай за голямата ос на елипсоида се записва, че $c \to \infty$. При това коефициентът $N_z \to 0$ тъй като деполяризиращото действие на зарядите на бекрайно отдалечените краища на елипсоида е равно на нула. При напречно намагнитени пластини пък $N_x = N_y = 0$ и $N_z = 1$.

Разглежда се удължен кръгов елипсоид със зададена магнитна проницаемост μ_r, намиращ се в еднородно външно магнитно поле (фиг. 7.8.2), като векторът му $\vec{H}_0$ лежи в равнината xoz, т.е.:

$$\vec{H}_0 = H_{0x}\vec{x}^0 + H_{0z}\vec{z}^0 . \qquad (7.8.5)$$

Като се има предвид израз (7.8.1), за съставките на интензитета на магнитното поле $\vec{H}$' вътре в елипсоида се записва:

$$H_x' = H_{0x} - N_x M_x \text{ и } H'_x = H_{0z} - N_z M_z , \qquad (7.8.6)$$

откъдето като се отчете връзката между намагнитеността $\vec{M}$ и интензитета $\vec{H}$', то съответните съставки на вектор $\vec{M}$ ще имат вида:

$$M_x = (H_{0x} - N_x M_x)\alpha_M \text{ и } M_z = (H_{0z} - N_z M_z)\alpha_M . \qquad (7.8.7)$$

Оттук за тези съставки се записва:

$$M_x = \frac{\alpha_M}{1+\alpha_M N_x} H_{0x} \text{ и } M_z = \frac{\alpha_M}{1+\alpha_M N_z} H_{oz} . \qquad (7.8.8)$$

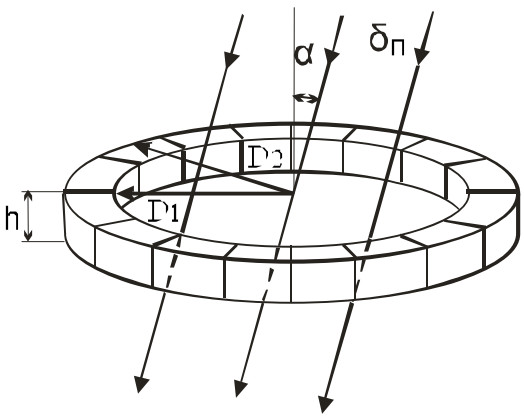
Ако съставките M_x и M_z от изрази (7.8.8) се заместят във формули (7.8.6), то за съставките на интензитета на полето вътре в елипсоида H'_x и H'_z се получава:

$$\left| \begin{array}{l} H'_x = \left(1 - \frac{\alpha_M N_x}{1+\alpha_M N_x}\right) H_{0x} = \frac{1}{1+\alpha_M N_x} H_{0x} ; \\ H'_z = \left(1 - \frac{\alpha_M N_z}{1+\alpha_M N_z}\right) H_{oz} = \frac{1}{1+\alpha_M N_z} H_{0z} . \end{array} \right. \qquad (7.8.9)$$

Като се има предвид, че коефициентите N_x и N_z са различни, т.е.: $N_x \neq N_z$, то е в сила неравенството: $\frac{M_x}{M_z} \neq \frac{H_{0x}}{H_{0z}}$. И действително, въз основа на формула (7.8.8), се получава:

$$\frac{M_x}{M_z} = \frac{1+\alpha_M N_z}{1+\alpha_M N_x} \cdot \frac{H_{0x}}{H_{0z}} \neq \frac{H_{0x}}{H_{0z}} .$$

Горното неравенство означава, че векторите $\vec{H}_0$ и $\vec{M}$ няма да съвпадат по посока, като намагнитеността $\vec{M}$ се стреми да се доближи до голямата ос на елипсоида – оста c, която представлява ос на лесното намагнитване.



фиг.7.8.3

При разглеждането е прието, че материалът на елипсоида е изотропен, т.е. относителната му магнитна проницаемост μ_r и възприемчивост α_M не зависят от посоката на магнитното поле и от координатите. Въпреки това е в сила неравенство (7.8.10) и свързаното с него несъвпадане на посоките на векторите $\vec{H}_0$ и $\vec{M}$, което е характерно за анизотропна среда. В случая анизотропията се дължи на разликата в дължините на осите на елипсоида, т.е. това е анизотропия на формата.

Елипсоиди от диелектрик или проводящ материал намират приложение, например, за повишаване на чувствителността на индуктивните преобразуватели на интензитета на нискочестотно електрическо поле. Тези преобразуватели представляват тороидални бобини с феромагнитна сърцевина (фиг.7.8.3).

При синусоидално електрическо поле с интензитет $\dot{E}$ в бобината се индуктира ЕДН $\dot{E}$, което се определя по формулата:

$$\dot{E} = j\omega M \dot{I}_П , \qquad (7.8.11)$$

където M е взаимната индуктивност на еквивалентната навивка, която образува пълният ток, обхващащ тороидалната бобина и навивките й;

$\dot{I}_П$ - измерваната съставка на пълния ток.

Взаимната индуктивност M се дава от израза:

$$M = \frac{\mu_0 \mu_r}{2\pi} w.h.\ln\frac{D_2}{D_1} , \qquad (7.8.12)$$

където μ_r е относителната магнитна проницаемост на сърцевината;

w - броят на навивките на тороидалната бобина;

h - аксиалният размер на сърцевината;

D_1 и D_2 - вътрешният, респективно, външният диаметър на сърцевината.

Съответният израз за съставката на пълния ток $\dot{I}_П$ е:

$$\dot{I}_П = \dot{\delta}_П S_0 \cos\alpha = (\gamma + j\omega\varepsilon_0\varepsilon_r)\dot{E} S_0 \cos\alpha , \qquad (7.8.13)$$

където $\dot{\delta}_П$ е комплексната ефективна стойност на плътността на пълния ток;

S_0 - площта на отвора на тороидалната бобина;

α - ъгълът между линиите на вектора плътност на пълния ток и остта на бобината;

γ - специфичната проводимост на средата;

ω - ъгловата честота на изследваното електрическо поле;

ε_r - относителната диелектрическа проницаемост на средата;

$\dot{E}$ - комплексната ефективна стойност на интензитета на полето.

След заместване на изрази (7.8.12) и (7.8.13) във формула (7.8.11) за ЕДН $\dot{E}$ се получава:

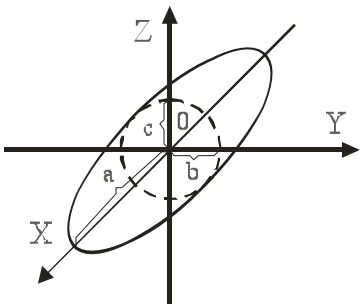
$$\dot{E} = j\frac{\mu_0\mu_r}{2\pi}(\gamma + j\omega\varepsilon_0\varepsilon_r)\omega w \dot{E} S_0 h.\left(\ln\frac{D_2}{D_1}\right)\cdot\cos\alpha . \qquad (7.8.14)$$

Ако се приеме, че ъгъл $\alpha = 0$, т.е.: $\cos\alpha = 1$, за проводяща среда се записва:

$$\dot{E} = j\frac{\mu_0\mu_r}{2\pi}\gamma\omega w S_0 h.\left(\ln\frac{D_2}{D_1}\right)\cdot\dot{E} . \qquad (7.8.15)$$

Съответният израз за диелектрична среда е:

$$\dot{E} = -\frac{\mu_0\mu_r}{2\pi}\varepsilon_0\varepsilon_r w\omega^2 S_0 h.\left(\ln\frac{D_2}{D_1}\right)\cdot\dot{E}.$$



Фиг.7.8.4

От последните два израза, може да се констатира, че ЕДН $\dot{E}$ е пропорционално и на специфичната проводимост на средата γ и респективно на относителната й диелектрична проницаемост ε_r. Това позволява индуктивните преобразуватели от разглеждания тип да бъдат използувани и за определяне параметрите на средата.

За повишаване чувствителността на индуктивния преобразувател за случая на диелектрична среда с относителна проницаемост ε_{r2} се използува аксиална сърцевина, представляваща удължен кръгов елипсоид от материал с висока относителна диелектрична проницаемост ε_{r1}. Голямата ос на елипсоида съвпада с оста на тороидалната бобина и с координатната ос ox (фиг.7.8.4). В този случай за ЕДН $\dot{E}$ се записва:

$$\dot{E} = -\frac{\mu_0\mu_r}{2\pi}\omega^2\varepsilon_0\varepsilon_{re} w S_0 h.\left(\ln\frac{D_2}{D_1}\right)\cdot\dot{E}, \qquad (7.8.17)$$

където ε_{re} се нарича относителна еквивалентна диелектрична проницаемост на тялото, която се определя по формулата:

$$\varepsilon_{re} = \frac{\varepsilon_{r1}}{1 + N_x(\varepsilon_{r1} - 1)}\ . \qquad (7.8.18).$$

При кръгов удължен елипсоид за осите му a, b и c се записва неравенството: $a > b = c$. Ако е налице условието: $\left(\frac{b}{a}\right)^2 << 1$, то коефициентът N_x се определя от следната приблизителна формула:

$$N_x \approx \left(\frac{b}{a}\right)^2\left(\ln\frac{2a}{b} - 1\right). \qquad (7.8.19)$$

При последната постановка за коефициентите N_x, N_y и N_z може да се запише неравенството:

$$N_x << N_y = N_z \approx \frac{1}{2}. \qquad (7.8.20)$$

Стойностите на коефициента N_x в зависимост от съотношението между осите на елипсоида a и $b = c$ се дават обикновено в таблица. Например, при съотношение $\lambda = \frac{a}{b} = 3{,}2$ за коефициента N_x се получава $N_x = 0{,}1$. Това означава, че еквивалентната диелектрична проницаемост ε_{re} е близка до проницаемостта на материала на елипсоида ε_{r1}. Така значително нараства стойността на ЕДН $\dot{E}$, индуктирано в тороидалната бобина, в сравнение със случая на отсъствие на аксиална сърцевина.

При тороидална бобина с аксиална сърцевина от проводящ материал със специфична проводимост γ_1, намираща се в проводяща среда със специфична проводимост γ_2 за ЕДН $\dot{E}$ се записва:

$$\dot{E} = j\frac{\mu_0\mu_r}{2\pi}\omega\gamma_e w S_0 h\left(\ln\frac{D_2}{D_1}\right)\cdot\dot{E}, \qquad (7.8.21)$$

където γ_e се нарича еквивалентна специфична проводимост на тялото, която се определя по формулата:

$$\gamma_e = \frac{\gamma_2}{\frac{\gamma_2}{\gamma_1} + \frac{N_x(\gamma_1 - \gamma_2)}{\gamma_1}} \qquad (7.8.22)$$

Ако проводимостта на елипсоида γ_1 е значително по-голяма от проводимостта на средата γ_2, т.е.: $\gamma_1 >> \gamma_2$, то за еквивалентната проводимост γ_e се записва: $\gamma_e \approx \frac{\gamma_2}{N_x}$. Например, при съотношение между осите на елипсоида $\lambda = \frac{a}{b} = 3{,}2$, то коефициентът $N_x = 0{,}1$ и следователно $\gamma_e = 10\gamma_2$, т.е. стойността на ЕДН $\dot{E}$ нараства десетократно.

При използуване на аксиална сърцевина от проводящ материал със специфична проводимост γ_1 при тороидална бобина, намираща се в непроводяща среда с относителна диелектрична проницаемост ε_{r1}, за ЕДН $\dot{E}$ се записва:

$$\dot{E} = j\frac{\mu_0\mu_r}{2\pi}\omega\gamma_e' w S_0 h\left(\ln\frac{D_2}{D_1}\right)\cdot\dot{E}, \qquad (7.8.23)$$

където γ_e' се нарича също еквивалентна проводимост на тялото.

В случая проводимостта γ_e' се определя по формулата:

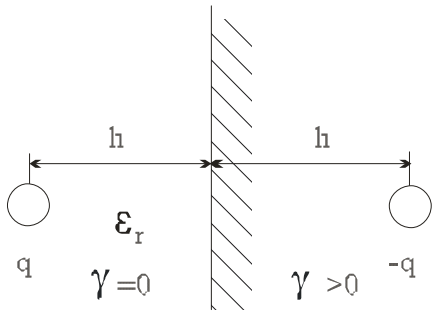
$$\gamma_e' = \omega\varepsilon_o\varepsilon_{r1}\left[\frac{\omega\varepsilon_o\varepsilon_{r1}}{\gamma_1} + N_x\left(1 - \frac{\omega\varepsilon_o\varepsilon_{r1}}{\gamma_1}\right)\right]. \qquad (7.8.24)$$

Тук величината $\omega\varepsilon_0\varepsilon_{r1}$ може да бъде разглеждана като специфична проводимост на средата. Ако е налице условието: $\omega\varepsilon_0\varepsilon_{r1} << \gamma_1$, то за еквивалентната проводимост γ_e' се записва: $\gamma_e' \approx \frac{\omega\varepsilon_o\varepsilon_{r1}}{N_x}$, т.е. и в този случай значително нараства стойността на ЕДН $\dot{E}$.

7.9. Метод с огледални образи

Методът с огледални образи се основава на принципа на наслагването и се прилага при потенциални полета в линейни среди. При този метод се използуват и условията за единственост и еднозначност на решенията на уравненията на полето при едни и същи гранични условия.

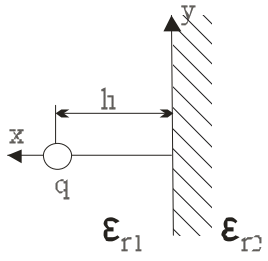
Този метод е разработен от Келвин и доразвит от друг английски физик Сирл и намира приложение при решаването на редица важни практически задачи. Например, с помощта на метода полето на електрически заряд, намиращ се в диелектрична среда в близост до проводяща повърхност може да бъде намерено като влиянието на проводящата повърхност или по-точно на индуктирания върху нея заряд се замени с полето на огледалния образ на дадения заряд с обратен знак (фиг.7.9.1). И действително, в полето на два такива



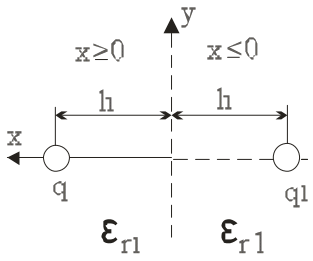
Фиг.7.9.1

заряда средната повърхност поради симетрия се оказва еквипотенциална, както това се изисква от действителните условия.

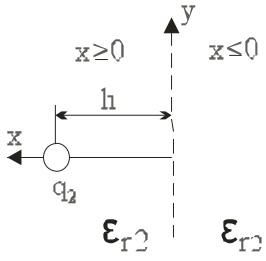
Разглежда се по-общата задача: зарядът q е разположен в среда с диелектрична проницаемост ε_{r1} на разстояние h от равнинна повърхност, ограничаваща полупространството с диелектрична проницаемост ε_{r2} (фиг.7.9.2) и се търси полето в двете среди. За целта се приема, че полето в първата среда се



Фиг.7.9.2



Фиг.7.9.3



Фиг.7.9.4

създава от заряда q и неговото непълно отражение $q_1 = \kappa_1 q$ като зарядът q се намира на разстояние h зад граничната повърхност и че двата заряда са разположени в еднородна и неограничена среда с проницаемост ε_{r1} (фиг.7.9.3). От друга страна се приема, че полето във втората среда се създава от някакъв заряд $q_2 = \kappa_2 q$, намиращ се на мястото на действителния заряд q, и че цялото пространство е запълнено със среда с проницаемост ε_{r2} (фиг.7.9.4). Тъй като полето в първата област, чиято среда има проницаемост ε_{r1}, се обуславя от зарядите q и q_1, а полето във втората област, чиято среда има проницаемост ε_{r2}, се обуславя от заряда q_2, то ако тези предположения са правилни, на границата между двете области трябва да се удовлетворяват граничните условия, т.е.:

$$E_{t2} = E_{t1} \text{ и } \varepsilon_{r1} E_{n1} = \varepsilon_{r2} E_{n2}. \qquad (7.9.1)$$

Тук трябва да се има предвид това, че в действителност съществува само зарядът q в първата област.

При направените предположения потенциалът на полето в първата област, за която $x \geq 0$, се определя от равенството:

$$\varphi_1 = \frac{q}{\varepsilon_0 \varepsilon_{r1} 4\pi} \left\{ \left[(x-h)^2 + y^2 + z^2 \right]^{-\frac{1}{2}} + \kappa_1 \left[(x+h)^2 + y^2 + z^2 \right]^{-\frac{1}{2}} \right\}. \qquad (7.9.2)$$

За втората област, за която $x \leq 0$, за потенциала се записва:

$$\varphi_2 = \frac{\kappa_2 q}{\varepsilon_0 \varepsilon_{r2} 4\pi} \left[(x-h)^2 + y^2 + z^2 \right]^{-\frac{1}{2}}. \qquad (7.9.3)$$

Ако се приеме, че при $x = 0$ потенциалите φ_1 и φ_2 са равни, т.е.: $\varphi_1\big|_{x=0} = \varphi_2\big|_{x=0}$, то по този начин автоматично се изпълнява условието за равенство на тангенциалните съставки на интензитетите, т.е.:

$$\frac{1}{\varepsilon_{r1}} \left\{ \left[h^2 + y^2 + z^2 \right]^{-\frac{1}{2}} + \kappa_1 \left[h^2 + y^2 + z^2 \right]^{-\frac{1}{2}} \right\} = \frac{\kappa_2}{\varepsilon_{r2}} \left[h^2 + y^2 + z^2 \right]^{-\frac{1}{2}}. \qquad (7.9.4)$$

От последното равенство се записва:

$$\frac{(1+\kappa_1)}{\kappa_2} = \frac{\varepsilon_{r1}}{\varepsilon_{r2}}. \qquad (7.9.5)$$

Граничното условие за нормалните съставки на интензитетите се изразява чрез производните на потенциалите по x при $x = 0$, т.е.:

$$\varepsilon_{r1}\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}=\varepsilon_{r2}\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}. \qquad (7.9.6)$$

След диференцирането на потенцилите φ_1 и φ_2 по x се получава:

$$-\frac{1}{2}\left[(x-h)^2+y^2+z^2\right]^{-\frac{3}{2}}2(x+h)-\frac{1}{2}\kappa_1\left[(x+h)^2+y^2+z^2\right]^{-\frac{3}{2}}2(x+h)=$$

$$=-\frac{1}{2}\kappa_2\left[(x-h)^2+y^2+z^2\right]^{-\frac{3}{2}}2(x-h), \qquad (7.9.7)$$

откъдето при $x=0$ се достига до равенството:

$$1-\kappa_1=\kappa_2. \qquad (7.9.8)$$

След заместване на κ_2 от израз (7.9.8) в равенство (7.9.5) се записва:

$$\frac{(1+\kappa_1)}{(1-\kappa_1)}=\frac{\varepsilon_{r1}}{\varepsilon_{r2}}, \qquad (7.9.9)$$

откъдето за коефициента κ_1 се получава:

$$\kappa_1=\frac{(\varepsilon_{r1}-\varepsilon_{r2})}{(\varepsilon_{r1}+\varepsilon_{r2})}. \qquad (7.9.10)$$

Ако κ_1 от последния израз се замести в равенство (7.9.8) се записва:

$$1-\frac{(\varepsilon_{r1}-\varepsilon_{r2})}{(\varepsilon_{r1}+\varepsilon_{r2})}=\kappa_2, \qquad (7.9.11)$$

откъдето за коефициента κ_2 се получава:

$$\kappa_2=\frac{2\varepsilon_{r2}}{(\varepsilon_{r1}+\varepsilon_{r2})}. \qquad (7.9.12)$$

Знакът на коефициента κ_1, съответно на заряда $q_1=\kappa_1 q$ съгласно израз (7.9.10) се определя от разликата между проницаемостите ε_{r1} и ε_{r2}. Ако $\varepsilon_{r1}>\varepsilon_{r2}$, то $\kappa_1>0$ и като че линиите на полето се стремят да не влизат във втората област и обратно, ако $\varepsilon_{r1}<\varepsilon_{r2}$, то $\kappa_1<0$ и те се привличат от втората област и се стремят да проникнат в нея.

При еднородна среда, т.е., когато $\varepsilon_{r1}=\varepsilon_{r2}$, то $\kappa_1=0$ и $\kappa_2=1$.

При условията на статиката в проводяща среда поле отсъствува, т.е.: $E_2=0$. Това е равносилно на условието: $\varepsilon_{r2}\to\infty$ и κ_1 = -1, т.е. се извършва пълно отражение с изменение на знака.

Всички направени по-горе изводи за електростатиката са приложими и за задачи на магнитостатиката. Например, ако във въздух $(\mu_{r1}=1)$ е поставен постоянен магнит с момент $\vec{M}$, който е разположен в близост до равнинна повърхност, отделяща пространството, чиято среда има проницаемост μ_{r2}, то по метода с огледалните образи се приема, че магнитното поле във въздуха се създава от действителния магнит и огледалния му образ с момент $\kappa_2\vec{M}$.

Методът с огледални образи намира приложение в много електротехнически задачи, например, случай на проводник с ток, намиращ се в близост до гранична повърхност, разделяща две различни магнитни среди с проницаемости μ_{r1} и μ_{r2}, случай на екраниране на полето на проводник с ток от стоманен лист и др..

Ако се продължи аналогията с електростатиката се достига до следните резултати:

$$\kappa_1 = \frac{\mu_{r1} - \mu_{r2}}{\mu_{r1} + \mu_{r2}} \quad \text{и} \quad \kappa_2 = \frac{2\mu_{r2}}{\mu_{r1} + \mu_{r2}} \ . \tag{7.9.13}$$

7.10. Метод на функцията на комплексната променлива

Методът с функцията на комплексната променлива, наричан още метод с комформно преобразуване, намира приложение при изследване на равнинни полета, при които потенциалът е функция само на две координати x и y, т.е.: $\varphi = \varphi(x, y)$.

Ако се представят координатите в комплексна форма, т.е.: $z = x + jy$, може да бъде образувана функция на тези координати като функция на комплексната променлива z, т.е.:

$$W_{(z)} = u + jv, \tag{7.10.1}$$

където u и v са функции на x и y, т.е.: $u = u(x, y)$ и $v = v(x, y)$.

Например, ако $W = z^2$, то $W = u + jv = (x + jy)^2 = x^2 - y^2 + j2xy$, откъдето за u и v се получава: $u = x^2 + y^2$ и $v = 2xy$.

Всички функции $W = W(z)$, които се наричат аналитични, имат производни по z, т.е.:

$$\frac{dW}{dz} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{W(z + \Delta z) - W(z)}{\Delta z} \ , \tag{7.10.2}$$

които не зависят от това, как е избран нарастъкът Δz в близост до разглежданата точка и по какъв път той клони към нула. Това е валидно за производни от произволен ред. В частност за производните от първи и втори ред се записва съответно :

$$\frac{\partial W}{\partial z} = \frac{\partial W}{\partial x} = \frac{\partial W}{j\partial y} \quad \text{и} \quad \frac{\partial^2 W}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} = -\frac{\partial^2 W}{\partial y^2}. \tag{7.10.3}$$

За първата производна на разглежданата функция $W = z^2$ се получава:

$$\frac{\partial W}{\partial z} = 2z = \frac{\partial W}{\partial x} = 2(x + jy) = \frac{\partial W}{j\partial y} = \frac{2j}{j}(x + jy) = 2(x + jy).$$

Ако се запише втората производна на функцията $W = W(z)$, като се имат предвид формули (7.10.1) и (7.10.3) се получава :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + j\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = -\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - j\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}. \tag{7.10.4}$$

От последния израз може да се установи, че функциите $u = x^2 + y^2$ и $v = 2xy$ удовлетворяват уравнението на Лаплас, т.е.:

$$\begin{cases} \nabla^2 u = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 ; \\ \nabla^2 v = \dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0 . \end{cases} \tag{7.10.5}$$

От последните равенства може да се заключи, че функциите u и v могат да бъдат разглеждани като ортогонални, т.е. ако се положи, че линиите $u = \text{const}$ са линиите на потенциала (еквипотенциалните линии), то линиите $v = \text{const}$ са линиите на потока.

Ортогоналността на лините $u = \text{const}$ и $v = \text{const}$ се доказва чрез съставяне на скаларното произведение на градиентите им, т.е.:

$$\left|\begin{array}{l}\nabla u = \dfrac{\partial u}{\partial x}\overset{\rightarrow 0}{x} + \dfrac{\partial u}{\partial y}\overset{\rightarrow 0}{y}\ ; \\ \nabla v = \dfrac{\partial v}{\partial x}\overset{\rightarrow 0}{x} + \dfrac{\partial v}{\partial y}\overset{\rightarrow 0}{y}\ .\end{array}\right. \qquad (7.10.6)$$

откъдето за скаларното произведение $\nabla u.\nabla v$ се получава:

$$\nabla u.\nabla v = \frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}. \qquad (7.10.7)$$

Въз основа на първата от формулите (7.10.3) се записва:

$$\frac{\partial W}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} + j\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial W}{j\partial y} = -j\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y}\ , \qquad (7.10.8)$$

откъдето се получават равенствата:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{и} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}, \qquad (7.10.9)$$

известни под названието условия на Коши - Риман.

Като се имат предвид тези условия, от израз (7.10.7) може да се установи, че:

$$\nabla u.\nabla v = \frac{\partial u}{\partial x}\left(-\frac{\partial u}{\partial y}\right) + \frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial u}{\partial x} = 0, \qquad (7.10.10)$$

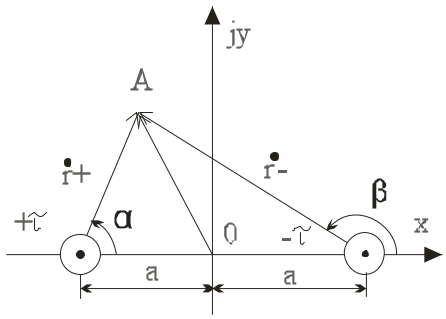
т.е се получи, че скаларното произведение на градиентите на функциите u и v е равно на нула, което е и условието за ортогоналност на линиите $u = \text{const}$ и $v = \text{const}$.

Като пример се разглежда функцията $W = W(z)$ от вида:

$$W = u + jv = \tau' \ln\frac{z-a}{z+a}, \qquad (7.10.11)$$

където комплексната величина $z = x + jy$ определя точка в равнината $(x,\ jy)$.

Може да се установи,че функцията $W = W(z)$ от вида (7.10.11) описва електрическото поле на две заредени оси, разположени в точките $z = -a$ и $z = a$. При това в точката $z = -a$ зарядът е положителен, т.е. $+\tau$, а в точката $z = a$ зарядът е отрицателен, т.е. $-\tau$.



Фиг.7.10.1

При това функцията $u = R_e[W]$ изразява потенциала в точка A (фиг.7.10.1). И действително, ако се запише: $z + a = \dot{r}_+ = r_+ e^{j\alpha}$ и $z - a = \dot{r}_- = r_- e^{j\beta}$, то първият вектор свързва разглежданата точка z, т.е. точка A, с положително заредената ос, а вторият вектор – с отрицателно заредената ос.

В такъв случай за функцията $W = W(z)$ се записва:

$$W = u + j\upsilon = \tau' \ln\frac{z-a}{z+a} = \tau' \ln\frac{r_- e^{j\beta}}{r_+ e^{j\alpha}} = \tau' \ln\frac{r_-}{r_+} e^{j(\beta-\alpha)} = \tau' \ln\frac{r_-}{r_+} + j\tau'(\beta-\alpha), \qquad (7.10.12)$$

откъдето за функциите u и v се получава:

$$u = \tau' \ln\frac{r_-}{r_+} \quad \text{и} \quad v = \tau'(\beta-\alpha). \qquad (7.10.13)$$

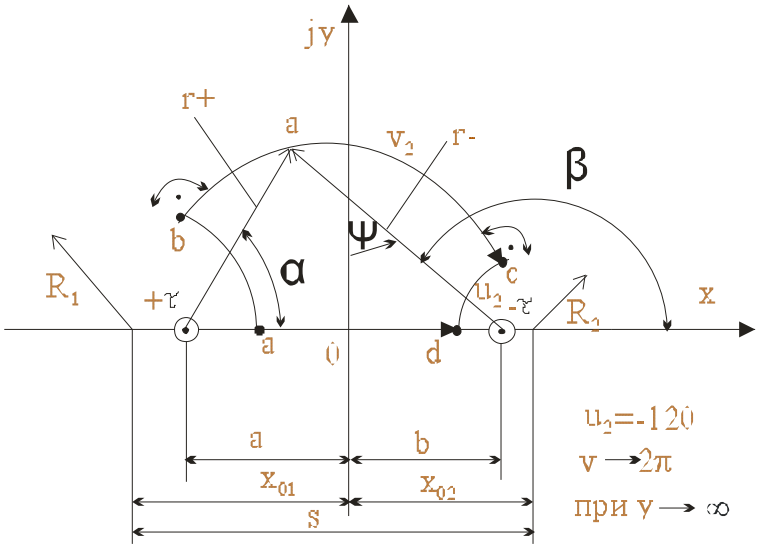
Тези две уравнения са съответно уравнения на еквипотенциалните линии, т.е.:

$$u = \tau' \ln\frac{r_-}{r_+} = \text{const} \quad \text{при} \quad \frac{r_-}{r_+} = \text{const}$$

и на линиите на потока (полето), т.е.:
$v = \tau'(\beta - \alpha) = \text{const}$ при $\beta - \alpha = \text{const}$.

Уравнения (7.10.13) могат да бъдат разглеждани освен като уравнения на полето на две заредени оси още и като уравнения на полето на два паралелни кръгови цилиндъра, чиито повърхности съвпадат с еквипотенциалите u_1 и u_2.

Картината на електрическото поле на две заредени оси в равнината $z = x + jy$ е показана на фиг.7.10.2 . Тя може да бъде разглеждана като деформиран образ на най-простото еднородно поле, което в равнината $W = u + jv$ има еквипотенциални линии $u = \text{const}$ и линии на потока (полето) $v = \text{const}$, които съвпадат с декартовите координати (фиг.7.10.3).



фиг.7.10.2

В общия случай образът на линиите на еднородното поле в равнината $z = x + jy$ се изразява с аналитичната функция $W = f(z)$. В случай на поле на две заредени оси, тази функция има вида (7.10.11).

Изобразяването с аналитичните функции $W = f(z)$ или $z = f^{-1}(W)$ притежава важната особеност, че то е комформно. Това означава, че всички ортогонални линии се преобразуват в ортогонални, а кои да е достатъчно малки геометрични фигури при изобразяването остават подобни. Така например, праволинейният правоъгълник $abcd$ в равнината $W = u + jv$ от фиг.7.10.3 се изобразява в криволинеен правоъгълник $abcd$ в равнината $z = x + jy$ (фиг.7.10.2).

Комформното преобразуване е еднозначно, т.е. всяка линия u и v в равнината W еднозначно определя съответните линии u и v в равнината z. Всичко това следва от обстоятелството, че всички аналитични функции на комплексната променлива z, т.е. функциите $W = f(z)$, удовлетворяват уравненията на Лаплас $\nabla^2 u = 0$ и $\nabla^2 v = 0$.

Изложеното по-горе обяснява защо методът за пресмятане на полета, основаващ се на използуване на функции на комплексна променлива, се нарича още метод с комформно преобразуване (изобразяване).

И действително, еквипотенциалните линии ab и cd от фиг.7.10.3, съответствуващи на потенциали $u_1 = 8{,}95\ \text{V}$ и $u_2 = -12\ \text{V}$, се преобразуват комформно в дъги от окръжности ab и cd на фиг.7.10.2, като дъгата ab е с по-голям радиус R_1, тъй като потенциалът u_1 е с по-малка абсолютна стойност от потенциала u_2, на който съответствуа дъгата cd с радиус R_2.

Аналогично линията $v_1 = \pi$ от фиг.7.10.3 се преобразува в линията v_1 на фиг. 7.10.2, съвпадаща с реалната ос, тъй като тук за коя да е точка от нея се получава: $\beta - \alpha = \pi - 0 = \pi$. Респективно, линията $v_2 = \frac{\pi}{2}$ от фиг.7.10.3 се преобразува в дъга от окръжност v_2 на фиг.7.10.2, за всяка точка от която: $\beta - \alpha = \frac{\pi}{2}$.

При метода с комформно преобразуване се разглеждат две задачи: права и обратна. При правата задача са известни еквипотенциалните линии в равнината z. Обикновено са известни две линии във връзка с това, че полето се създава с два електрода, повърхността на всеки от които е еквипотенциална. Търси се такава функция $W = f(z)$ на комплексната променлива $z = x + jy$, чиято реална част u удовлетворява уравнението $u = const$. Ако такава функция е намерена, то въз основа на теоремата за единственост на полето, тя правилно ще го описва във всички точки. В общия случай досега не е известен общ метод за намиране на функцията $W = f(z)$. Ако формата на електродите може да бъде представена с начупена линия от праволинейни отрези, то задачата за определянето на тази функция може да бъде решена в общ вид поне принципно чрез така наречения интеграл на Кристофел–Шварц.

Обратната задача се формулира по следния начин: Зададена е някаква аналитична функция $W = f(z)$. Трябва да се изясни взаимното комформно преобразуване на какви полета може да бъде осъществено с помощта на тази функция.

Интензитетът на електрическото поле $\vec{E}$ може да бъде изразен чрез функцията $W = f(z)$ на комплексната променлива $z = x + jy$. Ако се приеме, че функцията $u = u(x, y)$ е потенциала, то:

$$\vec{E} = -\text{grad}\, u = -\frac{\partial u}{\partial x}\vec{x}^{0} - \frac{\partial u}{\partial y}\vec{y}^{0} . \qquad (7.10.14)$$

Като се има предвид, че съгласно изрази (7.10.3) $\frac{\partial W}{\partial z} = \frac{\partial W}{\partial x} = \frac{\partial W}{j\partial y}$, то се получава:

$$\frac{\partial W}{\partial z} = \frac{\partial u}{\partial x} + j\frac{\partial v}{\partial x}. \qquad (7.10.15)$$

Тъй като съгласно равенства (7.10.9) $\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}$, то следва, че:

$$\frac{\partial W}{\partial z} = \frac{\partial u}{\partial x} - j\frac{\partial u}{\partial y}. \qquad (7.10.16)$$

Записва се спрегнатият комплекс на израз (7.10.16), т.е.:

$$\frac{\partial \overset{*}{W}}{\partial z} = \frac{\partial u}{\partial x} + j\frac{\partial u}{\partial y}. \qquad (7.10.17)$$

Оттук следва, че :

$$-\frac{\partial \overset{*}{W}}{\partial z} = -\frac{\partial u}{\partial x} - j\frac{\partial u}{\partial y}. \qquad (7.10.18)$$

Ако се сравнят изрази (7.10.14) и (7.10.18) се достига до следната формула:

$$\vec{E} = -\frac{\partial \overset{*}{W}}{\partial z}. \qquad (7.10.19)$$

Тук за единичните вектори $\vec{x}^0$ и $\vec{y}^0$ се записва: $\vec{x}^0 = \vec{1}$ и $\vec{y}^0 = \vec{j}$.

Във връзка с формула (7.10.19) функцията $W = f(z) = u + jv$ на комплексната променлива $z = x + jy$ се нарича комплексен потенциал.

За разглеждания пример, т.е. за функцията $W = f(z) = \tau' \ln \frac{z-a}{z+a}$, интензитетът на електрическото поле, $\vec{E}$ се определя от израза:

$$\vec{E} = -\frac{\partial \overset{*}{W}}{\partial z} = \tau' \frac{2a}{(x - jy)^2 - a^2}. \qquad (7.10.20)$$

7.11. Потенциални и зарядни коефициенти. Частични капацитети

Разглежда се система от n на брой зададени проводящи тела, разположени в линейна диелектрична среда. Тъй като уравненията на полето са линейни, е приложим принципът на наслагването.

Разглежда се тялото с номер i. В случай, че то е уединено, за връзката между потенциала му φ_i и заряда му q_i се записва:

$$\varphi_i = \alpha_i q_i, \qquad (7.11.1)$$

където α_i е коефициент, зависещ от геометричните размери на тялото и диелектричната проницаемост на средата, и имащ размерност F^{-1}.

Ако тялото с номер i не е уединено, а е съставна част от системата от n заредени тела, то потенциалът му φ_i ще се определя, както от собствения му заряд q_i, така и от зарядите q_s на останалите тела. Съгласно принципа на наслагването се записва:

$$\varphi_i = \alpha_{i1} q_1 + \alpha_{i2} q_2 + ... + \alpha_{ii} q_i + ... + \alpha_{in} q_n \text{ , за } i = 1 ... n, \qquad (7.11.2)$$

където α_{ii} са собствените потенциални коефициенти;

α_{is} - взаимните потенциални коефициенти.

Коефициентите α_{ii} и α_{is} се определят от изразите:

$$\alpha_{ii} = \left(\frac{\varphi_i}{q_i}\right)_{q_к = 0} \quad \text{за} \quad к \neq i \ , \qquad (7.11.3)$$

$$\alpha_{is} = \left(\frac{\varphi_i}{q_s}\right)_{q_к = 0} \quad \text{за} \quad к \neq s \ . \qquad (7.11.4)$$

За системата от n заредени тела може да се запише система от n уравнения. Тези уравнения се наричат потенциални, а системата има вида:

$$\begin{vmatrix} \varphi_1 = \alpha_{11} q_1 + \alpha_{12} q_2 + ... + \alpha_{1n} q_n; \\ \varphi_2 = \alpha_{21} q_1 + \alpha_{22} q_2 + ... + \alpha_{2n} q_n; \\ ..... \\ \varphi_n = \alpha_{n1} q_1 + \alpha_{n2} q_2 + ... + \alpha_{nn} q_n. \end{vmatrix} \qquad (7.11.5)$$

Тази система уравнения е дадена от Максуел. Матричният й запис е следният:

$$\underline{\varphi} = \underline{\alpha}.\underline{q} \ , \qquad (7.11.6)$$

където $\underline{\varphi}$ и $\underline{q}$ са многомерни вектори от вида:

$$\underline{\varphi} = [\varphi_1 \ \varphi_2 ... \ \varphi_n]_t \text{ и } \underline{q} = [q_1 \ q_2 ... \ q_n]_t \ , \qquad (7.11.7)$$

а $\underline{\alpha}$ е квадратна матрица на потенциалните коефициенти, т.е.:

$$\underline{\alpha} = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & . & . & . & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & . & . & . & \alpha_{2n} \\ . & . & . & . & . & . \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & . & . & . & \alpha_{nn} \end{bmatrix}. \qquad (7.11.8)$$

Взаимните потенциални коефициенти α_{ps} и α_{sp} удовлетворяват принципа на електростатичната взаимност, т.е.:

$$\alpha_{ps} = \alpha_{sp}, \qquad (7.11.9)$$

което означава, че матрицата $\underline{\alpha}$ е симетрична по отношение на главния си диагонал.

Като пример се разглежда зареден кондензатор. При малко разтояние между електродите му, влиянието на останалите заредени тела може да бъде пренебрегнато. Последното означава, че кондензаторът може да бъде разглеждан като система от две заредени тела. За зарядите им q_1 и q_2 се полага: $q_1 = q = -q_2$. В такъв случай въз основа на система (7.11.5) се записва:

$$\begin{cases} \varphi_1 = \alpha_{11}q_1 + \alpha_{12}q_2 = (\alpha_{11} - \alpha_{12})q; \\ \varphi_2 = \alpha_{21}q_1 + \alpha_{22}q_2 = (\alpha_{21} - \alpha_{22})q. \end{cases} \qquad (7.11.10)$$

За напрежението u между електродите на кондензатора се получава:

$$u = \varphi_1 - \varphi_2 = (\alpha_{11} + \alpha_{22} - \alpha_{12} - \alpha_{21})q, \qquad (7.11.11)$$

откъдето за капацитета му C се достига до израза:

$$C = q/u = 1/(\alpha_{11} + \alpha_{22} - 2\alpha_{12}) \ . \qquad (7.11.12)$$

2. Зарядни коефициенти

Ако матричното уравнение (7.11.6) се умножи отляво с обратната матрица:

$$\underline{\beta} = \underline{\alpha}^{-1}, \qquad (7.11.13)$$

се получава системата зарядни уравнения, която има следния вид:

$$\begin{cases} q_1 = \beta_{11}\varphi_1 + \beta_{12}\varphi_2 + ... + \beta_{1n}\varphi_n; \\ q_2 = \beta_{21}\varphi_1 + \beta_{22}\varphi_2 + ... + \beta_{2n}\varphi_n; \\ ..... \\ q_n = \beta_{n1}\varphi_1 + \beta_{n2}\varphi_2 + ... + \beta_{nn}\varphi_n. \end{cases} \qquad (7.11.14)$$

Матричният запис на последната система е:

$$\underline{q} = \underline{\beta}.\underline{\varphi}. \qquad (7.11.15)$$

Величините β_{ii} се наричат собствени зарядни коефициенти (собствени коефициенти на електростатичната индукция) и се определят съгласно израза:

$$\beta_{ii} = \left(\frac{q_i}{\varphi_i}\right)_{\varphi_к = 0} \quad \text{за } к \neq i. \qquad (7.11.16)$$

Величините β_{is} носят названието взаимни зарядни коефициенти (взаимни коефициенти на електростатичната индукция) и се определят съгласно израза:

$$\beta_{is} = \left(\frac{q_i}{\varphi_s}\right)_{\varphi_к = 0} \quad \text{за } к \neq s. \qquad (7.11.17)$$

Собствените зарядни коефициенти β_{ii} са положителни, а взаимните зарядни коефициенти β_{is} са винаги отрицателни. И действително, потенциалът на дадено тяло и зарядът му имат еднакви знаци. Ако потенциалът на тялото с номер s е положителен, то заредените частици, появили се поради електростатичната индукция в тялото с номер i, въз основа на теоремата за зарядите на

съответстващите елементи ще имат отрицателен знак. Ето защо взаимните зарядни коефициенти $\beta_{is} = \beta_{si}$ са отрицателни величини.

3. Частични капацитети

Системата зарядни уравнения (7.11.14) може да бъде записана така, че всички участвуващи в нея коефициенти да бъдат положителни. За целта зарядът q_s се представя с израза:

$$q_s = \beta_{ss}\varphi_s + \sum_{\substack{r=1 \\ r\neq s}}^{n} \beta_{sr}\varphi_r \,. \qquad (7.11.18)$$

В сумата на последния израз се добавя и изважда потенциалът φ_s, т.е. се добавя нулевата сума $\varphi_s - \varphi_s = 0$ и се намира:

$$q_s = \beta_{ss}\varphi_s + \sum_{\substack{r=1 \\ r\neq s}}^{n} \beta_{sr}\left(\varphi_r - \varphi_s + \varphi_s\right) \,, \qquad (7.11.19)$$

откъдето се записва:

$$q_s = \left(\sum_{r=1}^{n} \beta_{sr}\right)\varphi_s + \sum_{\substack{r=1 \\ r\neq s}}^{n} \left(-\beta_{sr}\right)\left(\varphi_s - \varphi_r\right) \qquad (7.11.20)$$

В последния израз потенциалната разлика $\varphi_s - \varphi_r$ се замества с напрежението $u_{sr} = \varphi_s - \varphi_r$ и се въвеждат нови коефициети, които се наричат частични капацитети:

$$C_{ss} = \sum_{r=1}^{n} \beta_{sr} \quad \text{и} \quad C_{sr} = -\beta_{sr} \,. \qquad (7.11.21)$$

И така за заряда q_s се записва:

$$q_s = C_{ss}u_{s0} + \sum_{\substack{r=1 \\ r\neq s}}^{n} C_{sr}u_{sr} \,. \qquad (7.11.22)$$

В израз (7.11.22) потенциалът φ_s е заместен с напрежението u_{s0} между тялото с номер s и тялото с нулев потенциал $\varphi_0 = 0$.

Частичните капацитети C_{sr} се наричат взаимни. Те са положителни величини и съгласно принципа на електростатичната взаимност удовлетворяват равенството:

$$C_{sr} = C_{rs} \,. \qquad (7.11.23)$$

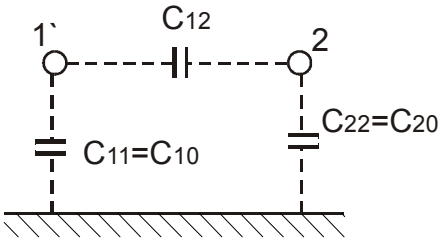
Частичните капацитети C_{ss} се наричат собствени. Те са също положителни величини. И действително, ако се приеме, че всички тела имат един и същ потенциал, то тогава от израз (7.11.22) се получава:

$$C_{ss} = \left(\frac{q_s}{u_{s0}}\right)_{\varphi_r = \varphi_s} \,.$$

Тъй като зарядът q_s и потенциалът φ_s имат еднакви знаци се установява, че собственият частичен капацитет $C_{ss} > 0$. Опитното определяне на частичните капацитети C_{rs} съвпада с определянето на съответните зарядни коефициенти β_{rs}.

От формули (7.11.21) може да се установи, че собственият заряден коефициент β_{ss} може да бъде изразен така:

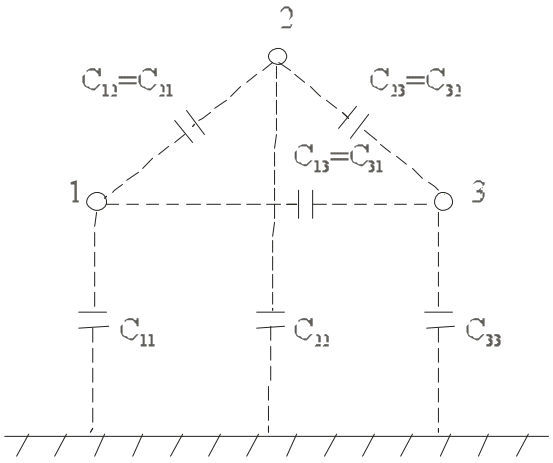
$$\beta_{ss} = \sum_{r=1}^{n} C_{sr} \,. \qquad (7.11.24)$$



Фиг.11.1.1

Системата зарядни уравнения чрез частчните капацитети се записва по следния начин:

$$\left|\begin{array}{l} q_1 = C_{11}u_{10} + C_{12}u_{12} + ... + C_{1n}u_{1n}; \\ q_2 = C_{21}u_{21} + C_{22}u_{20} + ... + C_{2n}u_{2n}; \\ ..... \\ q_n = C_{n1}u_{n1} + C_{n2}u_{n2} + ... + C_{nn}u_{n0}. \end{array}\right. \qquad (7.11.25)$$



Фиг.7.11.2

На фиг.7.11.1 са показани частичните капацитети на двупроводна линия при отчитане влиянието на земята. От фигурата може да се установи, че капацитетът C на линията може да бъде определен чрез израза:

$$C = C_{12} + \frac{C_{11}C_{22}}{C_{11} + C_{22}} \ . \qquad (7.11.26)$$

На фиг.7.11.2 са показани съответно частичните капацитети при трипроводна линия. И тук, както при фиг.7.11.1 е прието, че потенциалът на земята е равен на нула.

7.12. Електромагнитни параметри. Общи положения

При анализа на електрическите вериги се приема, че електромагнитните параметри - съпротивления, капацитети, индуктивности са известни. Тези параметри могат да бъдат измерени или определени чрез пресмятане. В някои случаи това определяне се извършва сравнително лесно. Например, съпротивлението R на намотка от цилиндричен проводник с дължина ℓ, напречно сечение S и специфична проводимост γ се намира чрез закона на Ом:

$$R = \frac{\ell}{\gamma S} . \qquad (7.12.1)$$

Горната формула е в сила при постоянна проводимост γ и при строго разглеждане се отнася за постоянни режими. При променлив режим плътността на тока е неравномерно разпределена по напречното сечение на проводника. Поради това действителното съпротивление е по-голямо от изчисленото по формула (7.11.1).

Тук следва да се отбележи, че дори при разгледания по-горе прост пример се приема, че картината на съответното електрическо поле е известна, като линиите му са успоредни помежду си. Само при позната структура на полето могат да бъдат намерени интегралните величини: напрежение u и ток i, т.е.:

$$u = \int_{(\ell)} \vec{E}\, d\vec{\ell} \quad \text{и} \quad i = \int_{(S)} \vec{\delta}_{\text{пров}}\, d\vec{S} = \gamma \int_{(S)} \vec{E}\, d\vec{S} . \qquad (7.12.2)$$

От горните формули за електрическо съпротивление R се записва:

$$R = \frac{u}{i} = \frac{1}{\gamma}\left(\int_{(\ell)} \vec{E}\,d\vec{\ell}\right)\left(\int_{(S)} \vec{E}\,d\vec{S}\right)^{-1} . \qquad (7.12.3)$$

Въз основа на разгледаното по-горе може да се заключи, че при определяне на съпротивлението, а това важи за останалите електромагнитни параметри, е необходимо съответното електромагнитно поле да бъде известно.

При определянето на капацитети се приема, че полето електростатично. Получените резултати при статични условия са в сила и за променливи режими при сравнително висока честота. Аналогично при определянето на индуктивности (собствени и взаимни) на такива контури се приема, че магнитното поле е стационарно.

Определянето на капацитета C на кондензатор може се извърши въз основа на формулите за заряда му q и напрежението му u, т. е. :

$$q = \int_{(S)} \varepsilon \vec{E}\,d\vec{S} = \varepsilon \int_{(S)} \vec{E}\,d\vec{S} \qquad \text{и} \quad u = \int_{(\ell)} \vec{E}\,d\vec{\ell}\,, \qquad (7.12.4)$$

въз основа на които се записва:

$$C = \frac{q}{u} = \varepsilon\left(\int_{(S)} \vec{E}\,d\vec{S}\right)\left(\int_{(\ell)} \vec{E}\,d\vec{\ell}\right)^{-1} . \qquad (7.12.5)$$

Поради аналогията между електрическото поле на постоянен пок в проводящи среди и електростатично поле в диелектрик, не е необходимо отделно да се разглежда определянето на параметъра електрическа проводимост G. Като се има предвид, че проводимостта G и съпротивлението R са реципрочни величини, т.е.: $G = 1/R$, то ако във формула (7.12.3) се въведе величината G и полученият израз се съпостави с формула (7.12.5) , се установява, че:

$$G = \frac{\gamma}{\varepsilon} C . \qquad (7.12.6)$$

Полученият резултат е следствие на принципа на електростатичната аналогия. Той показва, че при еднакви гранични условия и структура на полето, определянето на проводимостта на дадено електротехническо устрийсво може да се извърши непосредствено при известен капацитет на съответното уединено проводящо тяло или на съответния кондензатор. За илюстрация по-долу се разглеждат два примера.

Пример 1: Търси се капацитетът C на уединена проводяща сфера с радиус r_1, поместена в еднородна изотропна среда с абсолютна диелектрична проницаемост ε. За целта е необходимо да се намери потенциалът на сферата φ. Използува се изразът за за интензитета E на електрическото поле, т. е. :

$$E = \frac{q}{4\pi\varepsilon r^2} . \qquad (7.12.7)$$

и след интегриране на разстоянието r в границите $r_1 \ldots \infty$ се установява, че:

$$\varphi = \int_{r_1}^{\infty} E dr = \frac{q}{4\pi\varepsilon r_1} . \qquad (7.12.8)$$

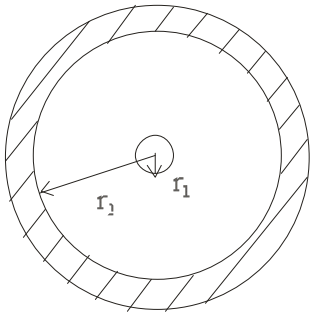
Оттук за капацитета C на сферата се получава:

$$C = \frac{q}{\varphi} = 4\pi\varepsilon r_1 . \qquad (7.12.9)$$

Полученият резултат се използува за определяне проводимостта G на полусферичен заземител с радиус r_1 , разположен в еднородна проводяща среда със

специфна проводимост γ , като кръглата основа на заземителя съвпада с граничната повърхност на полупространството, заето от средата. Поради симетрията се приема, че капацитетът на полусферата е два пъти по-малък от капацитета на съответната сфера. Въз основа на принципа на електростатичната аналогия и формулата (7.12.4) се намира:

$$G = 2\pi\gamma r_1 . \qquad (7.12.10)$$



Фиг.7.12.1

Пример 2: Търси се капацитетът C на едножилен коаксиален кабел с дължина l. На фиг.7.12.1 е показано напречното сечение на кабела, като радиусът на жилото му е r_1, а вътрешният радиус на металната му обвивка е r_2. Приема се, че изолацията между жилото и обвивката е еднородна и се характеризира с абсолютна диелектрична проницаемост ε. В тази област електрическото поле е плоско –паралелно и в равнините, перпендикулярни на оста на симетрия, то е радиално. Интензитетът му $\vec{E}$ се дава с формулата:

$$\vec{E} = \frac{q}{2\pi\varepsilon\ell r}\vec{r^0} . \qquad (7.12.11)$$

Напрежението u между жилото и обвивката при електростатични условия се определя чрез циркулацията на вектора $\vec{E}$ по радиална силова линия в границите $r_1 \ldots r_2$, т.е.:

$$u = \int_{r_1}^{r_2} E dr = \int_{r_1}^{r_2} \frac{q}{2\pi\varepsilon\ell r} dr = \frac{q}{2\pi\varepsilon\ell} \ln\frac{r_2}{r_1} . \qquad (7.12.12)$$

Оттук за капацитета C се получава:

$$C = \frac{q}{u} = \frac{2\pi\varepsilon\ell}{\ln\frac{r_2}{r_1}} . \qquad (7.12.13)$$

Получената формула се отнася и за капацитет на цилиндричен кондензатор с дължина l, външен радиус r_1 на вътрешния електрод и вътрешен радиус r_2 на външния електрод. Въз основа на принципа на електростатичната аналогия може да бъде определено изолационното съпротивление $R_{из}$ на едножилен коаксиален кабел, ако изолацията му не е идеална и се характеризира със специфична проводимост γ. Въз основа на формули (7.12.6) и (7.12.13) може да се достигне до следния израз за съпротивлението $R_{из}$:

$$R_{из} = \frac{1}{4\pi\gamma\ell} \ln\frac{r_2}{r_1} . \qquad (7.12.14)$$

Както бе споменато по-горе , определянето на индуктивностите се извършва за стационарни условия. Освен това се приема че, токовете в контурите са постоянни. Тези индуктивности зависят от абсолютната магнитна проницаемост, както на околната среда , така и на материала, от който са направени токовите контури. При линейна среда, т.е. проницаемостта й μ = const, токовете не влияят върху индуктивността.

Индуктивностите могат да бъдат определени чрез магнитната енергия W_M. Така от израза за енергията W_M на единичен токов контур:

$$W_M = \frac{1}{2} L i^2 \qquad (7.12.15)$$

се получава формулата за индуктивността му L, т.е.:

$$L = \frac{2}{i^2} W_M . \qquad (7.12.16)$$

Ако енергията W_M се представи с интегралната зависимост:

$$W_M = \frac{1}{2} \int_{(V)} \vec{B}\vec{H}\, dV , \qquad (7.12.17)$$

то за индуктивноста L се записва:

$$L = \frac{1}{i^2} \int_{(V)} \vec{B}\vec{H}\, dV \qquad (7.12.18)$$

Пример:Търси се индуктивността L на едножилен коаксиален кабел (фиг.7.12.1), чиято безкрайно тънка обвивка служи за обратен проводник. Приема се, че през кабела преминава ток i. Магнитното му поле е концентрирано в жилото и в изолацията на кабела. За областта извън кабела, т.е. за $r > r_1$ магнитното поле отсъствува, което следва от закона за пълния ток :

$$\oint_{(\ell)} \vec{H}\, d\ell = H 2\pi r = \sum i , \qquad (7.12.19)$$

тъй като сумарният ток $\sum i$ в жилото и обвивката е равен на нула, т.е.: $\sum i = i - i = 0$.

За областта на жилото , т.е. за $r = 0 \ldots r_1$, за интензитета на магнитното поле H' се записва:

$$H' = \frac{i_r}{2\pi r} , \qquad (7.12.20)$$

където i_r е обхванатият от интеграционния контур ток през жилото на кабела.

При постоянна плътност на тока в жилото $\delta_ж = i / \pi r_1^2$ за тока i_r се получава :

$$i_r = \frac{i}{\pi r_1^2} \pi r^2 = \frac{i r^2}{r_1^2} . \qquad (7.12.21)$$

След заместване на израз (7.12.20) се намира интензитетът H', т.е.:

$$H' = \frac{i r}{2\pi r_1^2} . \qquad (7.12.22)$$

За интензитета на магнитното поле H'' за областта на изолацията, т.е. за $r = r_1 \ldots r_2$ се записва:

$$H'' = \frac{i}{2\pi r} . \qquad (7.12.23)$$

Приема се, че абсолютната магнитна проницаемост на жилото е $\mu = \mu_0 \mu_r$, а проницаемостта на изолацията е μ_0 . Приема се още, че средата е изотропна, т.е. векторите $\vec{B}$ и $\vec{H}$ съвпадат по посока ($\vec{B} = \mu \vec{H}$). За определяне индуктивността на кабека L се използува формула (7.12.18). В случая обемът dV е обем на кух цилиндър с радиуси r и $r+dr$ и дължина ℓ , т.е.: $dV = 2\pi r \ell dr$.

След заместване на горните резултати във формула (7.12.18) се получава:

$$L = \frac{i^2 \mu_0 \ell}{i^2} \left[\int_0^{r_1} \mu_r \left(\frac{r}{2\pi r_1^2} \right)^2 2\pi r dr + \int_{r_1}^{r_2} \left(\frac{1}{2\pi r} \right)^2 2\pi r dr \right] , \qquad (7.12.24)$$

откъдето след интегриране и преработка се установява , че:

$$L = \frac{\mu_0 \mu_r \ell}{8\pi} + \frac{\mu_0 \ell}{2\pi} \ln \frac{r_2}{r_1} . \qquad (7.12.25)$$

Първата съставка в последната формула се нарича вътрешна индуктивност $L_в$, т.е.:

$$L_в = \frac{\mu_0 \mu_r \ell}{8\pi}. \qquad (7.12.26)$$

Тази съставка съответствува на магнитната енергия , съсредоточена в жилото. Величината $L_в$ не зависи от радиуса на жилото r_1.

Индуктивността може да бъде определяна и въз основа на пълния магнитен поток Ψ_L. В такъв случай за индуктивността L се използува формулата:

$$L = \frac{\Psi_L}{i}. \qquad (7.12.26)$$

Взаимната индуктивност между токови контури с пренебрежимо малки напречни размери може да бъде определена чрез формулатата на Нойман. За обосноваване на тази фрмула се изхожда от дефиниционния израз на взаимна индуктивност, т.е.:

$$M_{12} = \frac{\Psi_{12}}{i_2} = \frac{\Phi_{12}}{i_2}. \qquad (7.12.27)$$

Взаимният магнитен поток Φ_{12} се изразява като циркулация на съответния векторен магнитен потенциал $\vec{A}_{12}$:

$$\Phi_{12} = \oint_{(\ell_1)} \vec{A}_{12} d\vec{\ell}_1. \qquad (7.12.28)$$

Векторният магнитен потенциал $\vec{A}_{12}$ се дава с формулата:

$$\vec{A}_{12} = \frac{\mu i_2}{4\pi} \oint_{(\ell_2)} \frac{d\vec{\ell}_2}{r}, \qquad (7.12.29)$$

където $\mu = \mu_0 \mu_r$ е абсолютната магнитна проницаемост на средата;

r – разстоянието от токовия елемент $i_2 d\vec{l}_2$ до точката, в която се определя векторният магнитен потенциал $\vec{A}_{12}$.

След заместване на израз (7.12.29) във формула (7.12.28) се получава:

$$\Phi_{12} = \frac{\mu i_2}{4\pi} \oint_{(\ell_1)} \oint_{(l_2)} \frac{d\vec{\ell}_1 d\vec{\ell}_2}{r}. \qquad (7.12.30)$$

След като последният израз се раздели на тока i_2, за взаимната индуктивност M се достига до формулата на Нойман:

$$M_{12} = \frac{\mu}{4\pi} \oint_{(\ell_1)} \oint_{(l_2)} \frac{d\vec{\ell}_1 d\vec{\ell}_2}{r}. \qquad (7.12.31)$$

По аналогичен начин може да се намери взаимната индуктивност M_{21}:

$$M_{21} = \frac{\mu}{4\pi} \oint_{(\ell_2)} \oint_{(\ell_1)} \frac{d\vec{\ell}_2 d\vec{\ell}_1}{r}. \qquad (7.12.32)$$

Формулата на Нойман е в сила за еднородна и изотропна среда. Тъй като редът на интегриране не оказва влияние върху крайния резултат, то от последните две формули се достига до равенството:

$$M_{12} = M_{21}, \qquad (7.12.33)$$

известно като принцип на електромагнитната взаимност.

7.13. Преобразуване на енергията в електромагнитното поле

1. Теорема на Умов

Анализът на преобразуването на енергията в електромагнитното поле може да бъде направен въз основа на общата теорема на Умов, съответстваща на закона за съхранение на енергията. Тази теорема гласи следното: Ако вътре в някакъв обем V енергията се изменя, то през затворената повърхност S_1, обхващаща обема, трябва да премине поток на енергията, равен на това изменение.

Ако се премине от енергия към мощност, то теоремата може да бъде формулирана така: Скоростта на намаление на енергията $(-\partial W/\partial t)$, затворена в обема V, е равна на потока на мощността, излизащ през повърхността S, обхващаща обема. Ако с вектор $\vec{F}$ се означи плътността на потока на мощността, то математическият запис на тази теорема е следният:

$$-\frac{\partial W}{\partial t} = \int\limits_{(v)} \frac{\partial w}{\partial t} dV = \oint\limits_{(S)} \vec{F} d\vec{S}, \qquad (7.13.1)$$

където $w = dW/dV$ е обемната плътност на енергията.

Ако към формула (7.13.1) се приложи теоремата на Гаус: $\oint\limits_{(S)} \vec{F} d\vec{S} = \int\limits_{(V)} \operatorname{div} \vec{F} dV$, то теоремата на Умов може да бъде записана в диференциална форма:

$$-\frac{\partial w}{\partial t} = \operatorname{div} \vec{F}. \qquad (7.13.2)$$

Н.А. Умов е използувал тази теорема през 1874 г. като я приложил по отношение на механиката на непрекъснатите среди. След 10 години аналогична теорема е била доказана от Пойнтинг и Хевисайд, независимо един от друг и независимо от Умов, приложима в електродинамиката. При това, както Пойнтинг, така и Хевисайд са намерили израз за вектора плътност на потока на мощността в електромагнитното поле $\vec{F}$, т.е.:

$$\vec{F} = \vec{\Pi} = \vec{E} \times \vec{H}. \qquad (7.13.3)$$

2. Теорема на Пойнтинг-Хевисайд

За извеждане на теоремата на Пойнтинг-Хевисайд се изхожда от първото и второто уравнения на Максуел, записани в диференциална форма, т.е.:

$$\begin{cases} \operatorname{rot} \vec{H} = \gamma \vec{E} + \dfrac{\partial \vec{D}}{\partial t}; \\ \operatorname{rot} \vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t}. \end{cases} \qquad (7.13.4)$$

Тъй като се разглеждат енергийни преобразувания, то в основата на анализа е законът на Джаул-Ленц, чийто диференциален запис е:

$$P_0 = \delta_{\text{пров}} \vec{E} = \gamma E^2, \qquad (7.13.5)$$

където P_0 е мощността на топлинните загуби, отнесена за единица обем.

Отначало се разглежда поле, в което се извършва разсейване на електромагнитна енергия, т.е.: $\gamma E^2 \neq 0$ и отсъствуват други енергийни

преобразувания , т.е. $\vec{E} = \vec{const}$ и $\vec{H} = \vec{const}$. Въз основа на това може да се смята, че ако в обема dV се разсейва мощност $\gamma E^2 dV$, то същият поток на мощността трябва да влиза в този обем през ограничаващата го затворена повърхност, т.е.:

$$-\oint_{(S)} \vec{\Pi}\, d\vec{S} = \int_{(V)} \gamma E^2 dV, \qquad (7.13.6)$$

където $\vec{\Pi}$ е векторът на плътността на потока на мощността в електромагнитното поле.

Знакът "минус" в последната формула означава, че потокът е входящ, т.е. е насочен навътре, в посока, обратна на положителната към повърхността dS нормала. В диференциална форма горното равенство има вида:

$$-\operatorname{div}\vec{\Pi} = \gamma E^2 = \vec{\delta}_{пров}\vec{E}. \qquad (7.13.7)$$

За да се получи величината γE^2 е необходимо първото уравнение на система (7.13.7) да се умножи с интензитета $\vec{E}$, т.е.:

$$\vec{E}\operatorname{rot}\vec{H} = \gamma E^2 + \vec{E}\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}. \qquad (7.13.8)$$

Ако се умножи второто уравнение на система (7.13.4) с интензитета $\vec{H}$ се получава:

$$\vec{H}\operatorname{rot}\vec{E} = -\vec{H}\frac{\partial B}{\partial t}. \qquad (7.13.9)$$

От уравнение (7.13.8) се изважда израз (7.13.9) и се записва:

$$\vec{E}\operatorname{rot}\vec{H} - \vec{H}\operatorname{rot}\vec{E} = \gamma E^2 + \vec{E}\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{H}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}. \qquad (7.13.10)$$

Лявата страна на последното уравнение представлява дивергенцията на векторното произведение на интензитетите $\vec{E}$ и $\vec{H}$, взета със знак "минус", т.е.:

$$-\operatorname{div}\left(\vec{E}\,x\,\vec{H}\right) = \gamma E^2 + \vec{E}\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{H}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}. \qquad (7.13.11)$$

В случай на постоянно поле, т.е. когато $\partial\vec{D}/\partial t = \vec{0}$ и $\partial\vec{B}/\partial t = \vec{0}$ последната зависимост добива вида:

$$-\operatorname{div}\left(\vec{E}\,x\,\vec{H}\right) = \gamma E^2. \qquad (7.13.12)$$

Ако се сравнят формули (7.13.7) и (7.13.12), може да се установи, че векторът плътност на потока на мощността $\vec{\Pi}$ и векторното произведение на интензитетите $\vec{E}$ и $\vec{H}$ са един и същ вектор, т.е.:

$$\vec{\Pi} = \vec{E}\,x\,\vec{H}. \qquad (7.13.13)$$

В случай на променливо поле, вторият и третият членове в уравнение (7.13.11) са различни от нула. Членът $\vec{E}\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$ представлява мощността, изразходвана за образуване на електрическото поле, т.е.:

$$\vec{E}\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}=\frac{\partial w_E}{\partial t}, \qquad (7.13.14)$$

а членът $\vec{H}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ - мощността, изразходвана за образуване на магнитното поле, т.е.:

$$\vec{H}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}=\frac{\partial w_M}{\partial t}. \qquad (7.13.15)$$

Във формула (7.13.14) величината $w_E = dW_E/dV = \vec{E}\vec{D}/2$ е обемната плътност на енергията на електрическото поле, а във формула (7.13.15) величината $w_м = dW_м/dV = \vec{H}\vec{B}/2$ е съответно обемната плътност на енергията на магнитното поле.

Изложеното по-горе може да бъде потвърдено със следните разсъждения: Ако се разглежда кондензатор с идеален диелектрик, който се зарежда с постоянен ток i, т.е.: $i = C\frac{\partial u_c}{\partial t} = \text{const}$, то членовете γE^2 и $\vec{H}\partial\vec{B}/\partial t$ във формула (7.13.11) ще бъдат равни на нула, тъй като специфичната проводимост на диелектрика е $\gamma = 0$, а токът i е постоянен ,т.е.: $\partial i/\partial t = 0$, откъдето пък следва , че $\partial\vec{B}/\partial t = \vec{0}$. В този случай формула (7.13.11) добива вида:

$$-\text{div}\ \vec{\Pi} = -\text{div}\left(\vec{E}\,x\,\vec{H}\right) = \vec{E}\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}. \qquad (7.13.16)$$

От последната формула следва, че енергията, пренасяна от потока на мощността за време dt отива само за образуване на електрическото поле в диелектрика. Тази енергия, отнесена за единица обем е:

$$dw_E = \vec{E}\,d\vec{D}. \qquad (7.13.17)$$

Ако диелектрикът е линеен, т.е. когато проницаемостта $\varepsilon = \varepsilon_0\varepsilon_r = \text{const}$ или $\vec{D} = \varepsilon_0\varepsilon_r\vec{E}$, то:

$$dw_E = \frac{1}{2}\varepsilon_0\varepsilon_r d\left(E^2\right), \qquad (7.13.18)$$

откъдето след интегриране се получава обемната плътност на енергията на електрическото поле w_E ,т.е.:

$$w_E = \frac{1}{2}\varepsilon_0\varepsilon_r E^2 \qquad (7.13.19)$$

При нелинеен диелектрик мощността $\vec{E}\partial\vec{D}/\partial t$ също отива за образуване на електрическото поле, без обаче цялата да се изразходва за увеличаване на енергията му. Например, ако характеристиката $\vec{D} = \vec{D}\left(\vec{E}\right)$ има хистерезисен характер, то енергията, отнесена за единица обем и изразходвана за изменението на електрическата индукция D от $-D_{max}$ до $+D_{max}$ е по-голяма от енергията, която полето връща при изменението на индукцията D от $+D_{max}$ до $-D_{max}$. Сумата от тези две енергии ще бъде равна на енергията за един цикъл и за единица обем, превръщаща се в топлина вследствие на хистерезиса, т.е.:

$$\oint\vec{E}\,d\vec{D} = \int_{-D_{max}}^{+D_{max}}\vec{E}\,d\vec{D} + \int_{+D_{max}}^{-D_{max}}\vec{E}\,d\vec{D} = w_{EX}. \qquad (7.13.20)$$

В този израз се приема, че електрическата индукция $\vec{D}$ отначало нараства монотонно, а след това монотонно намалява.

Ако се направят аналогични разсъждения, може да се установи, че членът $\vec{H}\partial\vec{B}/\partial t$ от израз (7.13.11), представлява мощността, изразходвана за образуването на магнитното поле в единица обем. При линейна среда, т.е. когато проницаемостта $\mu = \mu_0\mu_r = \text{const}$ или $\vec{B} = \mu_0\mu_r\vec{H}$, то за обемната плътност на енергията на магнитното поле се получава:

$$w_M = \frac{1}{2}\mu_0\mu_r H^2. \qquad (7.13.21)$$

В случай на нелинейна среда, то енергията, изразходвана за време dt за образуване на магнитното поле в единица обем, е:

$$dw_M = \vec{H}\,d\vec{D}. \qquad (7.13.22)$$

Загубите от хистерезис, аналогично на тези в електрическото поле, се дават с формулата:

$$\oint \vec{H}\,d\vec{B} = \int_{-B_{max}}^{+B_{max}} \vec{H}\,d\vec{B} + \int_{+B_{max}}^{-B_{max}} \vec{H}\,d\vec{B} = w_{MX}. \qquad (7.13.23)$$

Последната формула носи названието формула на Варбург.

Уравнение (7.13.11) се записва в интегрална форма, т.е.:

$$-\oint_{(S)} \vec{\Pi}\,d\vec{S} = -\oint_{(S)} \left(\vec{E}\,x\,\vec{H}\right) d\vec{S} = \int_{(V)} \gamma E^2 dV + \int_{(V)} \vec{E}\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} dV + \int_{(V)} \vec{H}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} dV = \frac{\partial W_\theta}{\partial t} + \frac{\partial W_E}{\partial t} + \frac{\partial W_M}{\partial t} = \frac{\partial W_\theta}{\partial t} + \frac{\partial W}{\partial t}. \qquad (7.13.24)$$

Полученият израз за теоремата на Пойтинг-Хевисайд гласи следното: Сумата от скоростта на нарастване на енергията на електромагнитното поле $\frac{\partial W}{\partial t} = \frac{\partial W_E}{\partial t} + \frac{\partial W_M}{\partial t}$ и скоростта на преобразуването на част от енергията на електромагнитното поле в някакъв обем V в друг вид енергия $\frac{\partial W_\theta}{\partial t}$ е равна на потока на мощността на електромагнитното поле, влизащ в обема през ограничаващата го затворена повърхност S. Този поток е равен на потока на вектора $\vec{\Pi} = \vec{E}\,x\,\vec{H}$.

В случай на линейна среда, характеризираща се с параметри γ, ε и μ, независящи от интензитетите на полето, то скоростта на нарастване на енергията на полето е:

$$\frac{\partial W}{\partial t} = \frac{\partial W_e}{\partial t} + \frac{\partial W_M}{\partial t} = \int_{(V)} \varepsilon_o\varepsilon_r \vec{E}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} dV + \int_{(V)} \mu_o\mu_r \vec{H}\frac{\partial \vec{H}}{\partial t} dV, \qquad (7.13.25)$$

а скоростта на преобразуване на енергията в топлина е:

$$\frac{\partial W_\theta}{\partial t} = \int_{(V)} \gamma E^2 dV. \qquad (7.13.26)$$

При линейна електрическа верига със съсредоточени параметри R, L, C за мощностите $\frac{\partial W}{\partial t}$ и $\frac{\partial W_\theta}{\partial t}$ се записва:

$$\frac{\partial W}{\partial t} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\sum\left(Li_L^2 + Cu_C^2\right); \qquad (7.13.27)$$

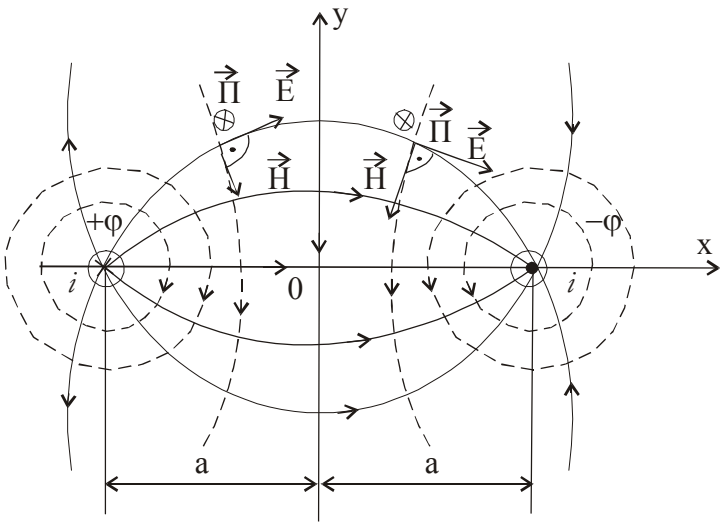
$$\frac{\partial W_\theta}{\partial t} = \sum Ri^2 \qquad (7.13.28)$$

Теоремата на Пойтинг-Хевисайд е в сила и при други преобразувания на електромагнитната енергия, например, при преобразуването ѝ в механична работа.

7.14. Предаване на енергията на електромагнитното поле по двупроводна линия и чрез трансформатор

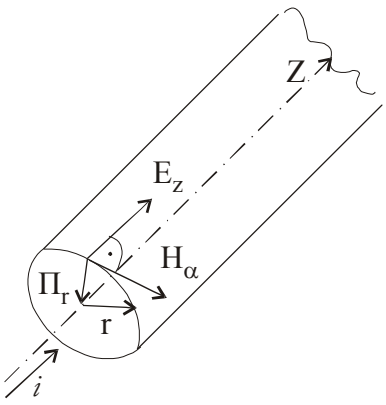
1. Предаване на енергията на електромагнитното поле по двупроводна линия

Въз основа на изложената в 7.13 теория може да се достигне до извода, че енергията на електромагнитното поле се предава чрез диелектричната среда, обкръжаваща проводниците на линията, където векторите на интензитетите на електрическото и магнитно полета $\vec{E}$ и $\vec{H}$ са взаимно перпендикулярни, а векторът на Пойнтинг-Хевисайд $\vec{\Pi}$ е успореден на проводниците и е насочен по посока на предаването на енергията, т.е. има съставка Π_z. При това проводниците играят ролята само да направляват разпространението на енергията.



Фиг.7.14.1

На фиг.7.14.1 е изобразено схематично електромагнитното поле на двупроводна линия в равнина, перпендикулярна на оста ѝ. Линиите на електрическото поле са представени с плътни линии, а тези на магнитното поле – с пунктирни. Както се вижда от фигурата, в коя да е точка векторите $\vec{E}$ и $\vec{H}$ са тангенциални към съответните линии и перпендикулярни един на друг. Векторът на Пойнтинг-Хевисайд $\vec{\Pi}$ е означен с кръст $\otimes$ и е насочен перпендикулярно към равнината на чертежа.



Фиг.7.14.2

Вътре в проводниците съществува само надлъжна съставка на интензитета на електрическото поле E_z, която съгласно закона на Ом в диференциална форма се определя чрез отношението на плътността на тока $\delta_{пров} = \delta_z$ и специфичната проводимост на проводника γ,

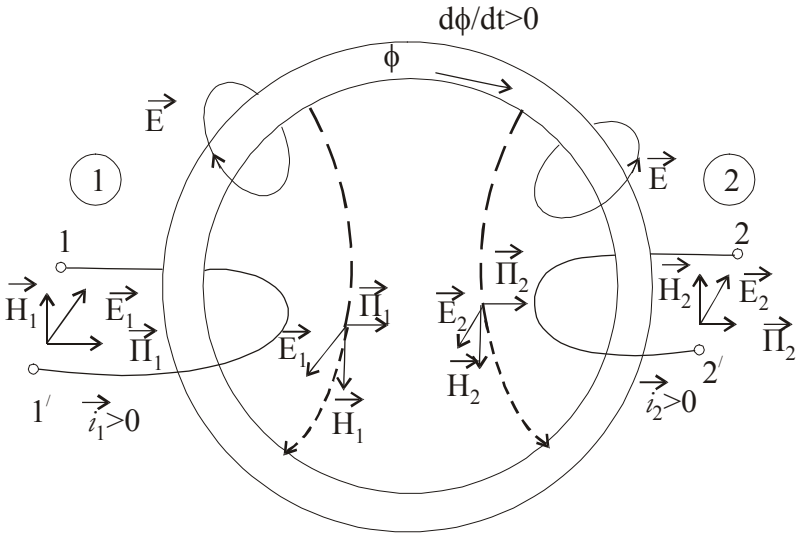
т.е.: $E_z = \delta_z / \gamma$. Такава съставка е налице във всяка точка от сечението на проводника, включително и по външната му повърхност (фиг.7.14.2).

Тук трябва да се отбележи, че надлъжната съставка E_z на вектор $\vec{E}$ в сравнение с нормалната му съставка E_r е много по-малка. Например, при далекопроводите нормалната съставка (съставката извън проводника) е $E_r \approx 400\,\text{kV/m}$, а надлъжната съставка (съставката в проводника) е $E_z \approx 1{,}8\,\text{V/m}$.

Въпреки това съставката E_Z предизвиква появата на съответна съставка на вектора на Пойнтинг-Хевисайд Π_r, която е насочена навътре към оста на проводника, наличието на съставката Π_r на вектора на Пойнтинг-Хевисайд, обуславя поток на мощността, влизащ в проводника и свързан с топлинните загуби.

2. Предаване на енергията на електромагнитното поле чрез трансформатор

Разглежда се идеален трансформатор, магнитната проницаемост на сърцевината, на който е безкрайно голяма, а първичната и вторичната му намотки са съставени само от по една по една навивки (фиг.7.14.3). Когато магнитният поток Φ в сърцевината се изменя, то около нея се образуват затворени линии на индуктирания интензитет на електричното поле $\vec{E}$, като посоката на вектор $\vec{E}$ е свързана с посоката на магнитните линии, определящи потока Φ, съгласно второто уравнение на Максуел, т.е.: $\text{rot}\,\vec{E} = -\partial \vec{B}/\partial t$. Например, на фиг.7.14.3 е показан момент, когато $\partial\Phi/\partial t > 0$.



Фиг.7.14.3

Посоката на вектора на Пойнтинг-Хевисайд $\vec{\Pi}_1$ в началото на област 1 (изводи 1-1') се определя чрез векторите на полето $\vec{E}_1$ и $\vec{H}_1$, чиито посоки се дават от посоките на линиите на двете полета. Вектор $\vec{\Pi}_1$ е насочен към първичната намотка на трансформатора, т.е. посоките на трите вектора $\vec{E}_1$, $\vec{H}_1$ и $\vec{\Pi}_1$ са аналогични на посоките им при двупроводна линия.

В областите между двете намотки векторите $\vec{E}$ и $\vec{H}$ си сменят посоките, като посоката на вектор $\vec{H}$ се определя от посоката на линиите на магнитното поле във въздуха, затварящи се частично през сърцевината, а посоката на вектора $\vec{E}$ се определя от посоката на затворените линии на електрическото поле, обхващащи сърцевината. В тези области вектор $\vec{\Pi}$ е насочен към вторичната намотка, т.е. едновременната смяна на посоките на векторите $\vec{E}$ и $\vec{H}$ запазва посоката на вектор $\vec{\Pi}$ една и съща и в тези области.

Посоката на вектора на Пойнтинг-Хевисайд в края на област 2 (изводи 2-2') се определя по аналогичен начин, както в началото на област 1 (изводи 1-1'). Векторът

$\vec{\Pi}_2$ е насочен от вторичната намотка. Разгледаното по-горе се отнася за случая, при който стойностите на двата тока i_1 и i_2 са положителни, т.е.: $i_1 > 0$ и $i_2 > 0$.

7.15. Теорема на Пойнтинг - Хевисайд в комплексна форма

При линейна среда и синусоидален закон на изменение на електромагнитното поле, уравненията на Максуел могат да бъдат представени в комплексна форма. За да се получи от първото уравнение на Максуел членът γE^2 е необходимо комплексният вектор $\dot{\vec{E}}$ да бъде умножен със спрегната му стойност $\dot{\vec{E}}^*$, т.е.:

$$P_0 = \gamma \dot{\vec{E}} \dot{\vec{E}}^*, \qquad (7.15.1)$$

където $\dot{\vec{E}}$ е комплексната ефективна стойност на вектора $\vec{E}$.

Моментната стойност $\vec{E}(t)$ на интензитета на електрическото поле е:

$$\vec{E}(t) = \sqrt{2}.\mathrm{Im}\left[\dot{\vec{E}} e^{j\omega t}\right]. \qquad (7.15.2)$$

От друга страна членът γE^2 може да бъде получен ако с вектор $\dot{\vec{E}}$ се умножи първото уравнение на Максуел като предварително в спрегната форма са приведени всичките му членове, т.е.:

$$\dot{\vec{E}}\,\mathrm{rot}\,\dot{\vec{H}}^* = \dot{\vec{E}}\left(\gamma \vec{E} - j\omega\varepsilon_0 \dot{\varepsilon}_r^* \vec{E}^*\right), \qquad (7.15.3)$$

където $\dot{\varepsilon} = \varepsilon' - j\varepsilon''$ е комплексната относителна диелектрична проницаемост на средата.

Ако е избран вторият подход, то е необходимо второто уравнение на Максуел да бъде умножено със спрегнатия комплекс на интензитета на магнитното поле $\dot{\vec{H}}^*$, т.е.:

$$\dot{\vec{H}}^*\,\mathrm{rot}\,\dot{\vec{E}} = -j\omega\mu_0 \dot{\mu}_r H^2, \qquad (7.15.4)$$

където $\dot{\mu}_r = \mu' - j\mu''$ е комплексната относителна магнитна проницаемост на средата.

По такъв начин се достига до еднакви вектори $\dot{\vec{E}}$ и $\dot{\vec{H}}^*$ в разликата между равенства (7.15.3) и (7.15.4), т.е.:

$$\begin{aligned}
&\dot{\vec{E}}\,\mathrm{rot}\,\vec{H}^* - \vec{H}^*\,\mathrm{rot}\,\dot{\vec{E}} = -\mathrm{div}[\dot{\vec{E}}\,\mathrm{x}\,\vec{H}^*] = \\
&= -\mathrm{div}\,\dot{\vec{\Pi}} = \gamma E^2 - j\omega\varepsilon_0 \dot{\varepsilon}_r^* E^2 + j\omega\mu_0 \dot{\mu}_r^* H^2 = \\
&= (\gamma + \omega\varepsilon_0\varepsilon'')E^2 + \omega\mu_0\mu'' H^2 + j\omega\left(-\varepsilon_0\varepsilon' E^2 + \mu_0\mu' H^2\right).
\end{aligned} \qquad (7.15.5)$$

В последното уравнение векторът $[\dot{\vec{E}}\,\mathrm{x}\,\dot{\vec{H}}^*] = \dot{\vec{\Pi}}$ представлява комплексната ефективна стойност на вектора на Пойнтинг-Хевисайд. Както се вижда от дясната част на това уравнение освен загубите, отделяни във вид на топлина (γE^2), се

появяват и загуби, свързани с необратимото разсейване на електромагнитната енергия в диелектрика - $(\omega\varepsilon_0\varepsilon''E^2)$ (така наречените диелектрични загуби) и в магнетика - $(\omega\mu_0\mu''H^2)$ (магнитни загуби). Сумата от тези три съставки е равна на средната стойност на разсеяната мощност за един период, отнесена за единица обем, т.е.: $\overline{p}_0 = P_0$.

Имагинерната величина:

$$j\omega\left(-\varepsilon_0\varepsilon' E^2 + \mu_0\mu' H^2\right) = jQ_0 \qquad (7.15.6)$$

представлява реактивната мощност Q_0 при променливо поле, отнесена към единица обем. Мощността Q_0 съдържа положителна магнитна съставка $\left(\omega\mu_0\mu' H^2\right)$ и отрицателна електрическа съставка $\left(-\omega\varepsilon_0\varepsilon' E^2\right)$. Тези знаци са условни и съответствуват на приетото в Европа положение, че реактивната индуктивна мощност е положителна, т.е.: $Q_L = \omega L I^2 > 0$, а реактивната капацитивна мощност е отрицателна, т.е.: $Q_C = -I^2/\omega C < 0$. Ето защо при определянето на комплексната мощност следва да се взема спрегнатият комплекс на тока, т.е.:

$$\dot{S} = \dot{U}\dot{I}^*, \qquad (7.15.7)$$

а в израза за вектора на Пойнтинг –Хевисайд $\dot{\vec{\Pi}}$ - спрегнатата комплексна ефективна стойност $\dot{\vec{H}}^*$ на вектора на интензитет на магнитното поле.

В някои страни, например в САЩ, е прието друго определяне за комплексната мощност $\dot{S}$ и комплексния вектор на Пойнтинг - Хевисайд. Там се записва: $\dot{S} = \dot{U}\dot{I}^*$ и $\dot{\vec{\Pi}} = \dot{\vec{E}} \times \dot{\vec{H}}^*$.

Във връзка с уравнение (7.15.5) за комплексната мощност $\dot{S}$, постъпваща в обем V, ограничен от затворена повърхност S, се записва:

$$\dot{S} = P + jQ = -\oint_{(S)} \dot{\vec{\Pi}}\, d\vec{S} = -\oint_{(S)} [\dot{\vec{E}} \times \dot{\vec{H}}^*]\, d\vec{S} =$$

$$= \int_{(V)} \left(\gamma E^2 + \omega\varepsilon_0\varepsilon'' E^2 + \omega\mu_0\mu'' H^2\right) dV + j\omega \int_{(V)} \left(\mu_0\mu' H^2 - \varepsilon_0\varepsilon' E^2\right) dV$$

В последното уравнение се съдържа и най-общият израз на реактивната мощност, както и законът й за съхранение. От това уравнение може да се установи още, че фазите на интензитетите на електрическото и магнитното полета не оказват влияние при алгебричното сумиране на реактивните съставки.

7.16. Променливо електромагнитно поле в диелектрик и проводяща среда

1. Общи положения

Променливото електромагнитно поле, както и постоянното електромагнитно поле, се описват с уравненията на Максуел. Съвместното решение на първите две уравнения на Максуел има различен характер при диелектрик и проводяща среда. Той се определя от частта на електромагнитната енергия, която необратимо се разсейва, т.е. от загубите.

При линейни среди, без да се губи общото при разглеждането, може да бъде използуван анализът на синусоидално поле. За целта се записват първите две уравнения на Максуел в комплексна форма ,т.е.:

$$\begin{cases} \operatorname{rot}\dot{\vec{H}} = (\gamma + j\omega\varepsilon_0\varepsilon_r)\dot{\vec{E}}; \\ \operatorname{rot}\dot{\vec{E}} = -j\omega\mu_0\mu_r\dot{\vec{H}}. \end{cases} \qquad (7.16.1)$$

Чрез изключване от тази система уравнения с две неизвестни (интензитетите $\dot{\vec{E}}$ и $\dot{\vec{H}}$) на едно от тях, може да се достигне до едно уравнение с едно неизвестно (интензитета $\dot{\vec{E}}$ или $\dot{\vec{H}}$).

При това се повишава редът на производните. Например, за изключване на интензитета $\dot{\vec{E}}$ се съставя ротация от двете части на първото уравнение на система (7.16.1) и $\operatorname{rot}\dot{\vec{E}}$ в посоченото уравнение се заменя съгласно второто уравнение на системата, т.е.:

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\dot{\vec{H}} = (\gamma + j\omega\varepsilon_0\varepsilon_r)\operatorname{rot}\dot{\vec{E}} = -(\gamma + j\omega\varepsilon_0\varepsilon_r)\, j\mu_o\mu_r\dot{\vec{H}}. \qquad (7.16.2)$$

Тук се предполага, че в разглежданата област параметрите на средата специфична проводимост γ и абсолютна диелектрична проницаемост ε не зависят от координатите, т.е.: $\nabla\gamma = 0$ и $\nabla\varepsilon = 0$.

Аналогично уравнение на уравнение (7.16.2) се получава чрез изключване на интензитета $\dot{\vec{H}}$, т.е.:

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\dot{\vec{E}} = -j\omega\mu_o\mu_r\operatorname{rot}\dot{\vec{H}} = -j\omega\mu_o\mu_r(\gamma + j\omega\varepsilon_o\varepsilon_r)\dot{\vec{E}}. \qquad (7.16.3)$$

Лявата част на изрази (7.16.2) и (7.16.3) съдържа операцията двойна ротация, която се представя по следния начин:

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\dot{\vec{F}} = -\nabla^2\dot{\vec{F}} + \operatorname{grad}\operatorname{div}\dot{\vec{F}}. \qquad (7.16.4)$$

Ако свойствата на средата не зависят от координатите и отсъствуват обемни заряди, се записва:

$$\operatorname{grad}\operatorname{div}\dot{\vec{F}} = \dot{\vec{0}}. \qquad (7.16.5)$$

Тогава уравнения (7.16.2) и (7.16.3) се опростяват и могат да бъдат представени в следната форма:

$$\nabla^2\dot{\vec{F}} = (\gamma + j\omega\varepsilon_o\varepsilon_r)j\omega\mu_o\mu_r\dot{\vec{F}}, \qquad (7.16.6)$$

където $\dot{\vec{F}}$ е векторът интензитет на магнитното поле $\dot{\vec{H}}$ или на електрическото поле $\dot{\vec{E}}$.

Тук операцията ∇^2 се прилага към векторна величина. Някои усложнения възникват, когато тази операция се прилага към съставките на вектора при криволинейни координати, но във всички случаи лявата част на равенство (7.16.4) съдържа производни от втори ред. Освен това в дясната част на това равенство се съдържат комплексните множители $j\omega$ и $(j\omega)^2$, чрез които символично се изразяват първата и втората производни по времето, т.е. $\partial/\partial t$ и $\partial^2/\partial t^2$.

Характерът на уравнение (7.16.4) и на описвания от него процес зависи от параметрите на средата. Най-важни са двата гранични случая с идеален диелектрик и добър проводник.

2. Променливо електромагнитно поле в идеален диелектрик

В идеален диелектрик специфичната проводимост $\gamma = 0$. В този случай получените уравнения описват разпространението на вълните в среда без загуби. И действително, ако в уравнение (7.16.6) се въведе скоростта на електромагнитните вълни $v = 1/\sqrt{\varepsilon_0 \varepsilon_r \mu_0 \mu_r}$, се получава:

$$\nabla^2 \dot{\vec{F}} = (j\omega)^2 \frac{1}{v^2} \dot{\vec{F}}. \qquad (7.16.7)$$

Ако в горното уравнение $(j\omega)^2$ се замени с диференциране по времето, се записва следното уравнение за вектор $\vec{F}$.

$$\nabla^2 \vec{F} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \vec{F}}{\partial t^2}. \qquad (7.16.8)$$

Ако вектор $\vec{F}$ зависи само от една пространствена координата, например, z и има само една съставка $F_к$, то уравненията (7.16.7) и (7.16.8) се опростяват и добиват вида:

$$\frac{d^2 \dot{F}_к}{dz^2} = (j\omega) \frac{1}{v^2} \dot{F}_к ; \qquad (7.16.9)$$

$$\frac{\partial^2 F_к}{\partial z^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 F_к}{\partial t^2}. \qquad (7.16.10)$$

Уравнение, аналогично на горния тип, е анализирано при преходните процеси в линии без загуби. Както е известно, това уравнение носи названието вълново. Вълновото уравнение описва процеса на разпространение на вълните при кой да е физически процес, без обезателно той да бъде електромагнитен.

3. Променливо електромагнитно поле в добър проводник

Ако средата е добър проводник, т.е. за специфичната проводимост γ е в сила неравенството: $\gamma >> \omega \varepsilon_0 \varepsilon_r$, то токовете на проводимостта ще бъдат значително по-големи от токовете на разместването. В този случай уравнение (7.16.6) добива вида:

$$\nabla^2 \dot{\vec{F}} = j\omega \mu_o \mu_r \gamma \dot{\vec{F}}. \qquad (7.16.11)$$

Съответно за вектор $\vec{F}$ се записва:

$$\nabla^2 \vec{F} = \mu_o \mu_r \gamma \frac{\partial \vec{F}}{\partial t}. \qquad (7.16.12)$$

В случаите, когато вектор $\vec{F}$ има само една съставка, например, в декартови координати $F = F_x$ при $F_y = F_z = 0$, то уравнение (7.16.12) се опростява, т.е.:

$$\nabla^2 F = \mu_o \mu_r \gamma \frac{\partial F}{\partial t} = b \frac{\partial F}{\partial t}, \qquad (7.16.13)$$

където $b = \mu_0 \mu_r \gamma$.

Уравнението от вида (7.16.13) съвпада с уравненията, описващи явленията дифузия и разпространение на топлината.

Дифузионните процеси най-общо се описват по следния начин: Ако еднородността в някаква среда е нарушена поради натрупване на частици, то те ще се стремят да се разпределят равномерно в средата и ще се придвижат в област,

където плътността им е по-малка. Ако с ρ се означи обемната плътност на частиците, то скоростта на придвижването им $\vec{v}$ ще бъде пропорционална на градиента от плътността ρ, взет със знак “минус”, т.е.:

$$\vec{v} = -\gamma \operatorname{grad} \rho, \qquad (7.16.14)$$

където γ е коефициент на пропорционалност.

Вектор $\vec{v}$ е съвършено аналогичен на вектора плътност на тока. Той е равен на броя на частиците, пренасяни за единица време през единица повърхност, нормална на вектор $\vec{v}$.

Ако разглежданите частици не изчезват и не се създават, то плътността им се изменя единствено за сметка на преместването на частиците. В такъв случай дивергенцията на скоростта $\vec{v}$ е равна на скоростта на намалението на плътността на частиците, т.е.:

$$\operatorname{div} \vec{v} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}. \qquad (7.16.15)$$

Ако вектор $\vec{v}$ от израз (7.16.14) се замести в последната формула, се получава уравнението на дифузията, т.е.:

$$\operatorname{div} \vec{v} = -\gamma \operatorname{div} \operatorname{grad} \rho = -\frac{\partial \rho}{\partial t}. \qquad (7.16.16)$$

От получения израз се записва:

$$\nabla^2 \rho = b \frac{\partial \rho}{\partial t}, \qquad (7.16.17)$$

където $b = 1/\gamma$.

От математическа гледна точка единствената разлика между уравнения (7.16.17) и (7.16.12) е в буквените означения.

До аналогично на уравнение (7.16.17) се достига при разглеждане на процесите на разпределение на температурата, когато разпространението на топлината се извършва само за сметка на топлопроводимостта.

Съпоставянето на топлинните уравнения с уравненията на електромагнитното поле позволява да се даде ясна и нагледна представа за електромагнитните процеси чрез процесите на разпространение на температурата. В редица случаи даже могат да бъдат използувани готови решения - например методите, разработени от Фурие и известни под названието “Аналитична теория на топлината”.

Векторът плътност на топлинния поток $\vec{Q}$ има посока, обратна на посоката на градиента на температурата θ , т.е.:

$$\vec{Q} = -\kappa \operatorname{grad} \theta, \qquad (7.16.18)$$

където κ е топлопроводността.

Плътността на топлинната енергия се изразява като произведение от температурата θ и топлопоглъщането c. Ако вътре в някаква среда не се произвежда топлина (например, увеличаване на плътността на топлинната енергия за сметка на химически реакции или нагряване на веществото от електрически ток), то изменението на плътността на топлинната енергия се извършва само за сметка на топлина, пренасяна от потока на вектора $\vec{Q}$.

При изразяване на плътността на топлинната енергия като произведение от топлопоглъщането c и температурата θ, то разгледаното по-горе може да бъде представено с формулата:

$$c\frac{\partial\theta}{\partial t} = -\mathrm{div}\,\vec{Q}, \qquad (7.16.19)$$

т.е. скоростта на нарастване на плътността на топлинната енергия $\left(c\,\partial\theta/\partial t\right)$ е равна на интензивността на притока на топлина $\left(-\mathrm{div}\,\vec{Q}\right)$. При положителен знак пред $\mathrm{div}\,\vec{Q}$, температурата в средата пада , тъй като “изтичането” на топлина се извършва за сметка на намаляването на плътността на топлинната енергия.

Ако израз (7.16.18) се замести във формула (7.16.19), се достига до уравнението:

$$\nabla^2\theta = b\frac{\partial\theta}{\partial t}, \qquad (7.16.20)$$

където $b = c/\kappa$.

Уравнение (7.16.20) се различава от уравнения (7.16.17) и (7.16.13) само по буквените означения.

Уравнения (7.16.14) и (7.16.15) могат да бъдат решени и по отношение на вектора скорост $\vec{v}$. За тази цел уравнение (7.16.14) се диференцира по времето t и в получения резултат производната $\partial\rho/\partial t$ се замества съгласно уравнение(7.16.15), т.е.:

$$\frac{\partial\vec{v}}{\partial t} = -\gamma\,\mathrm{grad}\frac{\partial\rho}{\partial t} = \gamma\nabla^2\vec{v}, \qquad (7.16.21)$$

откъдето се получава:

$$\nabla^2\vec{v} = \frac{1}{\gamma}\frac{\partial\vec{v}}{\partial t}. \qquad (7.16.22)$$

Аналогично за топлинните процеси, ако уравнение (7.16.18) се диференцира по времето t и в получения резултат производната $\partial\theta/\partial t$ се замени съгласно уравнение (7.16.19) , се записва :

$$\frac{\partial\vec{Q}}{\partial t} = -k\,\mathrm{grad}\frac{\partial\theta}{\partial t} = \frac{\kappa}{c}\nabla^2\vec{Q}, \qquad (7.16.23)$$

откъдето се получава:

$$\nabla^2\vec{Q} = \frac{c}{\kappa}\frac{\partial\vec{Q}}{\partial t}. \qquad (7.16.24)$$

От сравняването на уравнения (7.16.22) и (7.16.24) с уравнение (7.16.12) става още по-близка аналогията между процесите на дифузия и на пренасянето на топлината и процеса на разпространение на променливото електромагнитно поле в проводяща среда. Тук обаче, липсват прости аналогии в граничните условия, които са необходими за аналогичност на решенията.

4. Понятие за повърхностен ефект

Понятието за повърхностен ефект може да бъде дадено в аспект на разпространението на топлината. Процесите на топлината в околното пространство не позволяват тя да прониква на дълбочина в телата. При това колкото честотата на изменение е по-висока, толкова дълбочината на проникването е по-малка. Например, дневните колебания на температурата проникват на много по-малка дълбочина от годишните.

Тук се дава още и представа за закъснението по фаза на температурните колебания в почвените слоеве при увеличаване на дълбочината. В тази връзка е интересно да се отбележи това, че най-ниската температура в почвата на известна

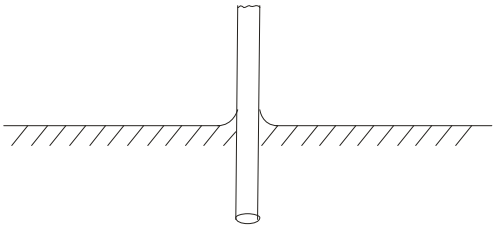
дълбочина се достига през лятото, а най-висока температура през зимата. Трябва да се има предвид, че при външна прилика на проникването на топлинното и електромагнитното полета, физическите процеси, задържащи проникването на външното смущение, са съществено различни.

7.17. Понятие за излъчване на електромагнитни вълни. Закъсняващи потенциали

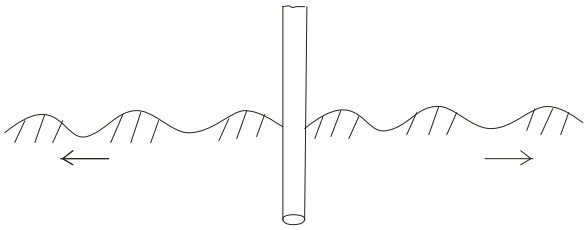
1. Понятие за излъчване на електромагнитни вълни

Електромагнитни вълни са разглеждани при дългите линии и при следствията от уравненията на Максуел. Например, съгласно тези следствия бе доказано, че електромагнитните вълни в пустотата се разпространяват със скоростта на светлината $c = 3.10^8\ \mathrm{m/s}$. Тук се поставя въпросът: Как възникват вълните? Как колебанията на тока и заряда водят до излъчване на електромагнитни вълни?

Определена качествена представа за излъчването на електромагнитни вълни може да се получи при разглеждане излъчването на механични колебания.



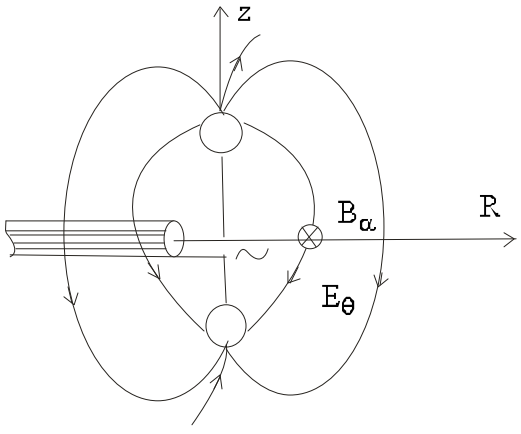
Фиг.7.17.1



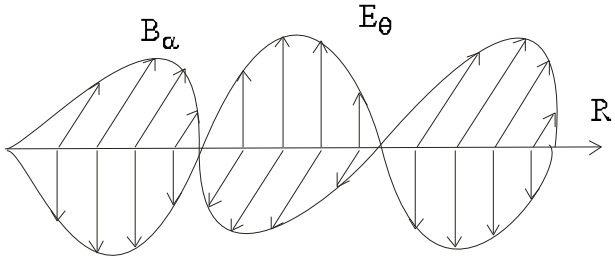
Фиг.7.17.2

Например, такава представа за може да се добие като се наблюдава водната повърхност, когато във водата е хвърлен камък. От мястото на падане на камъка радиално се разпространяват вълни, като при увеличаване на радиуса, амплитудата им намалява. Това означава, че част от енергията, отдавана от камъка при падането му във водата, е отдадена на вълните. Тази енергия, пренасяна от вълните, се излъчва по водната повърхност.

Тук интерес представлява следното механично явление: Ако бавно и с постоянна скорост се повдига пръчка, вертикално потопена във водата, (фиг.7.17.1), може да се види само слабо повишаване на нивото на водата до самата повърхност на пръчката. Ако обаче, пръчката се повдига и спуска периодично и се избере подходяща честота, то по видната повърхност ще се разпространяват кръгове, които могат да бъдат забелязани на голямо разстояние от пръчката (фиг.7.17.2). В това съществува известна аналогия с излъчването на електромагнитни вълни.



Фиг.7.17.3



Фиг.7.17.4

Разглежда се дипол. Електрическото му поле, показано на фиг.7.13.3 , бързо намалява на разстояние R . Това се вижда от изразите за потенциала φ и съставките

на интензитета му E_R и E_θ, които са обратно пропорционални на втората и съответно на третата степен на разстоянието R, т.е. :

$$\varphi = \frac{q\vec{\ell}\vec{R}}{\varepsilon_0 4\pi R^3} = \frac{q\vec{\ell}\vec{R}^0}{\varepsilon_0 4\pi R^2}; \qquad (7.17.1)$$

$$E_R = \frac{q\ell\cos\theta}{\varepsilon_0 2\pi R^3} \text{ и } E_\Theta = \frac{q\ell\sin\theta}{\varepsilon_0 4\pi R^3}. \qquad (7.17.2)$$

Ако обаче, моментът на дипола $\vec{p} = q\vec{\ell}$ се изменя, например, чрез захранване на дипола от променливотоков източник, то полето, създавано от дипола, затихва сравнително бавно и се разпространява на значително разстояние във вид на електромагнитни вълни (фиг.7.17.4).

В равнина, перпендикулярна на оста на дипола и преминаваща през средата й, в случай на хармоничен закон на изменение във времето на диполния момент $\vec{p} = q\vec{\ell} = (q_m \cos\omega t)\vec{\ell}$ при $\ell = \ell_z$ на разстояние R, се записва:

$$B = B_\alpha = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\omega^2}{R.c} q_m \ell \cos\omega\left(t - \frac{R}{c}\right); \qquad (7.17.3)$$

$$E = E_\theta = cB = cB_\alpha, \qquad (7.17.4)$$

където $c = 3.10^8\ m/s$ е скоростта на светлината в пустота.

От последните два израза се вижда, че в случая интензитетът на електрическото поле намалява обратно пропорционално на първата степен на разстоянието R.

2. Закъсняващи потенциали

При пресмятането на излъчените електромагнитни вълни обикновено е по-удобно вместо интензитетите на полето $\vec{E}$ и $\vec{H}$ да се използуват скаларният електрически потенциал φ и векторният магнитен потенциал $\vec{A}$. Връзките на тези потенциали със зарядите и токовете при статични или квазистатични полета се дават с формулите:

$$\varphi = \frac{1}{\varepsilon_0 4\pi}\int_{(V)}\frac{\rho\,dV}{R} \text{ и } \vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_{(V)}\frac{\vec{\delta}\,dV}{R}. \qquad (7.17.5)$$

В случай, че плътността на зарядите ρ и плътността на токовете $\vec{\delta}$ се изменят във времето, е необходимо да се намерят други връзки, аналогични на формули (7.17.5).

За целта се изхожда от първите четири уравнения на Максуел, записани за пустота, т.е. :

$$\begin{cases} \mathrm{rot}\,\vec{B} = \mu_0\vec{\delta} + \mu_0\varepsilon_0\dfrac{\partial\vec{E}}{\partial t}; \\ \mathrm{rot}\,\vec{E} = -\dfrac{\partial\vec{B}}{\partial t}; \\ \mathrm{div}\,\vec{E} = \dfrac{\rho}{\varepsilon_0} \quad \text{и} \quad \mathrm{div}\,\vec{B} = 0. \end{cases} \qquad (7.17.6)$$

Изразяват се основните вектори на полето $\vec{E}$ и $\vec{B}$ чрез потенциалите φ и $\vec{A}$:

$$\vec{E} = -\text{grad}\,\varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad \text{и} \quad \vec{B} = \text{rot}\,\vec{A} \tag{7.17.7}$$

и се заместват в третото и първото уравнения на система (7.17.6):

$$\text{div}\,\vec{E} = -\nabla^2\varphi - \text{div}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}; \tag{7.17.8}$$

$$\text{rot}\,\vec{B} = \text{rot}\left(\text{rot}\,\vec{A}\right) = -\nabla^2\vec{A} + \text{grad}\left(\text{div}\,\vec{A}\right) = \mu_0\,\vec{\delta} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\left(\text{grad}\varphi\right) - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2}, \tag{7.17.9}$$

където $c^2 = 1/\varepsilon_0\mu_0$.

След прехвърлянето на всички членове, съдържащи потенциалите φ и $\vec{A}$ равенство (7.17.9) се записва във вида:

$$-\nabla^2\vec{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} + \text{grad}\left(\text{div}\,\vec{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right) = \mu_0\,\vec{\delta}\,. \tag{7.17.10}$$

По този начин се получават следните две уравнения:

$$-\nabla^2\varphi - \text{div}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}; \tag{7.17.11}$$

$$-\nabla^2\vec{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} + \text{grad}\left(\text{div}\,\vec{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right) = \mu_0\,\vec{\delta}\,. \tag{7.17.12}$$

Неудобството тук е, че и в двете уравнения се съдържат както скаларният електрически потенциал φ, така и векторният магнитен потенциал $\vec{A}$. Например, съгласно първото уравнение скаларният електрически потенциал φ е свързан не само с плътността на електрическите заряди ρ, но и с векторния магнитен потенциал $\vec{A}$ и обратно във второто уравнение векторният магнитен потенциал $\vec{A}$ е свързан не само с плътността на токовете $\vec{\delta}$, но и със скаларния електрически потенциал φ. Тази връзка може да бъде лесно отстранена, ако се изхожда от определението за векторен магнитен потенциал $\vec{A}$. Съгласно това определение съществува право на избор на стойността на $\text{div}\,\vec{A}$, без този избор да променя $\text{rot}\,\vec{A} = \vec{B}$. Както се вижда от уравнения (7.17.11) и (7.17.12), е необходимо да се положи:

$$\text{div}\,\vec{A} = -\frac{1}{c^2}\frac{\partial \varphi}{\partial t}. \tag{7.17.13}$$

Последното уравнение се нарича уравнение на Лоренц или още калибровка на Лоренц. То дава възможност чрез подходящ избор на израз за $\text{div}\,\vec{A}$ да се опростят уравнения (7.17.11) и (7.17.12), които добиват вида:

$$\nabla^2\varphi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}; \tag{7.17.14}$$

$$\nabla^2\vec{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\mu_0\,\vec{\delta}\,. \tag{7.17.15}$$

Последните две уравнения се наричат уравнения на Даламбер. Ако се въведе така наречения четиримерен лапласиан $\Box^2 = \nabla^2 - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}$, те могат да бъдат записани съкратено така:

$$\Box^2 \varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}; \qquad (7.17.16)$$

$$\Box^2 \vec{A} = -\mu_0 \vec{\delta}. \qquad (7.17.17)$$

При разглеждане на постоянни или бавно изменящи се полета вторите членове на уравнения (7.17.14) и (7.17.15) стават равни на нула и се получават уравненията на Поасон-Лаплас за потенциалите φ и $\vec{A}$.

Уравнения (7.17.14) и (7.17.15) са вълнови уравнения. Такива уравнения са разглеждани при променливо електромагнитно поле в идеален диелектрик. Решенията на уравнения (7.17.14) и (7.17.15) се дават със следните равенства:

$$\varphi = \frac{1}{\varepsilon_0 4\pi}\int_{(V)} \frac{[\rho]dV}{R} \quad \text{и} \quad \vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_{(V)} \frac{[\vec{\delta}]dV}{R}. \qquad (7.17.18)$$

Както се вижда от формула (7.17.18) под знака на интеграла плътността на зарядите ρ и плътността на токовете $\vec{\delta}$ са поставени в средни скоби. Това означава, че при интегрирането, за да се получи потенциалът φ или $\vec{A}$ в някоя точка, намираща се от заряда или тока на разстояние R в момент t, е необходимо да се вземат заряди или токове, съществуващи в по-ранен момент от време, защото всяко изменение на заряда или тока може да се види на разстояние R след време R/c (R/c е времето, за което излъчената вълна достига до точката на наблюдение). Ето защо вместо момента t е взет моментът $(t - R/c)$, откъдето се записва:

$$[\rho] = \rho\left(t - \frac{R}{c}\right) \quad \text{и} \quad \left[\vec{\delta}\right] = \delta\left(t - \frac{R}{c}\right). \qquad (7.17.19)$$

Въз основа на изложеното по-горе потенциалите φ и $\vec{A}$, определяни чрез съответното уравнение (7.17.14) или (7.17.15), се наричат закъсняващи.

В случай на точков заряд $q = \rho\Delta V$ или на отрязък от проводник $i\vec{\ell} = \vec{\delta}\Delta V$, изразите за закъсняващите потенциали се опростяват:

$$\varphi = \frac{1}{\varepsilon_0 4\pi}\frac{[q]}{R} \quad \text{и} \quad \vec{A} = \frac{\mu_0[i\vec{\ell}]}{4\pi R}. \qquad (7.17.20)$$

При това, ако зарядът q се изменя във времето, т.е.: $q = q(t)$, то се записва: $[q] = q(t - R/c)$. Аналогично, ако токът i се изменя във времето, т.е.: $i\vec{\ell} = i(t)\vec{\ell}$, то се записва:

$$[i\vec{\ell}] = i(t - R/c)\vec{\ell}.$$

7.18. Излъчване на електрически дипол

1. Общи положения

Приема се, че в токов елемент с дължина $\vec{\ell}$ преминава променлив ток $i = i(t)$. Разглежда се създаваното от токовия елемент електромагнитно поле, като се отчита крайната скорост на разпространение на полето, което може да бъде направено чрез въвеждане на закъсняващите потенциали. Анализът се извършва за ток, изменящ се по хармоничен закон, чийто комплекс е:

$$\dot{I} \rightleftharpoons I\sqrt{2}\cos\omega t\,. \qquad (7.18.1)$$

При това е целесъобразно да бъде приложен следният подход: Отначало се определя векторният магнитен потенциал $\vec{A}$, след това се пресмята ротацията му и се намира векторът на магнитната индукция $\vec{B}$:

$$\dot{\vec{B}} = \mathrm{rot}\,\dot{\vec{A}}\,, \qquad (7.18.2)$$

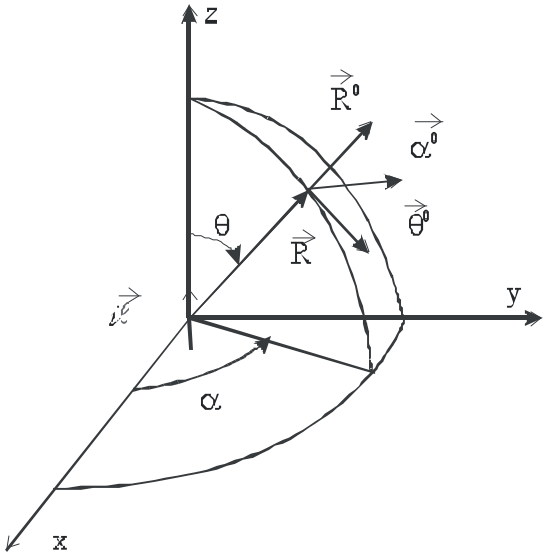
а на края се определя векторът интензитет на електрическото поле E въз основа на първото уравнение на Максуел :

$$\mathrm{rot}\,\dot{\vec{B}} = \mu_0\varepsilon_0 j\omega\dot{\vec{E}} = \frac{j\omega\dot{\vec{E}}}{c^2}\,, \qquad (7.18.3)$$

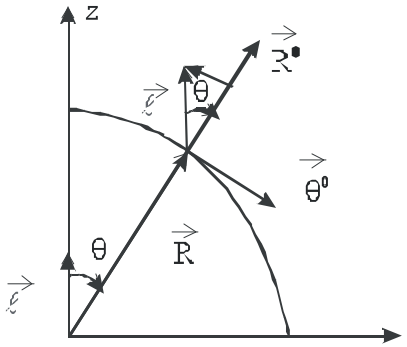
откъдето за вектор $\dot{\vec{E}}$ се записва:

$$\dot{\vec{E}} = \frac{c^2\,\mathrm{rot}\,\dot{\vec{B}}}{j\omega}\,. \qquad (7.18.4)$$

При изводите е целесъобразно да се използува сферична координатна система (фиг.7.18.1). В избраната координатна система за вектор $\vec{\ell}$ се записва (фиг.7.18.2) :



Фиг. 7.18.1



Фиг.7.18.2

$$\vec{\ell} = \ell(\cos\theta.\vec{R^0} - \sin\theta.\vec{\theta^0})\,. \qquad (7.18.5)$$

Единствената операция на пространствено диференциране, която ще бъде използувана при изводите, е $\mathrm{rot}\,\dot{\vec{F}}$.

В сферична координатна система тази операция се представя по следния начин:

$$\operatorname{rot}\vec{F}=\begin{vmatrix} \dfrac{\vec{R}^0}{R^2\sin\theta} & \dfrac{\vec{\theta}^0}{R\sin\theta} & \dfrac{\vec{\alpha}^0}{R} \\ \dfrac{\partial}{\partial R} & \dfrac{\partial}{\partial\theta} & \dfrac{\partial}{\partial\alpha} \\ F_R & RF_\theta & R\sin\theta F_\alpha \end{vmatrix}. \qquad (7.18.6)$$

2. Векторен магнитен потенциал $\dot{\vec{A}}$

В точка, намираща се на разстояние R от токовия елемент $\dot{I}\vec{\ell}$, векторният магнитен потенциал $\dot{\vec{A}}$ се определя по формулата:

$$\dot{\vec{A}}=\frac{\mu_0\dot{I}\vec{\ell}}{4\pi R}=\frac{\mu_0\dot{I}\ell}{4\pi}\frac{\cos\theta.\vec{R}^0-\sin\theta.\vec{\theta}^0}{R}. \qquad (7.18.7)$$

За отчитане на закъснението от времето t се преминава към време $(t - R/c)$, т.е. времето $\cos\omega t$ следва да се запише $\cos\omega(t-R/c)$, което съответствува на умножение на комплекса на тока $\dot{I}$ с множител $e^{-j\omega\frac{R}{c}}=e^{-j\beta R}$. При това се записва:

$$\dot{I}e^{-j\beta R}\dot{=}I\sqrt{2}\cos(\omega t-\beta R). \qquad (7.18.8)$$

Тук с β се означава:

$$\beta=\frac{\omega}{c}. \qquad (7.18.9)$$

И така, за отчитане на закъснението на потенциала $\dot{\vec{A}}$ трябва само в израз (7.18.7) да се въведе допълнителният множител $e^{-j\beta R}$. При това за вектор $\dot{\vec{A}}$ се получава:

$$\dot{\vec{A}}=\dot{\Phi}\frac{\cos\theta.\vec{R}^0-\sin\theta.\vec{\theta}^0}{R}e^{-j\beta R}, \qquad (7.18.10)$$

където $\dot{\Phi}=\mu_0\dot{I}\ell/4\pi$ е величина, която не зависи от координатите и има размерност на магнитен поток, т.е.: $\dim\Phi=\mathrm{Wb}$.

3. Магнитно поле

Векторът магнитна индукция $\dot{\vec{B}}$ се определя като $\operatorname{rot}\dot{\vec{A}}$. Тъй като вектор $\dot{\vec{A}}$ не зависи от меридианния ъгъл α и няма съставка по координатата α, т.е.: $A_\alpha=0$ и $\partial/\partial\alpha=0$, то операцията $\operatorname{rot}\dot{\vec{A}}$ се опростява. Така се достига до равенството:

$$\dot{\vec{B}}=\operatorname{rot}\dot{\vec{A}}=\frac{1}{R}\begin{vmatrix} \dfrac{\partial}{\partial R} & \dfrac{\partial}{\partial\theta} \\ \dot{A}_R & R\dot{A}_\theta \end{vmatrix}\vec{\alpha}^0. \qquad (7.18.11)$$

От последното равенство се получава:

$$\dot{B}=B_\alpha=\frac{\dot{\Phi}}{R}\left[\frac{\partial}{\partial R}\left(-\sin\theta.e^{-j\beta R}\right)-\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\cos\theta}{R}.e^{-j\beta R}\right)\right]=\dot{\Phi}\left(\frac{j\omega}{R.C}+\frac{1}{R^2}\right)\sin\theta.e^{-j\beta R}. \qquad (7.18.12)$$

При квазистатични условия, когато е в сила неравенството:

$$\beta R = \frac{\omega}{c} R = \frac{2\pi}{\lambda} R << 1, \qquad (7.18.13)$$

т.е. за близката зона , то първият член в скобите на израз (7.18.12) може да бъде пренебрегнат, като едновременно се полага: $e^{-j\beta R} \approx 1$. При това за магнитната индукция $\dot{B}$ се получава:

$$\dot{B} = \dot{B}_\alpha \approx \frac{\dot{\Phi}}{R^2} \sin\theta = \mu_0 \frac{\dot{I}\ell}{4\pi R^2} \sin\theta . \qquad (7.18.14)$$

Последният израз съответствува на закона на Био-Савар.

При големи разстояния и при висока честота, когато е в сила неравенството:

$$\beta R = \frac{2\pi R}{\lambda} >> 1, \qquad (7.18.15)$$

т.е. за далечната зона, то вторият член в скобите на израз (7.18.12) може да бъде пренебрегнат. Тогава за магнитната индукция $\dot{B}$ се записва:

$$\dot{B} = \dot{B}_\alpha = \dot{\Phi} \frac{j\omega}{R.c} \sin\theta . e^{-j\beta R} = \mu_0 \frac{\dot{I}\ell}{4\pi} \frac{j\omega}{R.c} \sin\theta . e^{-j\beta R} . \qquad (7.18.16)$$

Последният израз дава магнитното поле на излъчената електромагнитна вълна. Тук следва да се отбележи, че излъченото поле е право пропорционално на честотата ω и обратно пропорционално на разстоянието R, т.е. сравнително по-слабо намалява при увеличаване на разстоянието R, отколкото съставката (7.18.14), т.е. съставката на Био-Савар.

Като се има предвид връзката между дължината на вълната λ в пустотата и честотата й , т.е.: $\lambda = c/f = 2\pi c/\omega$, то израз (7.18.16) може да се запише и по следния начин:

$$\dot{B} = \dot{B}_\alpha = \frac{\mu_0 \dot{I}\ell}{2} \frac{j}{\lambda . R} \sin\theta . e^{-j\beta R} . \qquad (7.18.17)$$

Магнитното поле е насочено по допирателната към кръговете, определяни от паралелите, т.е.: $\dot{B} = \dot{B}_\alpha$.При това интензивността му намалява от екватора към полюсите тъй като в израз (7.18.17) участвува множителят $\sin\theta$.

4. Електрическо поле

Векторът интензитет на електрическото поле $\dot{\vec{E}}$ се определя по първото уравнение на Максуел (7.18.3). Като се използува формула (7.18.6) и съгласно израз (7.18.12) при условията $\dot{B} = \dot{B}_\alpha$, $\dot{B}_R = \dot{B}_\theta = 0$ и $\partial/\partial\alpha = 0$, се записва:

$$\mathrm{rot}\,\dot{\vec{B}} = \begin{vmatrix} \dfrac{\vec{R}^0}{R^2 \sin\theta} & \dfrac{\vec{\theta}^0}{R \sin\theta} & \dfrac{\vec{\alpha}^0}{R} \\ \dfrac{\partial}{\partial R} & \dfrac{\partial}{\partial \theta} & \dfrac{\partial}{\partial \alpha} \\ 0 & 0 & R \sin\theta \dot{B}_\alpha \end{vmatrix} . \qquad (7.18.18)$$

След извършване на диференцирането, се намира:

$$\mathrm{rot}\,\dot{\vec{B}} = \frac{\dot{\Phi} e^{-\beta R}}{R} \left\{ \left(\frac{j\omega}{R.c} + \frac{1}{R^2} \right) 2\cos\theta . \vec{R}^0 + \left[\left(\frac{j\omega}{c} \right)^2 + \frac{j\omega}{R.c} + \frac{1}{R^2} \right] \sin\theta . \vec{\theta}^0 \right\} . \qquad (7.18.19)$$

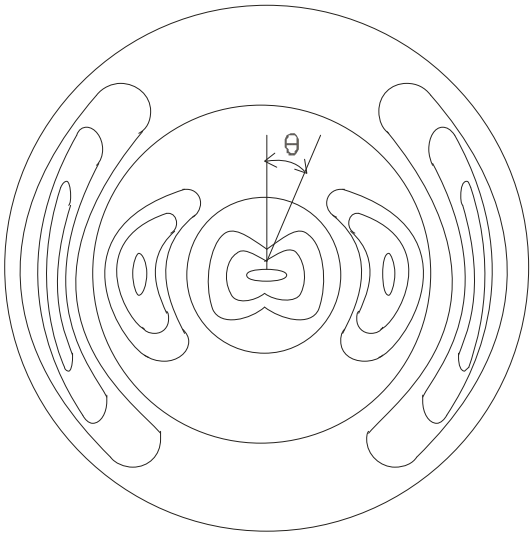
По първото уравнение на Максуел (7.18.3), като се има предвид получения израз (7.18.19), за вектор $\dot{\vec{E}}$ се записва:

$$\dot{\vec{E}} = \frac{j\omega \dot{\Phi} e^{-\beta R}}{R}\left\{\left[\frac{c}{j\omega R}+\left(\frac{c}{j\omega R}\right)^2\right]2\cos\theta.\vec{R}^0+\left[1+\frac{c}{j\omega R}+\left(\frac{c}{j\omega R}\right)^2\right]\sin\theta.\vec{\theta}^0\right\}. \qquad (7.18.20)$$

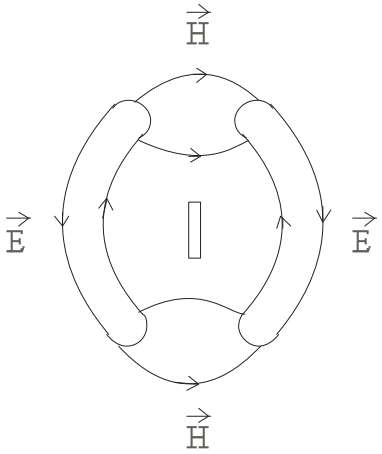
В израз (7.18.20) за интензитета на електрическото поле $\dot{\vec{E}}$ също се съдържа съставка, намаляваща обратно пропорционално на радиуса R , и в сравнение с нея за далечната зона всички останали съставки могат да бъдат пренебрегнати. В такъв случай се получава:

$$\dot{E} = \dot{E}_\theta = \frac{j\omega}{R}\dot{\Phi}\sin\theta.e^{-j\beta R}. \qquad (7.18.21)$$

Тази съставка съответствува на излъченото електрическо поле и подобно на излъченото магнитно поле (вж. формула (7.18.16)) е пропорционална на честотата ω.



Фиг.7.18.3



Фиг.7.18.4

За далечната зона съставките B_α и E_θ на вектор $\vec{B}$ и съответно на вектор $\vec{E}$ са ортогонални (вж. фиг. 7.17.3 и 7.17.4). Тези съставки са свързани помежду си чрез множителя c , т.е. :

$$\dot{E} = \dot{E}_\theta = c\dot{B} = c\dot{B}_\alpha. \qquad (7.18.22)$$

На фиг.7.18.3 са показани линиите на електрическото поле в равнина преминаваща през излъчващия токов елемент $\dot{I}\vec{\ell}$, а на фиг.7.18.4 са изобразени две линии на векторите $\vec{E}$ и $\vec{H}$.

5. Излъчена мощност

Излъчената мощност може да бъде определена чрез изчисляване на потока на вектора на Пойнтинг-Хевисайд през затворена повърхност. Сравнително просто е да се извърши такова интегриране за повърхност на сфера.

Векторът на Пойнтинг-Хевисайд $\dot{\vec{\Pi}}$ за далечната зона съгласно формули (7.18.16) и (7.18.22) се дава с израза:

$$\dot{\vec{\Pi}} = \frac{1}{\mu_0}\dot{\vec{E}} \times \overset{*}{\vec{B}} = \frac{c}{\mu_0} B_\alpha{}^2 . \vec{R}^0 = \frac{\mu_0}{c}\left(\frac{\omega I \ell}{4\pi R}\right)\sin^2\theta . \vec{R}^0 = \Pi_R . \vec{R}^0 \qquad (7.18.23)$$

Реалният характер на вектора на Пойнтинг-Хевисайд $\dot{\vec{\Pi}}$ показва, че в далечната зона енергията в кой да е момент от време се движи само от източника. При интегриране на реален вектор по сфера и се получава реална величина - активна мощност, която се нарича мощност на излъчването P, т.е. :

$$P = \oint_{(S)} \Pi_R \, dS = \int_0^\pi \frac{\mu_0}{c}\left(\frac{\omega I \ell}{4\pi R}\right)\sin^2\theta . 2\pi R^2 \sin\theta \, d\theta = \frac{\mu_0}{c}\frac{\omega^2}{6\pi}(I\ell)^2 . \qquad (7.18.24)$$

Тук лицевият елемент $d\vec{S}$ е $d\vec{S} = dS . \vec{R}^0$ и $dS = 2\pi R \sin\theta . R d\theta$. Елементът dS на сферичната повърхност има вид на пояс между два кръга на паралели, различаващи се на ъгъл $d\theta$. Радиусът на кръга на паралела с ъгъла θ е $R\sin\theta$, като ъгълът θ се отчита от “северния полюс”.

При разглеждане на електрическия дипол от фиг.7.17.3. с променлив електрически момент $\dot{\vec{p}} = \dot{q}\vec{\ell}$ трябва да се смята, че през проводника, съединяващ заредените сфери, преминава ток $\dot{I} = j\omega\dot{q}$. Ето защо излъчването на токовия елемент $\dot{I}\vec{\ell}$ е тъждествено на излъчването на електрическия дипол:

$$\dot{\vec{p}} = \dot{q}\vec{\ell} = \frac{1}{j\omega}\dot{I}\vec{\ell} . \qquad (7.18.25)$$

Съответно във всички изрази на излъченото поле и мощност вместо токовия елемент $\dot{I}\ell = 4\pi\dot{\Phi}/\mu_0$ може да се замести с електрическия момент от формула (7.18.25). При това се получава:

$$\dot{B} = \dot{B}_\alpha = -\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\omega^2}{Rc}\dot{q}\ell\sin\theta . e^{-j\beta R} ; \qquad (7.18.26)$$

$$\dot{E} = \dot{E}_\theta = c\dot{B}_\alpha ; \qquad (7.18.27)$$

$$P = \frac{\mu_0}{c}\frac{\omega^4}{6\pi}(q\ell)^2 . \qquad (7.18.28)$$

6. Входно съпротивление на излъчващия дипол, съпротивление на излъчването

Входното съпротивление на излъчващия дипол е много важна характеристика на захранващия източник, поддържащ колебанията на зарядите (и на тока) в дипола. Това съпротивление може да съдържа реактивна съставка. Тя съответства на обратимите изменения на енергията на полето в близост до дипола и може да бъде компенсирана чрез подходящо включване на индуктивен елемент L или капацитивен елемент C. Но входното съпротивление на дипола обезателно съдържа активна съставка $R_{вх}$, в която излъчваната мощност като че ли се разсейва съгласно закона на Джаул-Ленц, т.е.: $P = R_{вх} I^2$. Както се вижда от израз (7.18.24) за съпротивлението $R_{ВХ}$ може да се запише:

$$R_{вх} = \frac{P}{I^2} = \frac{\mu_0 \omega^2 \ell^2}{c . 6\pi} = 80\pi^2 \frac{\ell^2}{\lambda^2} . \qquad (7.18.29)$$

Например, при дължина на вълната $\lambda = 100$ m и дължина на дипола $\ell = 10$ m се получава за съпротивлението $R_{вх}$ стойност $R_{вх} \approx 7{,}9\,\Omega$.

7. Допълнителни забележки

Както е известно, в общия случай интензитетът на електрическото поле може да бъде представен като сума от две съставки, т.е.:

$$\dot{\vec{E}} = -\text{grad}\,\dot{\varphi} - j\omega\dot{\vec{A}}. \qquad (7.18.30)$$

Тук може да бъде поставен въпросът дали тези две съставки се съдържат в израз (7.18.20), тъй като този израз е получен като се изхожда само от векторният магнитен потенциал $\dot{\vec{A}}$. При това нищо не е казано за скаларния електрически потенциал $\dot{\varphi}$ и за градиента му. Може определено и еднозначно да се отговори на този въпрос, че и двата члена на уравнение (7.18.30) се съдържат в израз (7.18.20) тъй като е изхождано от първото уравнение на Максуел, в дясната част, на което участвува производната на пълния интензитет на електрическото поле $\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = j\omega\dot{\vec{E}}$.

Заедно с това за определянето на вектора на магнитната индукция $\dot{\vec{B}}$ и съответно на $\text{rot}\,\dot{\vec{B}}$, влизащата в лявата част на същото уравнение на Максуел, е достатъчно да се знае само векторният магнитен потенциал $\dot{\vec{A}}$. Тук е интересно да се отбележи още, че двете съставки на уравнение (7.18.30) могат да бъдат определени непосредствено.

7.19. Вектори на Херц. Принцип на взаимността

1. Електрически вектор на Херц

При разглеждане излъчването на електрически дипол

$$\dot{\vec{P}} = \dot{q}\vec{\ell} \qquad (7.19.1)$$

често се въвежда още един вид векторен потенциал:

$$\dot{\vec{Z}} = \dot{\vec{P}}e^{-\frac{j\beta R}{4\pi\varepsilon_0 R}}, \qquad (7.19.2)$$

който се нарича електрически вектор на Херц или още поляризационен векторен потенциал. С точност да константа вектор $\dot{\vec{Z}}$ е равен на момента на дипола, разделен на разстоянието R от дипола до разглежданата точка. При това при променлив диполен момент се взема стойността му за момента от време $(t - \frac{R}{c})$. Така се отчита крайната скорост на разпространение c на поляризационния потенциал. В случай на хармонично изменение, представяно с комплекса $\dot{\vec{P}}$, закъснението се изразява с множителя $e^{-j\beta R}$ (закъснение по фаза с βR).

Вектор $\dot{\vec{Z}}$ притежава редица важни свойства. Преди всичко той удовлетворява вълновото уравнение, което в комплексен вид се записва така:

$$\nabla^2\dot{\vec{Z}} + \left(\frac{\omega}{c}\right)^2\dot{\vec{Z}} = \dot{\vec{0}}. \qquad (7.19.3)$$

В това уравнение за разлика от уравнение (7.17.15) за векторния магнитен потенциал $\vec{A}$ диферецирането по времето $\frac{\partial^2}{\partial t^2}$ на хармоничната функция на времето $\vec{Z} = \vec{Z}(t)$ е представено с умножение с $(j\omega)^2$ на комплекса $\dot{\vec{Z}}$.

Правилността на уравнение (7.19.3) следва от обстоятелството, че аналогично уравнение е в сила за векторния магнитен потенциал $\dot{\vec{A}}$:

$$\dot{\vec{A}} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\dot{I}.\vec{\ell}}{R}e^{-j\beta R} = \frac{j\omega\dot{q}.\vec{\ell}}{4\pi\varepsilon_0 c^2}e^{-j\beta R}. \qquad (7.19.4)$$

Изразите (7.19.3) и (7.19.4) представляват еднакви функции на времето и координатите:

$$(\dot{\vec{C}}e^{-j\beta R})/R. \qquad (7.19.5)$$

и се различават само по стойността на постоянния множител $\dot{\vec{C}} = \dot{\vec{const}}$.

Другите две важни свойства на електрическия вектор на Херц $\dot{\vec{Z}}$ са, че чрез него могат да бъдат изразени както скаларният електрически потенциал $\dot{\varphi}$, така и векторният магнитен потенциал $\dot{\vec{A}}$. Съответните формули са:

$$\dot{\varphi} = -\mathrm{div}\,\dot{\vec{Z}} \quad \text{и} \quad \dot{\vec{A}} = \frac{j\omega\dot{\vec{Z}}}{c^2}. \qquad (7.19.6)$$

Ако в израза за пълния интензитет на електрическото поле $\dot{\vec{E}}$:

$$\dot{\vec{E}} = -\mathrm{grad}\,\dot{\varphi} - j\omega\dot{\vec{A}} \qquad (7.19.7)$$

потенциалите $\dot{\varphi}$ и $\dot{\vec{A}}$ се заместят съгласно формула (7.19.6) се записва:

$$\dot{\vec{E}} = \mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,\dot{\vec{Z}} - \left(\frac{j\omega}{c}\right)^2\dot{\vec{Z}}. \qquad (7.19.8)$$

Изразът $\mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,\dot{\vec{Z}}$ се представя с тъждеството:

$$\mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,\dot{\vec{Z}} = \nabla^2\dot{\vec{Z}} + \mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\dot{\vec{Z}}. \qquad (7.19.9)$$

В такъв случай за вектор $\dot{\vec{E}}$ се записва:

$$\dot{\vec{E}} = \nabla^2\dot{\vec{Z}} + \mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\dot{\vec{Z}} - \left(\frac{j\omega}{c}\right)^2\dot{\vec{Z}}. \qquad (7.19.10)$$

Като се отчете уравнение (7.19.3), от последния израз се получава:

$$\dot{\vec{E}} = \mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\dot{\vec{Z}}. \qquad (7.19.11)$$

В последната формула пълният интензитет на електрическото поле $\dot{\vec{E}}$ е изразен чрез електрическия вектор на Херц (поляризационния потенциал) $\dot{\vec{Z}}$.

Векторът магнитна индукция $\dot{\vec{B}}$ също може да бъде изразен чрез вектор $\dot{\vec{Z}}$. За целта като се има предвид, че: $\dot{\vec{B}} = \mathrm{rot}\,\dot{\vec{A}}$ и се отчете съответната формула (7.19.6) се записва:

$$\dot{\vec{B}} = \mathrm{rot}\,\dot{\vec{A}} = \frac{j\omega}{c^2}\mathrm{rot}\,\dot{\vec{Z}}. \qquad (7.19.12)$$

В случай на един електрически дипол използуването на електрическия вектор на Херц води до известните резултати и по същество не дава никакви предимства. В редица задачи обаче чрез използуването на електрическия вектор на Херц могат да бъдат получени някои математически опростявания.

Например, при променлива електрическа поляризация $\dot{\vec{P}}$ електрическият момент $d\dot{\vec{P}}$ на елементарен обем dV е:

$$d\dot{\vec{P}} = \dot{\vec{P}}\,dV. \qquad (7.19.13)$$

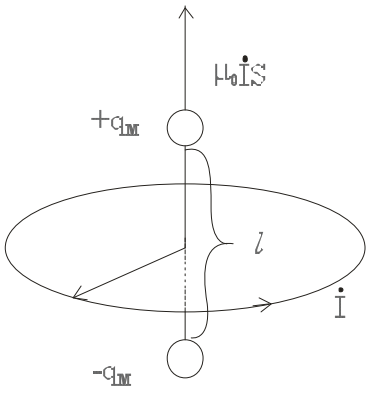
Този момент обуславя поляризационен потенциал $d\dot{\vec{Z}}$:

$$d\dot{\vec{Z}} = \frac{\dot{\vec{P}}}{\varepsilon_0 4\pi R}e^{-j\beta R}dV. \qquad (7.19.14)$$

Поляризационният потенциал $\dot{\vec{Z}}$ на цялата поляризирана среда се дава с интеграла:

$$\dot{\vec{Z}} = \int_{(V)} \frac{\dot{\vec{P}}}{\varepsilon_o 4\pi R}e^{-j\beta R}dV. \qquad (7.19.15)$$

От последният израз като се използуват формули (7.19.11) и (7.19.12) могат да бъдат намерени векторите $\dot{\vec{E}}$ и $\dot{\vec{B}}$.



Фиг.7.19.1

Електрическият вектор на Херц $\dot{\vec{Z}}$ може да бъде определен и за поле, създавано от променлив ток с комплекс $\dot{I}$, преминаващ през проводник с дължина ℓ. За елемент от проводника $d\vec{\ell}$ произведението $\dot{I}d\vec{\ell}$ може лесно да бъде изразено чрез елементарния диполен момент, т.е.:

$$\dot{I}d\vec{\ell} = j\omega\dot{q}\,d\vec{\ell} = j\omega\,d\dot{\vec{P}}. \qquad (7.19.16)$$

Електрическият вектор на Херц $\dot{\vec{Z}}$, който се обуславя от тока $\dot{I}$ на проводника с дължина ℓ, се определя с интеграла:

$$\dot{\vec{Z}} = \frac{1}{j\omega 4\pi\varepsilon_0}\int_{(\ell)}\frac{\dot{I}}{R}e^{-j\beta R}d\vec{\ell}\,. \qquad (7.19.17)$$

При затворен контур с променлив ток с комплекс $\dot{I}$, еднакъв във всички елементи на контура, за вектора $\dot{\vec{Z}}$ се записва:

$$\dot{\vec{Z}} = \frac{\dot{I}}{j\omega 4\pi\varepsilon_0}\oint_{(\ell)}\frac{1}{R}e^{-j\beta R}d\vec{\ell}\,. \qquad (7.19.18)$$

В последния израз токът $\dot{I}$ е изнесен пред знака на интеграла. По този начин може да бъде определено излъчването на рамкова антена (фиг.7.19.1).

2. Магнитен дипол и магнитен вектор на Херц

За област, за която за разстоянието R е в сила неравенството: $R >> d$, където d са линейните размери на площта $\vec{S}$, ограничена от контура с ток с комплекс $\dot{\vec{I}}$, рамковата антена може да бъде представена като магнитен дипол с магнитен момент:

$$\dot{\vec{M}} = \dot{I}\vec{S}\,. \qquad (7.19.19)$$

Ако се изходи от формалната аналогия на магнитостатиката с електростатиката, то за магнитния момент може да се даде представата, че той се създава чрез два разноименни магнитни заряда $\dot{q}_M$, разположени в краищата на отреза ℓ (фиг. 7.19.1), т.е.:

$$\mu_0\dot{\vec{M}} = \dot{q}_M\vec{\ell}\,. \qquad (7.19.20)$$

Ако се продължи аналогията може да се определи магнитен вектор на Херц или още магнитен поляризационен векторен потенциал $\dot{\vec{Z}}_M$, т.е.:

$$\dot{\vec{Z}}_M = \frac{\mu_0\dot{\vec{M}}}{4\pi\mu_0 R}e^{-j\beta R} = \frac{\dot{\vec{M}}}{4\pi R}e^{-j\beta R}\,. \qquad (7.19.21)$$

Въз основа на симетрията на Максуел (с точност до знак), т.е.:

$$\mathrm{rot}\,\dot{\vec{H}} = j\omega\varepsilon_0\dot{\vec{E}} \quad \text{и} \quad \mathrm{rot}\,\dot{\vec{E}} = -j\omega\mu_0\dot{\vec{H}}, \qquad (7.19.22)$$

могат да бъдат съпоставени като аналогични следните величини:

$$\dot{\vec{E}} \leftrightarrow \dot{\vec{H}};\ \dot{\vec{H}} \leftrightarrow \dot{\vec{E}} \quad \text{и} \quad j\omega\varepsilon_0 \leftrightarrow -j\omega\mu_0\,. \qquad (7.19.23)$$

По-долу се съпоставят изразите за редица величини чрез електрическия вектор на Херц $\dot{\vec{Z}}$ със съответните им изрази чрез магнитния вектор на Херц $\dot{\vec{Z}}_M$, т.е.:

$$\dot{\vec{Z}} = \frac{\dot{\vec{P}} e^{-j\beta R}}{4\pi\varepsilon_0 R} \quad \leftrightarrow \quad \dot{\vec{Z}}_M = \frac{\mu_0 \dot{\vec{M}} e^{-j\beta R}}{4\pi\mu_0 R};$$

$$\dot{\vec{E}} = \text{rot}\,\text{rot}\,\dot{\vec{Z}} \quad \leftrightarrow \quad \dot{\vec{H}} = \text{rot}\,\text{rot}\,\dot{\vec{Z}}_M; \qquad (7.19.24)$$

$$\dot{\vec{H}} = j\omega\varepsilon_0\,\text{rot}\,\dot{\vec{Z}} \leftrightarrow \quad \dot{\vec{E}} = -j\omega\mu_0 \text{rot}\,\dot{\vec{Z}}_M;$$

$$\dot{\vec{P}} = \dot{q}\,\vec{l} \quad \leftrightarrow \quad \dot{\vec{M}} = \dot{I}\vec{S}.$$

Изразът за интензитета $\dot{\vec{H}}$ в лявата колона се получава от формула (7.19.12) за вектор $\dot{\vec{B}}$ като се има предвид, че: $\dot{\vec{H}} = \frac{\dot{\vec{B}}}{\mu_o}$ и $c^2 = \frac{1}{\mu_0 \varepsilon_0}$.

Приведените по-горе изрази (7.19.24) са в сила за пустотата, т.е. за еднородна среда с относителни проницаемости $\varepsilon_r = 1$ и $\mu_r = 1$ и специфична проводимост $\gamma = 0$. При замяна на проницаемостите ε_0 и μ_0 с проницаемости $\varepsilon_0 \dot{\varepsilon}_r$ и съответно $\mu_0 \dot{\mu}_r$ и на скоростта c със скорост $v == c/(\dot{\varepsilon}_r \dot{\mu}_r)^{0,5}$, то тези изрази могат да бъдат приложени за каква да е среда. При това множителят $e^{-j\beta R(\dot{\varepsilon}_r \dot{\mu}_r)^{0,5}}$ ще отчита не само закъснението, но и затихването.

Всички приведени по-горе уравнения могат да бъдат използувани и в случая на две различни среди. За всяка от тях се прилагат основните уравнения, а след това се изисква да бъдат изпълнени граничните условия на разделителната повърхност между двете среди.

По указания подход от Зомерфелд е била решена задачата за разпространението на радиовълните по земната повърхност. Пресмятанията чрез вектора на Херц по метода на Зомерфелд намират широко приложение в геологията - при търсене на полезни изкопаеми. За целта се използват тороидални бобини с диаметър от порядъка на десетки метри. През тях се пропуска променлив ток с много ниска честота (от порядъка на един херц дори части от херца). На голямо разстояние от бобината се измерва полето на повърхността. Това поле зависи, както от проводимостта на земния грунт, така и от структурата му - наличие на един или повече слоеве с различна проводимост, наличие на отделни включвания и др.

3. Принцип на взаимността и приемни антени

Ако в далечната зона на излъчващия токов елемент с безкрайно малка дължина $d\vec{\ell}_1$ се намира втори безкрайно малък елемент $d\vec{\ell}_2$, то ЕДН $d\dot{E}_2$, което се индуцира от първия елемент във втория се дава с израза:

$$d\dot{E}_2 = d\dot{\vec{E}}\,d\vec{\ell}_2. \qquad (7.19.25)$$

Ако интензитетът $\mathrm{d}\vec{\dot{E}}$ се замести съгласно израз (7.18.21), се получава:

$$\mathrm{d}\dot{E}_2 = \frac{\mathrm{j}\omega\mu_0}{4\pi R^2}\dot{I}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta R}\left(\mathrm{d}\vec{\ell}_1 \times \vec{R}\right)\mathrm{d}\vec{\ell}_2 \,. \qquad (7.19.25)$$

Ако ЕДН $\mathrm{d}\dot{E}_2$ се разглежда като величина, пропорционална на смесеното произведение на трите вектора $\left(\mathrm{d}\vec{\ell}_1 \times \vec{R}\right)\mathrm{d}\vec{\ell}_2$, то израз (7.1926) може да се запише във вида:

$$\mathrm{d}\dot{E}_2 = \frac{\mathrm{j}\omega\mu_0}{4\pi R^2}\dot{I}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta R}\left(\mathrm{d}\vec{\ell}_2 \times \vec{R}\right)\mathrm{d}\vec{\ell}_1 \,, \qquad (7.19.27)$$

където $\vec{R}$ е векторът, прекаран от елемента $\mathrm{d}\vec{\ell}_1$ до елемента $\mathrm{d}\vec{\ell}_2$.

От последния израз, който е симетричен относно елементите $\mathrm{d}\vec{\ell}_1$ и $\mathrm{d}\vec{\ell}_2$ следва, че ако приемният и предавателният елементи си сменят местата, то при същата стойност на тока $\dot{I}$ в единия елемент, същото ЕДН се индуктира в другия. Това е и принципът на взаимността между предавателната и приемната антени. Този принцип е в сила за пустотата и за коя да е еднородна и изотропна среда.

Ако израз (7.19.26) се интегрира по отрезите $\mathrm{d}\vec{\ell}_1$ и $\mathrm{d}\vec{\ell}_2$ може да се покаже, че принципът на взаимността е в сила не само за елементарни вибратори, но и за вибратори с по-сложна форма. Този принцип намира широко приложение при пресмятане на излъчващи и приемни антени.

ТЕОРЕТИЧНА ЕЛЕКТРОТЕХНИКА - II ЧАСТ

Първо издание

Автори: доц. д-р инж. Никола Колев Армянов
доц. д-р инж. Таня Методиева Стоянова

Рецензент: доц. д-р инж. Емил Николаев Павликянов
Научен редактор: доц. д-р инж. Никола Колев Армянов
Стилов редактор: доц. д-р инж. Таня Методиева Стоянова

Издателски коли: 18 Печатни коли: 36
формат: ; тираж: ; поръчка

ПЕЧАТНА БАЗА при РУ "АНГЕЛ КЪНЧЕВ" - РУСЕ

№ 6 в Издателския план на РУ "А. Кънчев" за 2002 г.
Учебникът е одобрен от МОН с протокол № 52 от 02.07.2002 г.